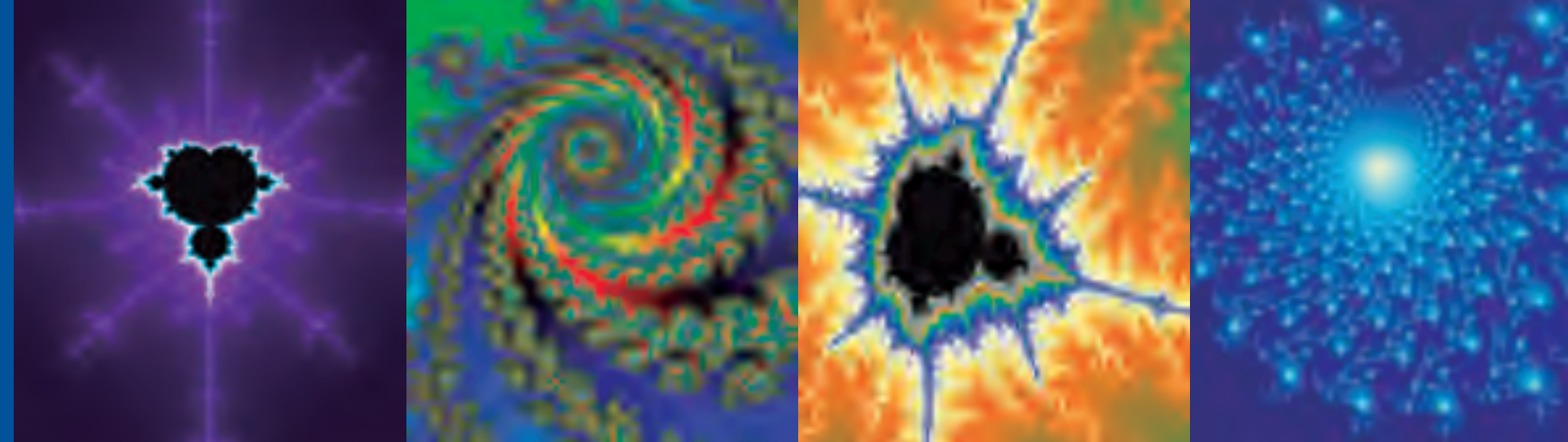




Texto del estudiante

Matemática 1.º Medio



Texto del estudiante



Jael del Valle Elgueta • Gerardo Muñoz Díaz • María Antonieta Santis Ávalos



Edición especial para el Ministerio de Educación.
Prohibida su comercialización.



Edición especial para el Ministerio de Educación.
Prohibida su comercialización.



MATEMÁTICA 1.º MEDIO TEXTO DEL ESTUDIANTE

Dirección editorial

Felipe Muñoz Gómez

Corrección de estilo

Alida Montero de la Fuente

Coordinación editorial

Daniela Cienfuegos Fernández

Coordinación de diseño

Gabriela de la Fuente Garfías

Edición

María Antonieta Santis Ávalos

Diseño y diagramación

Yanira Fuentes Pérez

Ayudantía de edición

Camila Prieto Córdova

Diseño de portada

Yanira Fuentes Pérez

Autoría

Jael del Valle Elgueta

Gerardo Muñoz Díaz

María Antonieta Santis Ávalos

Ilustraciones

Tomás Reyes Reyes

Asesoría

Verónica Muñoz Correa

Guadalupe Álvarez Pereira

Producción fotográfica

Carlos Johnson Muñoz

Archivo editorial

Gestión de derechos

Josefina Majewsky Vera

Desarrollo de solucionario

Susan Schwerter Felmer

Natalia Cisterna Poblete

Producción

Andrea Carrasco Zavala

Este texto corresponde al Primer año de Enseñanza Media y ha sido elaborado conforme al Decreto Supremo N° 254/2009, del Ministerio de Educación de Chile.

xxxx – Ediciones SM Chile S.A. – Coyancura 2283 piso 2 – Providencia

ISBN: 978-956-349-546-1 / Depósito legal: 229884

Se terminó de imprimir esta edición de 266.800 ejemplares en el mes de enero del año 2014.

Impreso por Quad/Graphics Chile S.A.

Quedan rigurosamente prohibida, sin la autorización escrita de los titulares del Copyright, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución en ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo público.



Matemática

Texto del estudiante

Gerardo Andrés Muñoz Díaz

Profesor de Matemática

Pontificia Universidad Católica de Chile

Ingeniero Eléctrico

Universidad de Santiago de Chile

Magíster en Enseñanza de las Ciencias con mención en
Didáctica de la Matemática

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Jael Raydoret del Valle Elgueta

Profesora de Matemática y Computación

Universidad de Santiago de Chile

Profesora General Básica con mención en Matemática

Pontificia Universidad Católica de Chile

María Antonieta Santis Ávalos

Licenciada en Matemáticas

Pontificia Universidad Católica de Chile

Estadístico

Pontificia Universidad Católica de Chile





Unidad 1

Números racionales y potencias

6

Repaso mis conocimientos	8
Lección 1: ¿Qué problemas no tienen solución en los números enteros, pero sí en los números racionales?	10
Lección 2: Los números decimales periódicos y semiperiódicos, ¿son números racionales?	12
Lección 3: ¿Cómo comparar números racionales?	16
Lección 4: ¿Cómo representar números racionales en la recta numérica?	20
Integro mis aprendizajes	24
Lección 5: ¿Cómo resolver operaciones con números racionales?	26
Lección 6: ¿Qué es la propiedad de Clausura?	32
Lección 7: ¿Por qué los números racionales son densos?	34
Lección 8: ¿Cómo aproximar números racionales?	36
Lección 9: ¿Cuáles son las limitaciones de la calculadora al realizar cálculos con números racionales?	40
Integro mis aprendizajes	44
Aplico mis aprendizajes	46
Lección 10: ¿Qué es una potencia de base racional y exponente entero?	48
Lección 11: ¿Qué propiedades se pueden utilizar para operar con potencias?	52
Lección 12: ¿Cómo resolver problemas que involucran operaciones combinadas con números racionales y potencias?	58
Integro mis aprendizajes	64
Aplico mis aprendizajes	66
Estudio mis posibles errores	68
Conecto con la Química	70
Sintetizo mis aprendizajes	71
Refuerzo mis aprendizajes	72
Evalúo mis aprendizajes	74

Unidad 2

Álgebra y funciones

78

Repaso mis conocimientos	80
Lección 13: ¿Para qué se utiliza el lenguaje algebraico?	82
Lección 14: ¿Qué son las expresiones algebraicas? ¿Cómo evaluarlas? ¿Cómo reducirlas?	86
Lección 15: ¿Cómo multiplicar expresiones algebraicas?	90
Lección 16: ¿Qué son los productos notables?	94
Lección 17: ¿Qué es factorizar? ¿Cómo se factorizan expresiones algebraicas?	100
Integro mis aprendizajes	108
Lección 18: ¿Cómo plantear y resolver ecuaciones lineales con una incógnita con coeficientes racionales?	110
Lección 19: ¿Cómo plantear y resolver ecuaciones literales?	114
Lección 20: ¿Cuáles son las restricciones en la solución de una ecuación literal?	118
Integro mis aprendizajes	122
Aplico mis aprendizajes	124
Lección 21: ¿Qué es una función?	126
Lección 22: ¿Qué es la pendiente de una recta? ¿Cómo se calcula?	132
Lección 23: ¿Cuándo una función es lineal?	134
Integro mis aprendizajes	138
Lección 24: ¿Cuándo es afín una función?	140
Lección 25: ¿Qué es una composición de funciones?	146
Lección 26: ¿Qué propiedades cumplen la composición de funciones?	150
Integro mis aprendizajes	154
Aplico mis aprendizajes	156
Estudio mis posibles errores	158
Conecto con la Física	160
Sintetizo mis aprendizajes	161
Refuerzo mis aprendizajes	162
Evalúo mis aprendizajes	164
Evaluación integradora	168

Unidad 3

Geometría 172

▶ Repaso mis conocimientos	174
Lección 27: ¿Qué es el plano cartesiano? ¿Cómo representar figuras en él?	176
Lección 28: ¿Qué es un vector? ¿Cómo representar vectores en el plano cartesiano?	180
Lección 29: ¿Cómo multiplicar un vector por un escalar? ¿Cómo representar el vector resultante en el plano?	184
Lección 30: ¿Cómo sumar y restar vectores?	188
▶ Integro mis aprendizajes	192
Lección 31: ¿Cómo trasladar figuras en el plano cartesiano?	194
Lección 32: ¿Cómo reflejar figuras en el plano cartesiano?	198
Lección 33: ¿Cómo rotar figuras en el plano cartesiano?	202
Lección 34: ¿Cuál es el resultado de la composición de transformaciones isométricas en el plano cartesiano?	206
▶ Integro mis aprendizajes	210
Aplico mis aprendizajes	212
Lección 35: ¿Cuándo dos figuras son congruentes?	214
Lección 36: ¿Cuál es la mínima información para concluir que dos figuras son congruentes?	218
Lección 37: ¿Cómo se realiza una demostración utilizando congruencia?	224
Lección 38: ¿Cómo demostrar propiedades de algunos polígonos?	226
▶ Integro mis aprendizajes	230
Aplico mis aprendizajes	232
Estudio mis posibles errores	234
Conecto con la Arquitectura	236
Sintetizo mis aprendizajes	237
Refuerzo mis aprendizajes	238
▶ Evalúo mis aprendizajes	240

Unidad 4

Estadística y probabilidades 244

▶ Repaso mis conocimientos	246
Lección 39: ¿Cómo representar datos agrupados?	248
Lección 40: ¿Cómo interpretar gráficos y tablas de datos agrupados?	252
Lección 41: ¿Cómo calcular medidas de tendencia central?	256
Lección 42: ¿Cómo interpretar medidas de tendencia central?	260
Lección 43: ¿Cómo calcular medidas de posición?	264
Lección 44: ¿Cómo se interpretan las medidas de posición?	268
Lección 45: ¿Cómo realizar un análisis estadístico utilizando una planilla de cálculo?	272
▶ Integro mis aprendizajes	276
Aplico mis aprendizajes	278
Lección 46: ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral?	280
Lección 47: ¿De cuántas formas se pueden ordenar una cantidad de objetos?	284
Lección 48: ¿Cuántas combinaciones se pueden hacer?	288
Lección 49: ¿Qué relación existe entre el promedio de las medias muestrales y la media de la población?	292
Lección 50: ¿Cómo calcular la probabilidad teórica?	294
Lección 51: ¿Cómo calcular la probabilidad experimental?	298
▶ Integro mis aprendizajes	302
Aplico mis aprendizajes	304
Estudio mis posibles errores	306
Conecto con la Sociología	308
Sintetizo mis aprendizajes	309
Refuerzo mis aprendizajes	310
▶ Evalúo mis aprendizajes	312
▶ Evaluación integradora	316
Glosario	320
Índice temático	326
Bibliografía	328
Solucionario	330

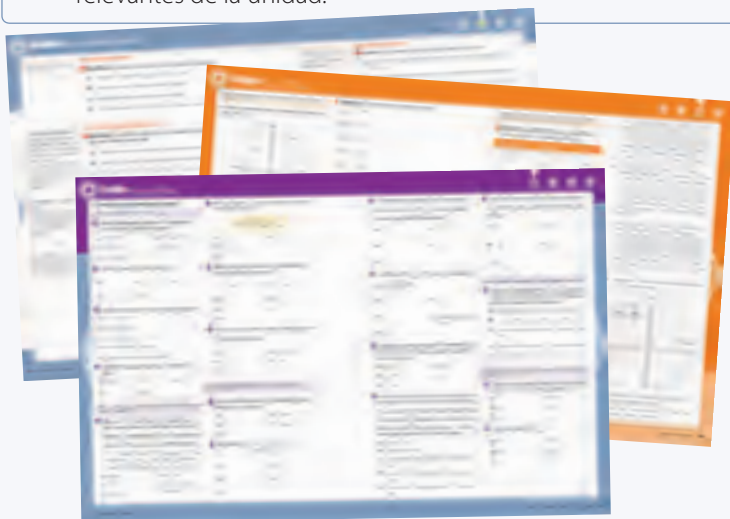


Tu Texto del Estudiante se compone de cuatro unidades. En cada una de ellas encontrarás las siguientes secciones:

1. Páginas de inicio de unidad

Contiene una línea de tiempo, cuya finalidad es conectar lo que sabes, lo que vas aprender y para qué te servirán estos conocimientos.

A través de las Palabras clave podrás focalizar los conceptos más relevantes de la unidad.



2. Páginas de evaluaciones

Destinadas a medir tus conocimientos y habilidades adquiridas a lo largo de la unidad.

Existen tres momentos de evaluación:

Repaso mis conocimientos previos (Evaluación inicial), Integro mis aprendizajes (Evaluación intermedia) y Evalúo mis aprendizajes (Evaluación final).

3. Páginas de desarrollo de contenidos y habilidades

Lecciones en las que activarás tus ideas previas, desarrollarás tus habilidades a través de un Taller o un Paso a Paso y reflexionarás acerca de lo aprendido a través de la cápsula Razona y Comenta. Finalmente, en la sección Formaliza encontrarás un resumen de los contenidos más relevantes de la Lección. En la Practica, te proponemos actividades de Repaso, Práctica guiada con ejercicios jerarquizados y de aplicación en la resolución de problemas de los aprendizajes adquiridos por medio de la sección Aplico.



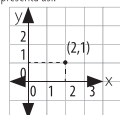
Señales para aprender más... ➡ Cápsulas destinadas a complementar los contenidos tratados en cada lección.

Palabras clave

- ➡ Aproximación.
- ➡ Redondeo.
- ➡ Truncamiento.

Repasa

Un par ordenado se denota por (x, y) , donde x corresponde al valor de la abscisa e y es el valor de la ordenada del gráfico. Ejemplo: $(2, 1)$ en un gráfico se representa así:



Observa

El índice de masa corporal (IMC) mide el exceso de peso relacionando la altura y la masa de una persona.

Relaciona

- ¿Cuánto es $0,3^{-2}$? Describe cómo lo calculaste.

Links

Para reforzar la comparación de números racionales visita:

<http://goo.gl/5Pe07>





4. Páginas de estrategias

Destinadas a la resolución de problemas, aplicando diversas estrategias y al tratamiento de los errores más frecuentes en el desarrollo de procedimientos.

Complementadas con reseñas de matemáticos famosos(as) y Tips para prevenir posibles errores.

5. Páginas de conexión y de síntesis

Destinadas a conectar la matemática con su aplicación en otras áreas del conocimiento y sintetizar, a través de organizadores gráficos y actividades, los distintos aprendizajes de la unidad. Aparecen complementadas con información adicional acerca de temas de la actualidad y Tips para mejorar técnicas de estudio.



6. Páginas de reforzamiento

Contienen actividades para reforzar todos los aprendizajes esperados de la unidad, complementados con cápsulas de repaso de los contenidos tratados en cada lección.



7. Páginas Anexas

El texto también contiene evaluaciones de integración de las unidades, un solucionario para monitorear tu aprendizaje y una bibliografía adicional para que profundices o refuerces los contenidos del nivel.



Números racionales y potencias

Ideas previas

La cultura chinchorro

En la costa chilena han aparecido un centenar de momias pertenecientes a la cultura chinchorro (6000 – 2000 a.C.) y a las que la prueba del carbono 14 les asigna una edad de 7800 años, convirtiéndolas en las momias más antiguas del mundo.

Fuente: <http://www.icarito.cl>

El carbono 14 forma parte del CO_2 presente en todos los seres vivos. Tiene una vida media de unos 5700 años, así es que al cabo de dos vidas medias (unos 11 400 años) solo queda una cuarta parte de él; y después de tres vidas medias, apenas la octava parte.

- Si un ser vivo al momento de morir tiene 200 unidades de carbono 14, ¿cómo podrías calcular la cantidad de unidades que tendrá después de 5700 años? Describe tu procedimiento.
- ¿Qué relación existe entre la desintegración del carbono 14 y el decrecimiento exponencial? Explica.

Palabras clave

- ⇒ Números racionales
- ⇒ Potencias de base racional y exponente entero



1

2

3

4



Entierro colectivo familia
chinchorro, periodo arcaico.
Fuente: <http://www.cplm.cl/>



Repaso mis conocimientos previos

Los **números naturales** corresponden al conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

Los **números cardinales** corresponden al conjunto $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

Los **números enteros** corresponden al conjunto $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

El **valor absoluto** de un número **a** es la distancia que existe entre dicho número y el 0. Se define como:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Caracterizar números enteros

1 Identifica si los siguientes números o resultados son enteros. Si lo son, calcula su valor absoluto.

a. -3

c. $\frac{25}{5}$

e. $-(5 + 3)$

g. $3 \cdot 5$

b. 5

d. $-2 - 1$

f. $|-2|$

h. $-2 \cdot 10$

Ordenar y comparar números enteros

Para **comparar** números enteros negativos, será mayor aquel número que esté más cerca del 0. Al comparar un número positivo y un número negativo, siempre será mayor el número positivo. El orden de los números positivos sigue las mismas relaciones que en los números naturales.

2 Compara y escribe $>$, $<$ o $=$ según corresponda.

a. -2 $______$ -3

d. 0 $______$ -4500

g. 103 $______$ $-(-103)$

b. -10 $______$ 1

e. 3500 $______$ 0

h. $\frac{81}{-9}$ $______$ -8

c. -82 $______$ -83

f. -8000 $______$ -500

i. $\left|\frac{5}{5}\right|$ $______$ -1

3 Compara los siguientes números y ordénalos de menor a mayor.

a. $-2, -6, 100, -10, 5, 0$

b. $-[-(99)], -99, 100, -100, 101, -(101)$

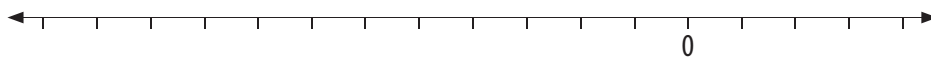
c. $\frac{-3}{-3}, 5, -5, -22, -23, |8|, \frac{8}{2}$

Representar números enteros

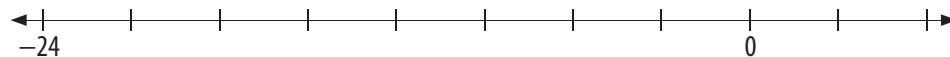
Para **representar** números enteros en la recta numérica debes ordenarlos de menor a mayor y ubicarlos según la posición en que se encuentre el número 0.

4 Representa los números en la recta numérica.

a. $-12, 1, -6, -10, 2$.



b. $-9, -18, 3, -21, -12$.



La prioridad de las operaciones es la siguiente:

1° Paréntesis

2° Potencias

3° Multiplicación y/o división de izquierda a derecha.

4° Adición y/o sustracción de izquierda a derecha.

Para multiplicar o dividir números enteros la regla de los signos es:

$$+ \cdot + = +$$

$$- \cdot - = +$$

$$+ \cdot - = -$$

$$- \cdot + = -$$

Operar con números enteros

5 Calcula las operaciones.

a. $7 - [5 - 4 \cdot (3 - 2) + 1]$

b. $25 + 2 \cdot [3 - (-9)] \div (-2)$

c. $- \{(-2) + (-9) \cdot 5 - 80 \div (-4) - (2 - 3)\}$

d. $(-1) \cdot \{(-1) + 1 - 1 + [(-1) - 1 + 1 \cdot ((-1) \div 1)] + 1\}$

Calcular potencias de base entera y exponente natural

Una potencia se define de la siguiente manera:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ veces}} \quad \text{con } n \in \mathbb{N}.$$

6 Calcula las siguientes potencias.

a. $(-5)^3$

d. 1000^0

b. $(-6)^2$

e. $\left(\frac{36}{3}\right)^2$

c. -1^6

f. $(-4)^4$

Calcular potencias utilizando sus propiedades

Para resolver problemas que involucren potencias puedes utilizar sus propiedades.

- Sean m y n números naturales y $a \neq 0$, entonces se cumple que:

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

- Si $a \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{N}$ entonces:

$$(-a)^m = a^m \text{ cuando } m \text{ es par.}$$

$$(-a)^m = -a^m \text{ cuando } m \text{ es impar.}$$

7 Aplica las propiedades de las potencias.

a. $\frac{(-1)^2 \cdot (-5)^{13} \cdot (-1)^{10}}{(-5)^8 \cdot (-1)^9 \cdot (-5)^2}$

d. $\left(\left((3^5)^8\right)^0\right)$

b. $12^2 \cdot 36 \cdot \frac{4^7}{12^2} \cdot 9^7 \cdot 6^2$

e. $\left\{[(-2)^2]^2\right\}^2$

c. $\frac{3^{10} \cdot (-2)^3 \cdot 3^2 \cdot (-2)^4}{3^{15} \cdot (-2)^5}$

f. $\frac{2^{2^3} \cdot 5^6 \cdot 25}{5^2 \cdot -(2^3)^2}$

Resolver problemas que involucran números enteros y potencias

8 Resuelve los problemas.

- En mi cuenta corriente tengo un saldo a favor de \$25 000. Si me cobran un cheque de \$60 700, ¿qué saldo quedará en mi cuenta?
- Un submarino desciende 3000 m desde la superficie del mar, pero su tripulación es alertada de un peligro, y asciende rápidamente 1560 m. Luego de que la alerta fuera levantada, desciende nuevamente 650 m. ¿A qué profundidad se encuentra el submarino?
- Un comerciante guarda 20 dulces en cada bolsa, 20 bolsas en cada caja y 20 cajas en cada cajón. ¿Cuántos dulces se guardarán en dos cajones?

Palabras clave

➔ Números racionales.

Repasa

- Un problema o ecuación tiene solución en los números enteros siempre y cuando se obtenga una cantidad entera positiva o negativa o bien el cero. Por ejemplo:
- $2x + 8 = 4 \rightarrow x = -2$

Relaciona

- ¿Cómo podrías escribir un número entero como fracción? Da un ejemplo.
- ¿Conoces números decimales que se pueden escribir como fracción? ¿Cuáles? Da un ejemplo.

¿Qué problemas no tienen solución en los números enteros, pero sí en los números racionales?

- Si la solución de una ecuación fuese $-0,1$, ¿a qué conjunto numérico correspondería este número?

Taller

Reúnanse en grupos de tres estudiantes, resuelvan las siguientes ecuaciones y completen la tabla.

Ecuación	Solución	¿Es un número entero?
a) $2x + 8 = 7$	$x = \frac{-1}{2}$	No
b) $3x = 7$		
c) $\frac{x}{20} = 2$		
d) $4x + 16 = 2$		
e) $16x = -48$		
f) $7x + 3 = 5$		

Razonen

y comenten

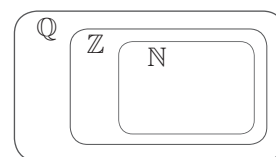
- Si cada una de estas ecuaciones representara un problema, ¿tendrían todas solución en los números enteros? ¿Qué tipo de números obtuviste como solución?
- ¿Qué puedes concluir acerca de la necesidad de ampliar el ámbito numérico que ya conoces?

Existen ecuaciones y problemas que no tienen solución en los números enteros, pero sí en los **números racionales**, en este conjunto están contenidos los números enteros positivos, negativos, fracciones y decimales positivos, y además las fracciones y decimales negativos.

En resumen

El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ está compuesto por todos los números que se pueden escribir como una fracción cuyo numerador y denominador (distinto de cero), son números enteros.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z} \text{ y } b \in \mathbb{Z}; b \neq 0 \right\}$$



$\mathbb{N}$: Números naturales
 $\mathbb{Z}$: Números enteros
 $\mathbb{Q}$: Números racionales

Repaso

1. **Identifica** cuál de los siguientes números corresponden a un número entero.

- a) 3 d) 0 g) $\frac{1}{3}$
 b) -2 e) $\frac{4}{2}$ h) $1\frac{2}{7}$
 c) 0,4 f) $0,\bar{3}$ i) $1,\overline{537}$

2. **Resuelve** los siguientes problemas con números enteros.

- a) Un día la temperatura, a las 4:00 horas, era de 3 grados bajo cero y a las 15:00 horas de 4 °C. ¿Cuál fue la variación de temperatura?
 b) Jaime quiere comprar un teléfono de \$25 000, pero el saldo de su cuenta es de -\$9000. Si ese día realiza un trabajo y gana \$18 000, ¿cuánto dinero le faltaría para comprar el teléfono?

Práctica guiada

3. **Resuelve** los siguientes problemas planteando la ecuación y determinando si la solución es un número entero o no lo es.

- a) Jaime leyó los $\frac{3}{5}$ de un libro. Si este tiene 125 páginas en total, ¿cuántas páginas no ha leído aún?
 b) Bernardita compró un computador en \$200 000 que corresponden a un tercio del dinero que tenía ahorrado. Luego realiza un trabajo y recibe la novena parte del dinero que tenía ahorrado. ¿Cuánto dinero ganó por el trabajo?
 c) Martín comió un postre y dejó un octavo de él. Si pesaba 100 gramos, ¿cuántos gramos del postre comió Martín?

Integro

- ¿Eres capaz de reconocer problemas que no tienen solución en los enteros, pero sí en los racionales?
- ¿Por qué piensas que son importantes los números racionales? Ejemplifica con dos situaciones.

4. **Identifica** si los siguientes números se pueden escribir como fracción. De ser así, exprésalos como en el ejemplo.

$$-5 \text{ Sí } \frac{-5}{1}$$

- a) 18
 b) 1,4
 c) 6,59
 d) 28,0
 e) 5,64567
 f) ¿Cuáles de los números anteriores son racionales?

Aplico

5. **Identifica** si los siguientes problemas tienen solución en los números enteros o solo en los números racionales.

- a) Para rodear un cono se necesitan 100 cm de cinta y esta se debe cortar en tres trozos de igual longitud. ¿Cuál es la medida de cada trozo de cinta?
 b) Jaime donará la cuarta parte de sus ahorros a una fundación y además, su amiga se sumará aportando \$10 000. Si el monto total de la donación es de \$48 000, ¿cuánto dinero aportó Jaime?

6. **Conecta.** Marta dice que los números naturales son un subconjunto de los números racionales, ¿es cierto lo que dice Marta?

7. **Describe el procedimiento.** Explica cómo expresar un número decimal finito en fracción.

8. **Argumenta.** ¿Es posible hacer una representación gráfica del número $-\frac{3}{5}$? Justifica tu respuesta.

Refuerzo

- Escribe dos ejemplos de números racionales.
- Escribe dos ecuaciones: una que tenga solución en los enteros y otra en los racionales no enteros.
- Escribe dos problemas: uno que tenga solución en los enteros y otro en los racionales no enteros.

Palabras clave

- Números decimales periódicos y semiperiódicos.

Repasa

Existen números decimales:

- **Finitos:** en los cuales su parte decimal tiene un número finito de cifras decimales. Ejemplo: 7,56.
- **Infinitos periódicos:** en los cuales una o más cifras de la parte decimal (llamado periodo) se repite. Ejemplos: En $3,\overline{1}$ la cifra 1 es el periodo.
- **Infinitos semiperiódicos:** en los cuales no todas las cifras de la parte decimal se repiten. La parte decimal que no se repite se llama al anteperiodo, y la parte decimal que se repite corresponde al periodo. Ejemplo: En $5,2\overline{5}$ la cifra 5 es el periodo y la cifra 2 el anteperiodo.

Los números decimales periódicos y semiperiódicos, ¿son números racionales?

- Toda fracción puede escribirse como número decimal. ¿Se puede escribir cualquier número decimal como fracción?

Tres amigos comparten una pizza de manera equitativa. El primero dice que le corresponden $0,\overline{3}$ partes de la pizza; el segundo dice que le corresponde $\frac{1}{3}$ de esta; el tercero dice que ambos están en lo correcto. ¿Es cierto lo que afirma el tercer amigo?

Si es cierto lo que afirma el tercer amigo, habría que verificar que:

$$0,\overline{3} = \frac{1}{3}$$

Luego:

Paso 1 ➤ Sea $x = 0,33\dots$

Paso 2 ➤ Al multiplicar por 10 a ambos lados de la igualdad, se tiene:

$$10 \cdot x = 3,33\dots$$

Paso 3 ➤ Al restar los valores obtenidos en el paso 2 y en el paso 1, se tiene que:

$$10x - x = 3,33\dots - 0,33\dots \rightarrow 9x = 3 \div \frac{1}{9} \rightarrow 9 \cdot \frac{1}{9}x = 3 \cdot \frac{1}{9} \rightarrow x = \frac{3}{9} \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

Entonces, el tercer amigo sí estaba en lo correcto. Por lo tanto, los números decimales finitos e infinitos periódicos son números racionales, ya que pueden ser expresados como fracción.

¿Y los números decimales semiperiódicos, son números racionales?

Si no se comieron $0,\overline{16}$ partes de la pizza, ¿qué fracción de la pizza sobró?

Observa los pasos para transformar el número decimal semiperiódico a fracción:

Paso 1 ➤ Sea $x = 0,1666\dots$

Paso 2 ➤ Al multiplicar por 10 a ambos lados de la igualdad, se tiene:

$$10x = 1,666\dots$$

Paso 3 ➤ Al multiplicar por 100 a ambos lados de la igualdad, se tiene:

$$100x = 16,66\dots$$

Relaciona

- ¿Por qué en el paso 2 la ecuación se multiplicó por 10?
- ¿Por cuánto se debería multiplicar si la ecuación fuese $x = 0,272727\dots$?
- En la situación inicial, ¿qué tipo de representación es más adecuada para interpretar lo que le corresponde a cada amigo? ¿Por qué?



Paso 4 Al restar los valores que se tienen en el paso 3 y en el paso 2 se tiene que:

$$100x - 10x = 16,66... - 1,666... \rightarrow 90x = 15 \cdot \frac{1}{90} \rightarrow 90 \cdot \frac{1}{90}x = 15 \cdot \frac{1}{90} \rightarrow x = \frac{15}{90} \\ \rightarrow x = \frac{1}{6}$$

Entonces, la fracción de pizza que quedó es $\frac{1}{6}$. Por lo tanto, un número decimal infinito semiperiódico también es un número racional, ya que puede ser expresado como fracción.

Observa

- Al transformar un número decimal periódico o semiperiódico negativo a fracción se realiza el procedimiento considerando el valor absoluto del número decimal.

Razona

y comenta

- ¿Todos los números decimales infinitos pueden ser representados como fracción? ¿Por qué?
- Observa el decimal: 0,1010010001... Si se mantiene el patrón de aumentar cada vez la cantidad de ceros en la parte decimal, este número infinito, ¿se podrá expresar como fracción? ¿Por qué?
- Los números infinitos que **no se consideran** periódicos ni semiperiódicos ¿son números racionales? ¿Por qué?

Links

Para profundizar en la caracterización de los números racionales visita:

<http://www.educando.edu.do/articulos/estudiante/nmero-racional/>

En resumen

Dentro de los números racionales existen números decimales **finitos** e **infinitos**. Los números decimales infinitos pueden ser **periódicos** o **semiperiódicos**. Los números decimales infinitos que no sean periódicos ni semiperiódicos pertenecen a otro conjunto numérico, denominado conjunto de los números **irracionales**.



Repaso

1. **Representa** las fracciones como un número decimal y clasifícalo en finito, periódico o semiperiódico.

a) $\frac{7}{11}$ c) $\frac{4}{45}$ e) $-\frac{1}{225}$ g) $7\frac{2}{3}$
b) $\frac{5}{99}$ d) $-\frac{8}{3}$ f) $2\frac{6}{9}$ h) $\frac{25}{4}$

Práctica guiada

2. **Transforma** cada número decimal finito en fracción.

$$12,5 = \frac{125}{10} = \frac{25}{2}$$

- a) 0,515 e) 20,999
b) 7,11 f) 29,2
c) 6,01 g) -134,67
d) 33,96 h) -800,231

3. **Transforma** cada número decimal periódico en fracción de acuerdo a la justificación revisada en la lección.

$$X = 3,\overline{8}, x = 3,888... \text{ y } 10x = 38,888... \text{ restando queda } 9x = 35, \text{ luego } x = \frac{35}{9}$$

- a) $5,\overline{21}$ c) $0,\overline{09}$ e) $2,\overline{153}$ g) $-1,\overline{001}$
b) $0,\overline{5}$ d) $4,\overline{13}$ f) $0,\overline{47}$ h) $-320,\overline{8}$

4. **Transforma** cada número decimal semiperiódico en fracción de acuerdo a la justificación revisada en la lección.

$$x = 2,3\overline{14}, x = 2,31414... \text{ y } 10x = 23,1414... \text{ y } 1000x = 2314,1414... \\ \text{restando queda } 990x = 2291, \text{ luego } x = \frac{2291}{990}$$

- a) $1,5\overline{7}$ e) $31,4\overline{7}$
b) $23,4\overline{56}$ f) $4,2\overline{5}$
c) $1,24\overline{72}$ g) $102,0\overline{7}$
d) $0,37\overline{6}$ h) $-10,360\overline{2}$

5. Analiza la siguiente tabla. Luego complétala.

Número	Tipo	Representación decimal	Representación fraccionaria
$1,\overline{023}$	Decimal infinito periódico	$1,023023023\dots$	$\frac{1022}{999}$
			$\frac{2}{33}$
$-2,9\overline{8}$			
	Decimal finito	$0,56$	

6. Observa el procedimiento para transformar números decimales periódicos a fracción y luego transforma a fracción los decimales que aparecen a continuación.

Para transformar a fracción un decimal periódico se realiza lo siguiente:

Se escribe el número sin comas y se le resta lo que está antes del período.

$$23,\overline{81} = \frac{2381 - 23}{99} = \frac{2358}{99} = 23\frac{9}{11}$$

El denominador tendrá tantos 9 como cifras tenga el período.

- a) $1,\overline{8} = \frac{17}{9}$

b) $37,\overline{2} = \frac{335}{9}$
- c) $300,\overline{1} = \frac{2701}{9}$

d) $5,\overline{03} = \frac{166}{33}$
- e) $16,\overline{29} = \frac{1613}{99}$

f) $84,\overline{27} = \frac{927}{11}$
- g) $300,\overline{36} = \frac{3304}{11}$

h) $33,\overline{300} = \frac{11\,089}{333}$

7. Observa el procedimiento para transformar números decimales semiperiódicos a fracción y luego transforma a fracción los decimales que aparecen a continuación.

Para transformar a fracción un decimal semiperiódico se realiza lo siguiente:

Se escribe el número sin comas y se le resta lo que está antes del período.

$$17,\overline{265} = \frac{17\,265 - 172}{990} = \frac{17\,093}{990} = 17\frac{263}{990}$$

Anteperíodo

El denominador tendrá tantos 9 como cifras tenga el período y tantos 0 como cifras tenga el anteperíodo.

- a) $0,0\overline{3} = \frac{3}{90}$

b) $1,\overline{14} = \frac{103}{90}$
- c) $23,\overline{32} = \frac{2099}{90}$

d) $66,0\overline{2} = \frac{2971}{45}$
- e) $2,\overline{332} = \frac{2309}{990}$

f) $9,12\overline{1} = \frac{8209}{900}$
- g) $1,7\overline{24} = \frac{569}{330}$

h) $6,\overline{130} = \frac{2023}{330}$

8. Explica a un compañero o compañera el procedimiento utilizado para justificar las igualdades anteriores.

Aplico

9. Analiza las siguientes situaciones.

- a) Si $m = \frac{1}{18}$ y $n = \frac{18}{11}$, ¿es cierto que $m \cdot n = 1$?
- b) Si $n = \frac{18}{11}$ y $r = 1,6\overline{3}$, ¿es cierto que $5n = 5r$?
- c) Si $n = \frac{18}{11}$ y $r = 1,6\overline{3}$, ¿es cierto que $n \div r = 0$?
- d) Si $m = \frac{1}{18}$; $n = \frac{18}{11}$; $q = 0,5\overline{4}$ y $r = 1,6\overline{3}$, ¿es cierto que $mn + \frac{1}{2} > qr$?
- e) Si $m = \frac{1}{18}$ y $q = 0,5\overline{4}$, ¿es cierto que $m < q$?
- f) Si $n = \frac{18}{11}$, ¿es cierto que $11n + 180 = k$; $k \in \mathbb{Z}$?

10. Resuelve los siguientes problemas.

- a) Carlos necesita $1,3$ metros de género para confeccionar una cartera. ¿Es posible comprar $1,3$ metros? ¿Es la mejor forma de representar una medida? ¿Cómo le recomendarías que solicitara la cantidad de género que necesita?
- b) María necesita $1,6$ metros de alambre para cercar una huerta. ¿Es posible comprar $1,6$ m? ¿Es la mejor forma de representar una medida? ¿Cómo le recomendarías que solicitara la cantidad de alambre que necesita?
- c) Alex necesita $0,3$ kg de harina para preparar un queque. ¿Cómo podría obtener esta cantidad?
- d) A Paula le encargaron pintar una pared de la siguiente manera: $0,2$ de la superficie con color blanco, $0,6$ con color amarillo y $0,1$ con color azul. ¿Es posible que Paula realice este encargo? ¿Cómo sabría exactamente cuál es la parte de la pared que debe pintar de cada color?

- e) Para viajar en bus los pasajeros pueden llevar equipaje con una masa de 20 kg como máximo, ya lleven una, dos o más maletas o bolsos. La tabla muestra las masas de cada maleta que llevan tres pasajeros:

Pasajero	Equipaje	Masa total	Masa de exceso
Pasajero 1	Maleta: $18,3$ kg		
	Bolso: $5,8$ kg		
Pasajero 2	Maleta 1: $6,2$ kg		
	Maleta 2: $12,01$ kg		
Pasajero 3	Maleta: $3,8$ kg		
	Bolso 1: $5,2\overline{3}$ kg		
	Bolso 2: $15,9$ kg		

- Calcula la fracción correspondiente al exceso de masa que llevan los pasajeros que superan el máximo.
- ¿Cuál es la fracción de masa que les falta a los pasajeros para alcanzar el máximo?

11. Conecta. ¿Cuál es el valor de $(0,0\overline{6})^3$?12. Descubre el error. Pamela escribió la siguiente igualdad: $4,5\overline{3} = \frac{453}{90}$. ¿Cuál es el error que cometió?13. Describe el procedimiento. Explica el procedimiento para transformar un número decimal de la forma $a,b,\overline{c}$ en fracción. Considera que a , b y c son números enteros mayores o iguales a cero, y menores o iguales a 9.14. Desafío. Demuestra, utilizando el procedimiento de la página 12, que $0,9 = 1$.15. Argumenta. ¿Es posible ubicar en la recta numérica el número decimal $3,0\overline{6}$? Justifica tu respuesta.

Integro

- La justificación de la transformación de un número decimal periódico negativo a fracción es la misma que para uno positivo. ¿Por qué? Explica con un ejemplo.
- ¿Por qué piensas que es importante justificar los procedimientos matemáticos?

Refuerzo

1. Describe el procedimiento para justificar la transformación de un número decimal finito a fracción.
2. ¿El número $\pi = 3,1415926\dots$ es un número racional? ¿Por qué?

Palabras clave

- Orden y comparación de racionales.

Repasa**Orden en enteros**

Sean a y b números enteros.

- Si $a > 0$, entonces:
 $-a < 0$
 $a > -a$
- $a > b$ si y solo si $(a - b) > 0$
 $a < b$ si y solo si $(a - b) < 0$
- Ejemplos:
 $-5 > -8$
 $-11 < -7$

¿Cómo comparar números racionales?

- ¿Cómo comparabas números enteros? ¿Y números decimales? ¿Y fracciones? ¿Piensas que se utilizan las mismas estrategias para comparar números racionales?

María recibió los siguientes resultados de un examen de sangre:

PARAMETRO	RESULTADOS	UNIDADES	VALORES REF.
HEMATOLOGÍA			
HEMATÍES	5,38	10^{12} / L	(4,20 - 5,90)
HEMOGLOBINA	16,3	G/6L	(13,5 - 17,0)
HEMATOCRITOS	50,5	%	(40,0 - 45,0)
PLAQUETAS	215	10^9 / L	(150 - 400)
LEUCOCITOS	5,1	10^9 / L	(4,5 - 11,0)

Para interpretarlo, María debe comparar sus resultados con los valores referenciales, es decir, comprobar si cada resultado está entre los valores referenciales. Para ello siguió los pasos:

Paso 1 ➤ Identificar qué tipo de racionales aparecen, en este caso son números decimales finitos.

Paso 2 ➤ Los decimales finitos o infinitos periódicos o semiperiódicos, se compara primero por su parte entera, en caso que estas sean iguales, se compara su parte decimal cifra a cifra comenzando por las décimas, centésimas, milésimas hasta comparar cifras diferentes.

- En el caso del resultado de la Hemoglobina:

$$\begin{array}{ccc}
 16,3 \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad 13,5 & & 16,3 \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad 17,0 \\
 \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ 1 = 1 \\ \uparrow \quad \uparrow \\ 6 > 3 \end{array} & & \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ 1 = 1 \\ \uparrow \quad \uparrow \\ 6 < 7 \end{array} \\
 16,3 > 13,5 & & 16,3 < 17,0
 \end{array}$$

Las decenas de los números son iguales a 1, por lo tanto, se compara la siguiente cifra.
 Al comparar las unidades $6 > 3$ y $6 < 7$.

- En el caso de números decimales periódicos o semiperiódicos:

$$\begin{array}{ccc}
 24,8\overline{1} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad 24,8\overline{15} & & 24,81818181\dots \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad 24,81515151\dots \\
 \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ = \\ = \\ = \\ = \\ 8 > 5 \end{array} & & \\
 24,8\overline{1} > 24,8\overline{15} & &
 \end{array}$$

Por lo tanto, María puede concluir que solo el valor del hematocrito se escapa del valor referencial, ya que $50,5 > 45,0$.

Relaciona

- ¿Cómo se comparan números naturales? Utilízalo para comparar el valor de las plaquetas.
- ¿Cómo escribirías un número entero como decimal?

¿Cómo se comparan números racionales en forma fraccionaria?

Para ello puedes seguir uno de los siguientes pasos:

- Paso 1** Transformar las fracciones a números decimales y seguir los pasos anteriores.
- Paso 2** Igualar los denominadores de las fracciones, asegurándose que ambos denominadores sean positivos, y luego comparar numeradores.
- Paso 3** Utilizar la forma abreviada del paso anterior, que es multiplicar en forma cruzada las fracciones con ambos denominadores positivos y comparar los resultados, es decir:

$$-\frac{5}{9} \text{ } \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \text{ } -\frac{8}{11} \rightarrow -(5 \cdot 11) \text{ } -(9 \cdot 8) \\ \rightarrow -55 > -72 \rightarrow -\frac{5}{9} > -\frac{8}{11}$$

En resumen

Para **comparar números racionales** puedes:

- Si están en su forma decimal, comparar primero la parte entera, en caso que sean iguales comparar la parte decimal cifra a cifra, de izquierda a derecha.
- Si están en su forma fraccionaria, y sus denominadores son enteros positivos, puedes utilizar las siguientes estrategias:
 - a) Igualar los denominadores de las fracciones y comparar los numeradores.
 - b) Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ con $a, c \in \mathbb{Z}$, $b, d \in \mathbb{Z}^+$. Si $a \cdot d > b \cdot c$, entonces $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

Repasa

Orden en fracciones

$$\frac{3}{8} - \frac{7}{9} \rightarrow \frac{3 \cdot 9}{8 \cdot 9} - \frac{7 \cdot 8}{9 \cdot 8} \\ \rightarrow \frac{27}{72} - \frac{56}{72} \\ \rightarrow 27 < 56 \\ \rightarrow \frac{27}{72} < \frac{56}{72}$$

Razona

y comenta

- ¿Aplicaste las mismas estrategias que ya conocías para comparar números racionales? ¿Por qué?
- Si tuvieras que comparar una fracción con un número decimal, ¿qué estrategia utilizarías? ¿Por qué?
- Si tuvieras que comparar un número racional positivo con uno negativo, ¿necesitarías utilizar alguna de estas estrategias? ¿Por qué?

Repaso

1. **Compara** los números enteros, escribiendo los signos $<$, $>$ o $=$.

- | | |
|---|--|
| a) -2 $\underline{\hspace{1cm}}$ 2 | f) -130 $\underline{\hspace{1cm}}$ -128 |
| b) -9 $\underline{\hspace{1cm}}$ 0 | g) 500 $\underline{\hspace{1cm}}$ 523 |
| c) 0 $\underline{\hspace{1cm}}$ -72 | h) -1000 $\underline{\hspace{1cm}}$ -1001 |
| d) -56 $\underline{\hspace{1cm}}$ -40 | i) 23 $\underline{\hspace{1cm}}$ $ -23 $ |
| e) -78 $\underline{\hspace{1cm}}$ -87 | j) $ 168 $ $\underline{\hspace{1cm}}$ $ -138 $ |

2. **Compara** los números decimales, escribiendo los signos $<$, $>$ o $=$.

- | | |
|---|--|
| a) $1,03$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $1,3$ | f) $2,3$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $2,33$ |
| b) $0,6$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $0,06$ | g) $1,5$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $1,55$ |
| c) $78,6$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $7,86$ | h) $12,63$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $12,62$ |
| d) $8,59$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $8,32$ | i) $23,899$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $23,8989$ |
| e) $0,33$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $0,3$ | j) $93,005$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $93,0505$ |

3. **Compara** las fracciones, escribiendo los signos $<$, $>$ o $=$.

- | | |
|---|---|
| a) $\frac{1}{3}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $\frac{2}{5}$ | d) $\frac{13}{25}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $\frac{11}{20}$ |
| b) $\frac{4}{7}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $\frac{4}{8}$ | e) $1\frac{2}{3}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $\frac{32}{25}$ |
| c) $\frac{8}{9}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $\frac{3}{5}$ | f) $2\frac{5}{10}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $\frac{11}{2}$ |

4. **Resuelve** los problemas.

- a) Jaime compra $\frac{3}{8}$ kg de uvas el lunes y $\frac{7}{9}$ kg el martes. ¿Qué día compró más kg de uvas?
- b) Rocío trota durante la mañana 0,3 km y durante la tarde $\frac{1}{3}$ de km más. ¿Durante qué periodo del día Rocío trota menos?

Práctica guiada

5. **Compara** los números racionales y completa con los signos $>$, $<$ o $=$.

$$-11 < -10,9$$

- a) $-2,9$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $-2,99$ f) $\frac{7}{3}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $2,3$
 b) $-0,123$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $-0,12\bar{3}$ g) $\frac{11}{2}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $11,2$
 c) $\frac{1}{2}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $\frac{1}{8}$ h) $-2,0\bar{2}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $-\frac{21}{9}$
 d) $\frac{5}{2}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $\frac{2}{5}$ i) $75,\bar{3}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $\frac{220}{3}$
 e) $-\frac{12}{3}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $\frac{12}{-3}$ j) $-\frac{2}{6}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $-0,\bar{3}$

6. **Ordena** los números racionales de forma creciente.

$$2,3; 5,4; 2,\bar{2}; 2,0\bar{2}; 2; 5,\bar{4}$$

$$2 < 2,0\bar{2} < 2,\bar{2} < 2,3 < 5,4 < 5,\bar{4}$$

- a) $0; 0,7; -0,7; 0,07; -7; 7; 0,\bar{7}$
 b) $1,76; 17,6; 1,\bar{76}; -1,7\bar{6}; -17,\bar{6}$
 c) $-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; \frac{5}{4}; -\frac{8}{3}; \frac{3}{2}; \frac{1}{3}$
 d) $\frac{25}{99}; \frac{25}{10}; -\frac{23}{9}; -\frac{52}{10}; \frac{5}{3}; \frac{2}{5}; \frac{42}{100}$
 e) $0,189; -\frac{92}{10}; 1,198; -0,99; \frac{7}{5}$
 f) $0,04; -2,243; \frac{1}{2}; -\frac{56}{25}; -\frac{4}{7}; 0,\bar{5}$

7. **Analiza** las siguientes situaciones a partir de la actividad anterior.

¿Qué número racional ubicarías entre el segundo y el tercer término del ejemplo?

2,1 porque es un número mayor que $2,0\bar{2}$ y menor que $2,\bar{2}$.

- a) ¿Qué número racional existe entre el penúltimo y último término en b)? ¿Por qué?
 b) ¿Qué número racional existe entre el tercer y cuarto término en f)? ¿Por qué?

8. **Identifica** tres números racionales que cumplan las siguientes condiciones:

Números racionales entre $-\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{5}$.

$$-\frac{1}{5}, 0, \frac{1}{6}$$

- a) Números racionales entre $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{3}$.
 b) Números racionales entre $-0,6$ y $-\frac{1}{2}$.
 c) Números racionales entre $31,24$ y $31,2\bar{4}$.
 d) Números racionales entre $-\frac{1}{9}$ y $-\frac{1}{5}$.
 e) Números racionales entre $\frac{6}{5}$ y $1,3$.
 f) Números racionales cuya distancia a $\frac{8}{9}$ sea mayor que $\frac{1}{5}$ y que sean menores que $\frac{8}{5}$.
 g) Números racionales cuya distancia a $\frac{16}{5}$ sea mayor que $\frac{1}{3}$ y que sean menores que $\frac{17}{3}$.
 h) Números racionales cuya distancia a $-2,3$ sea mayor que $0,5$ y que sean menores que $2,3$.

Aplico

9. **Resuelve** los siguientes problemas.

- a) Un estudiante prepara un examen durante la mitad de un mes de 30 días. Un tercio de los días que restan se dedica a limpiar su habitación, los tres quintos de los restantes hace deporte y el resto es tiempo libre. ¿Cuál es el orden creciente de las actividades que realiza ese mes según el tiempo que le dedica a cada una?
 b) Dos automóviles A y B, recorren un mismo trayecto de 279 km. El automóvil A lleva recorridos los $\frac{7}{12}$ del trayecto y el automóvil B los $\frac{5}{8}$ del mismo. ¿Cuál de los dos ha recorrido una mayor distancia?
 c) Al repartir una herencia entre tres personas, la primera recibió dos novenos del total, la segunda, tres octavos y la última, el resto. ¿Quién recibió más dinero?

- d) Javier y Andrea leen el mismo libro. Javier lleva $\frac{15}{22}$ del libro y Andrea lleva $\frac{3}{5}$. ¿Cuál de los dos ha leído una menor cantidad de páginas? Si el libro tiene 198 páginas, ¿cuántas páginas leídas lleva el que ha leído más?
- e) Una arquitecto dibujó $\frac{19}{23}$ del diseño de una casa durante la mañana y durante la noche termina su diseño, dibujando los $\frac{4}{23}$ de él. ¿En qué periodo avanzó más con su diseño?
- f) Luisa, técnico en sonido, está chequeando el cableado de un escenario para un concierto folclórico. Para ello, $9,1$ m del cableado debe estar conectado a teclados y guitarras eléctricas, y $\frac{23}{3}$ m a baterías y bombos. ¿A qué instrumentos se le asigna una mayor cantidad de cable?
- g) Don Juan cocina pan amasado y ocupa $10,8$ kg de harina para el pan de la mañana y $\frac{98}{9}$ kg para el de la tarde. ¿En qué momento ocupa una mayor cantidad de harina?
- h) Fabián debe leer un libro, cumpliendo las siguientes metas: Un décimo de el lo debe leer a más tardar el 10 de enero, un quinto del libro, hasta el 15 de enero, tres décimos, hasta el 25 de enero y dos quintos, hasta el 30 de enero. ¿En qué fecha Fabián leyó la menor cantidad de páginas?
- i) Sean **a**, **b**, **c** y **d** números enteros negativos tal que $d > b$, $a > b$, $c > d$ y $\frac{a}{d} = 1$. Completa con $>$ o $<$ según corresponda y justifica tu respuesta.

$$\bullet \frac{c}{b} \text{ — } \frac{a}{b}$$

$$\bullet \frac{d}{c} \text{ — } \frac{a}{b}$$

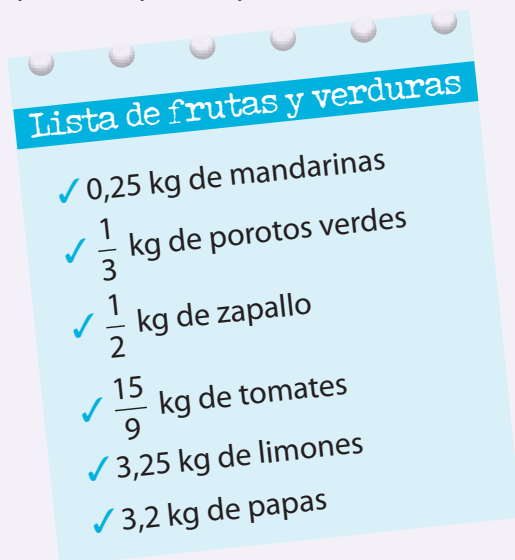
Integro

- ¿Por qué piensas que es importante establecer relaciones de orden en los números racionales? Ejemplifica con dos situaciones.
- En matemática siempre hay más de un método. ¿Qué efecto piensas que tiene esto en tu aprendizaje?

10. **Conecta.** Para una mezcla homogénea se necesitan entre $0,4$ g y $\frac{1}{2}$ g de bicarbonato sólido. Si

Paula cuenta con $\frac{1}{3}$ g de este, ¿le alcanza para formar la mezcla?

11. **Descubre el error.** Felipe ordenó en forma creciente la lista con la cantidad de frutas y verduras que tiene que comprar:



¿Cuál es el error que cometió Felipe?

12. **Describe el procedimiento.** Escribe otro procedimiento, diferente al visto en la lección, para comparar y ordenar los siguientes números:

$$0,7; \frac{16}{9}; -1,7; -\frac{7}{10}; -1,\bar{7}; 1,7$$

13. **Desafío.** Verifica que si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ con a, b, c y $d \in \mathbb{Z}$, b y $d \neq 0$, entonces:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

14. **Argumenta.** ¿Es cierto que si **a** y **b** son números enteros positivos, tales que $a > b$, entonces $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$? Justifica tu respuesta.

Refuerzo

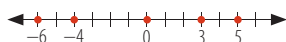
- Escribe 3 racionales que estén entre $1,5$ y $1,\bar{7}$.
- Escribe 3 racionales que estén entre $\frac{11}{45}$ y $\frac{3}{10}$.
- Escribe 3 racionales que estén entre $\frac{7}{8}$ y $0,8\bar{9}$.

Palabras clave

➔ Recta numérica.

Repasa

- Al representar los números -4 , 5 , -6 , 3 y 0 en la recta numérica se obtiene:



$$-6 < -4 < 0 < 3 < 5$$

- Al representar los números $0,3$; $0,6$; $0,8$; $0,1$ y $1,0$ en la recta numérica se obtiene:



$$0,1 < 0,3 < 0,6 < 0,8 < 1,0$$

¿Cómo representar números racionales en la recta numérica?

- Si tuvieras que representar $-\frac{1}{2}$ en la recta numérica, ¿cómo lo harías? Describe tu procedimiento y coméntalo con un compañero o compañera.

Ejemplo 1: Representación de números decimales en la recta numérica.

En el desierto de Atacama se registran temperaturas bajo cero. La tabla muestra las temperaturas mínimas registradas en los meses de otoño. ¿Cómo representarías estas temperaturas en la recta numérica? ¿Entre qué intervalos se ubican?

Para representar en la recta numérica estos números racionales puedes realizar lo siguiente:

Mes	T (°C)
Marzo	4,4
Abril	2,2
Mayo	-0,7
Junio	-0,5

Paso 1 ➔ Determinar los números enteros entre los que se ubican las temperaturas.

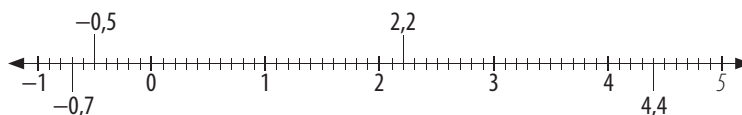
4,4 se ubica entre 4 y 5

-0,7 se ubica entre -1 y 0

2,2 se ubica entre 2 y 3

-0,5 se ubica entre -1 y 0

Paso 2 ➔ Para representar números decimales hasta la décima cada entero se divide en 10 tramos iguales.



Por lo tanto, las temperaturas registradas en otoño se encuentran entre -1°C y 5°C .

Relaciona

- ¿En cuántos tramos dividirías la recta numérica para representar centésimas?

Razona

y comenta

- ¿Por qué $-0,7$ quedó ubicado a la izquierda de $-0,5$ en la recta numérica?
- ¿Entre qué valores quedaron ubicadas las temperaturas negativas? ¿Y las positivas?

Ejemplo 2: Representación de números decimales y fracciones en la recta numérica.

Lucía y Jaime tienen que ubicar los racionales $-\frac{2}{3}$, $0,\overline{16}$ y $1,\overline{3}$. Lucía opina que deben transformar los decimales a fracción, pero Jaime dice que no es necesario. ¿Qué opinas tú?

Para representar en la recta numérica estos números racionales puedes realizar lo siguiente:

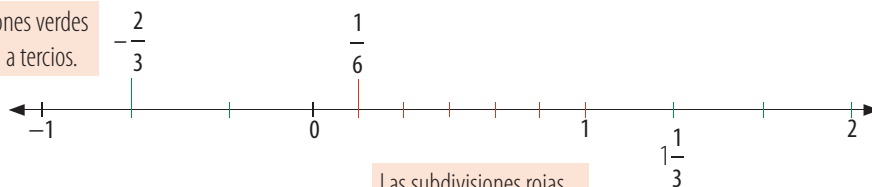
Paso 1 Transformar los números decimales periódicos y semiperiódicos a fracción.

$$0,\overline{16} = \frac{16-1}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$$

$$1,\overline{3} = \frac{13-1}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

Paso 2 Se dividen los trazos unitarios según el denominador y se ubica la fracción tantos lugares desde el cero a la derecha o izquierda, según el signo de la fracción, como lo indique el numerador.

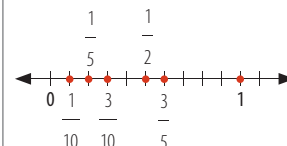
Las subdivisiones verdes corresponden a tercios.



Las subdivisiones rojas corresponden a sextos.

Repasa

■ Al representar los números $\frac{1}{10}$; $\frac{3}{10}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{5}$ y $\frac{1}{2}$ en la recta numérica se obtiene:



$$\frac{1}{10} < \frac{1}{5} < \frac{3}{10} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5}$$

Relaciona

■ ¿Por qué es conveniente transformar una fracción impropia a número mixto, para representarla en la recta numérica?

Razona

y comenta

- ¿Aplicaste estrategias que conocías para representar números racionales en la recta numérica? ¿Cuáles?
- ¿Es posible determinar la ubicación exacta de un decimal periódico en su representación decimal? ¿Cómo? Comenta con tus compañeros o compañeras.
- Si tuvieras que estimar la ubicación de un número decimal periódico en la recta numérica, ¿qué estrategia utilizarías? ¿Por qué?
- ¿En qué casos es más adecuado expresar los racionales en fracciones para ubicarlos en la recta? ¿En qué casos no es lo más adecuado? Fundamenta tu respuesta.

Links

Para reforzar la comparación de números racionales visita:

<http://www.profesorenlinea.cl/matematica/FraccionesRepresentar.htm>



Repaso

1. Representa los siguientes números enteros en una recta numérica.

- 8, 0, -5, 10, 12, -3
- 87, -88, 89, 90, 91, -92
- 100, -95, 56, -48, 32, -101
- 700; -900; 100; 500; -300; -200
- 2000, -800, 500, -1500, -300, 4000

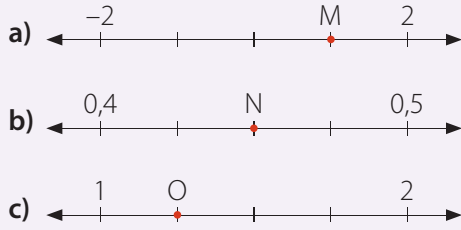
2. Representa los siguientes números decimales en una recta numérica.

- 0,1; 0,9; 0,5; 0,2; 0,8; 0,4
- 0,02; 0,12; 0,04; 0,10; 0,08; 0,15
- 0,11; 0,1; 0,22; 0,2; 0,12; 0
- 0,07; 0,03; 0,071; 0,04; 0,042; 0,035
- 3; 3,2; 3,35; 3,3; 3,4; 3,25

3. Representa las siguientes fracciones en una recta numérica.

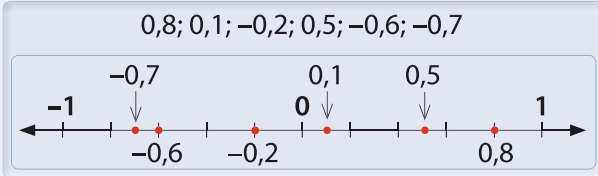
a) $\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{8}; \frac{1}{7}; \frac{1}{5}$ b) $\frac{2}{3}; \frac{4}{15}; \frac{5}{9}; \frac{4}{9}; \frac{7}{15}; \frac{1}{3}$

4. Estima los números indicados por los puntos M, N y O.



Práctica guiada

5. Representa los siguientes números racionales en una recta numérica.



- a) 0,2; -0,6; -0,4; 0,1; 0,5; -0,8
b) 1,4; -2,5; 3,1; -4,6; 2,8; -1,9
c) 0,02; -0,06; -0,04; 0,01; 0,05; -0,08
d) 0,12; -0,16; -0,14; 0,11; 0,15; -0,18
e) 1,02; -2,06; -3,04; 1,01; 4,05; -2,08
f) $4; \frac{7}{14}; \frac{14}{7}; \frac{47}{10}; \frac{21}{5}; \frac{23}{5}$
g) $\frac{1}{8}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{6}; -\frac{1}{8}; \frac{1}{4}$
h) $-\frac{8}{5}; -\frac{5}{3}; -\frac{4}{15}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{15}; -\frac{1}{5}$

6. Identifica entre qué números decimales finitos se encuentran los siguientes números.

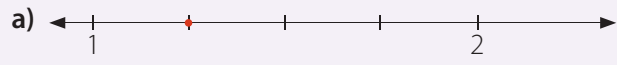
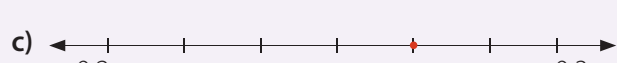
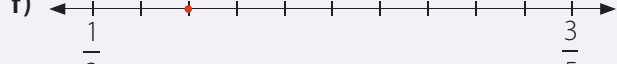
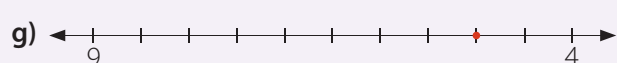
$-2,\overline{75}$ se encuentra entre -2,76 y -2,75

- a) -0,7 e) $-0,\overline{8}$ i) $0,\overline{10}$
b) 3,67 f) $-1,\overline{3}$ j) $5,\overline{9}$
c) $0,\overline{5}$ g) $1,\overline{7}$ k) $-0,0\overline{1}$
d) $-0,\overline{6}$ h) $-1,\overline{6}$ l) $0,0\overline{5}$

- m) $-0,\overline{10}$ p) $-1,\overline{01}$ s) $-0,8\overline{08}$
n) $0,\overline{56}$ q) $-2,\overline{36}$ t) $-2,30\overline{3}$
o) $2,0\overline{3}$ r) $12,3\overline{4}$ u) $-18,2\overline{14}$

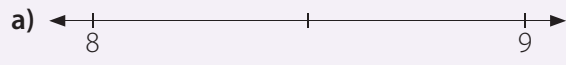
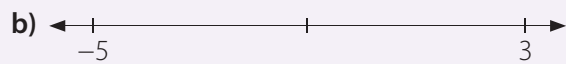
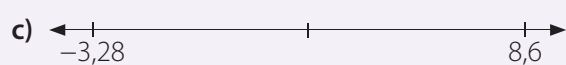
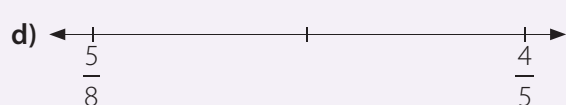
7. Identifica y escribe el número que se ubica en la posición marcada en la recta numérica.



- a) 
- b) 
- c) 
- d) 
- e) 
- f) 
- g) 
- h) 
- i) 

Aplico

8. Calcula el número que se encuentra a la misma distancia de los números ubicados en la recta numérica.

- a) 
- b) 
- c) 
- d) 

9. Resuelve los siguientes problemas.

- a) Se estima que la Tierra tiene aprox. 4600 millones de años de antigüedad. Actualmente vivimos en lo que se llama el eón Fanerozoico que constituye alrededor de $\frac{7}{60}$ del tiempo de existencia de la Tierra. El primer eón llamado Hadeano constituye aprox. 0,175 del tiempo de existencia de la Tierra. ¿Qué eón representa más tiempo?
- b) Carla va a la feria, una vez por semana, para abastecerse de frutas y verduras. La tabla muestra la masa del carro que cargó en un mes luego de ir a la feria.

N° de semana	Masa (kg)
1	20,5
2	$\frac{77}{4}$
3	18,2
4	$20\frac{1}{4}$

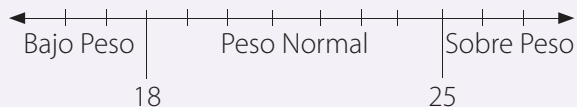
- Representa en una recta numérica las masas del carro que cargó Carla durante el mes.
 - ¿En qué semana, Carla cargó con menos masa en su carro luego de ir a la feria?
 - Si el carro soporta a lo más 20 kg, ¿en cuántas semanas sobrepasó esa masa?
- c) El IMC (índice de masa corporal) se utiliza como indicador de sobrepeso y obesidad de una persona, y se calcula mediante la expresión:
- $$\text{IMC} = \frac{\text{Masa}}{\text{Estatura}^2}$$
- donde la masa se mide en kilogramos y la estatura en metros.

Completa la tabla utilizando la información anterior.

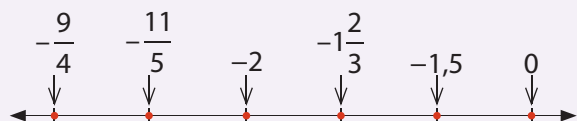
Nombre	Masa (kg)	Estatura (m)	IMC
Carla	45,3	1,60	
Ignacio	76,5	1,72	
Tomás	68,8	1,76	

- Representa en una recta numérica las masas de las personas.

- Representa en una recta numérica las estaturas de las personas.
- Representa en la siguiente recta numérica el IMC de cada persona.



- Según su IMC, ¿qué personas puedes clasificar con peso normal?
 - Según su IMC, ¿qué personas puedes clasificar con bajo peso?
 - Según su IMC, ¿qué personas puedes clasificar con sobrepeso?
10. **Conecta.** Al construir distintos tipos de gráficos, estos están formados por dos rectas numéricas que se intersectan. En ellos, ¿puedes representar números racionales? Justifica.
11. **Descubre el error.** ¿Cuál es el error cometido en la representación de los siguientes números racionales en la recta numérica: $-\frac{9}{4}$; $-1\frac{2}{3}$; -2 ; $-1,5$; $-\frac{11}{5}$?



12. **Describe el procedimiento.** ¿Cómo se representan en la recta numérica las temperaturas registradas en la tabla? Descríbelo.

Día	Temperatura (°C)
Lunes	-2,6
Martes	-3
Miércoles	-3,5
Jueves	1,8
Viernes	2,4

13. **Argumenta.** ¿Es posible ubicar en la recta numérica un número decimal periódico entre dos números enteros dados? Justifica tu respuesta.

Integro

- ¿Por qué piensas que es importante representar gráficamente los números racionales? Ejemplifica con dos situaciones.

Refuerzo

- Ubica 3 números racionales con dos decimales en la recta numérica, que estén entre 0 y 1.
- Ubica 3 números racionales con dos decimales en la recta numérica, que estén entre -1 y 0.



Caracterizar los números racionales (lecciones 1 y 2).

1 Identifica si los problemas tienen solución en los enteros o en los racionales y resuélvelos.

- Un litro de bebida se reparte completamente en 4 envases pequeños, llenando cada uno de ellos. ¿Cuántos milímetros cúbicos de bebida llenan cada envase?
- Una panadera reparte diariamente 50 kg de pan entre 20 almacenes de manera equitativa. ¿Cuántos kilogramos de pan recibe cada almacén?
- En una fábrica se elaboran 200 cajas de leche en una hora. ¿Cuántas cajas de leche se elaborarán en 5 horas y media?
- Marcos tiene recomendado tomar media pastilla en la mañana y media pastilla en la tarde, para controlar la hipertensión arterial. ¿Cuántas pastillas toma Marcos en 15 días?
- El perímetro de un rectángulo es de 23 cm. Si el largo del rectángulo es el triple del ancho, ¿cuál es su área?
- Nicole y dos amigos diseñan una maqueta en 5 horas. ¿Cuántas horas demorarán si trabajan 5 personas en la maqueta?

2 Evalúa si las proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F). Justifica las falsas.

- _____ -5 pertenece al conjunto de los números naturales.
- _____ -18 pertenece al conjunto de los números enteros.
- _____ $\sqrt{2}$ pertenece al conjunto de los números racionales.
- _____ $\sqrt{25}$ pertenece al conjunto de los números racionales.
- _____ El conjunto de los números naturales es un subconjunto de los números enteros negativos.
- _____ $\frac{1}{2}$ pertenece al conjunto de los números enteros.
- _____ -0,5 no pertenece al conjunto de los números enteros.
- _____ El conjunto de los números enteros es un subconjunto de los números racionales.

3 Identifica si los siguientes números son racionales. De ser así, exprésalos como fracción.

- | | |
|-----------------|-----------------|
| a. 1 | e. 0,001 |
| b. 5,96333... | f. 26,07 |
| c. -25 | g. 3,1415... |
| d. -2,122322... | h. -13,55555... |

4 Analiza cómo Juan justifica la igualdad

$$a, \overline{b\overline{c}} = \frac{abc - ab}{90}.$$

$$\text{Sea } x = a, \overline{bcccc\dots}$$

$$10 \cdot x = ab, \overline{cccc\dots}$$

$$1000 \cdot x = abcc, \overline{ccc\dots}$$

$$1000x - 10x = abcc, \overline{ccc\dots} - ab, \overline{cccc\dots}$$

$$990x = abcc - ab$$

$$x = \frac{abcc - ab}{990}$$

¿Es correcto el procedimiento que realizó Juan?
¿Por qué?

5 Justifica las igualdades utilizando lo anterior.

- $0, \overline{a} = \frac{a}{9}$
- $0, a\overline{b} = \frac{a(b-1)}{90}$
- $0,00\overline{ab} = \frac{ab}{9900}$
- $0,0b\overline{c} = \frac{b(c-1)}{900}$

6 Comprueba las igualdades si:

$$r = -1, \overline{16}; s = 1, \overline{1} \text{ y } t = -0, \overline{1}$$

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| a. $r \cdot s = \frac{35}{27}$ | c. $r \cdot t = -\frac{7}{60}$ |
| b. $s \div t = -\frac{100}{9}$ | d. $\frac{r \cdot s}{t} > -3$ |

- 7** Calcula las siguientes divisiones, e identifica si se obtiene un entero, decimal finito, periódico o semiperiódico. Luego relaciona el resto obtenido con el cociente y responde las preguntas.

$6 \div 2 =$	$15 \div 3 =$	$14 \div 7 =$
$5 \div 2 =$	$28 \div 8 =$	$13 \div 2 =$
$17 \div 3 =$	$25 \div 3 =$	$11 \div 9 =$
$1 \div 6 =$	$5 \div 6 =$	$35 \div 6 =$

- ¿Cómo es el resto de las divisiones en la primera fila? ¿Cómo es el cociente?
- ¿Qué sucede con el resto de las divisiones de la segunda fila? ¿Qué tipo de decimal es el cociente?
- ¿Qué sucede con el resto de las divisiones de la tercera fila? ¿Qué tipo de decimal es el cociente?
- ¿Qué sucede con el resto de las divisiones de la cuarta fila? ¿Qué tipo de decimal es el cociente?

Formular estrategias para comparar y representar en la recta numérica números racionales (lecciones 3 y 4).

- 8** Representa gráficamente en la recta numérica.

- $\frac{6}{7}$
- $\frac{7}{2}$
- $\frac{1}{5}$
- $\frac{5}{8}$
- $\frac{1}{8}$
- $\frac{3}{10}$

- 9** Ordena los números racionales de menor a mayor.

- $0,032; 0,03\bar{2}; 0,0\bar{32}; 0,\bar{032}; 0,320$
- $\frac{3}{4}; 0,7\bar{5}; 7\frac{5}{9}; 1,7\bar{5}; \frac{7}{4}$
- $1\frac{125}{999}; \frac{9}{8}; \frac{557}{495}; \frac{1}{8}; \frac{1013}{900}$

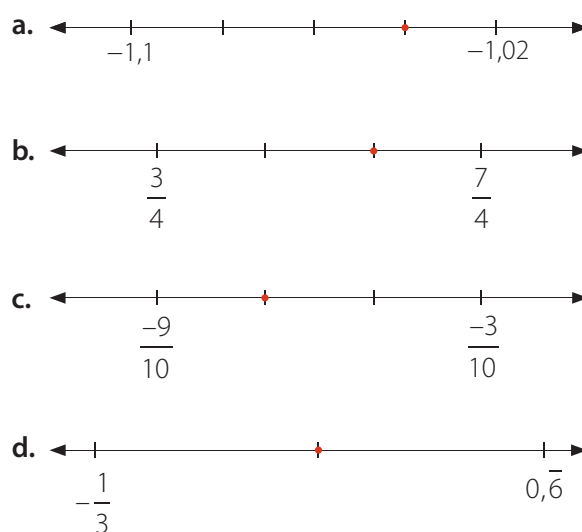
- 10** Identifica los conjuntos numéricos a los que pertenece cada uno de los siguientes números y represéntalos en la recta numérica.

- 3
- 0
- 2
- 0,9
- $-\frac{1}{3}$
- $\frac{3}{4}$
- $-0,\bar{8}$
- $\sqrt{9}$
- $-\frac{15}{3}$

- 11** Evalúa la relación de orden y marca la fracción que corresponda a cada intervalo.

	Intervalo numérico	$\frac{a}{b}$		
a.	$\frac{a}{b} < -1$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$
b.	$-1 < \frac{a}{b} < 0$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$
c.	$0 > \frac{a}{b} > -1$	$-\frac{3}{6}$	$\frac{6}{-3}$	$\frac{3}{6}$
d.	$1 < \frac{a}{b}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{5}{8}$	$-\frac{5}{8}$

- 12** Identifica y escribe el número que se ubica en la posición marcada en la recta numérica.



Palabras clave

- Adición y sustracción de números racionales.
- Multiplicación y división de números racionales.

¿Cómo resolver operaciones con números racionales?

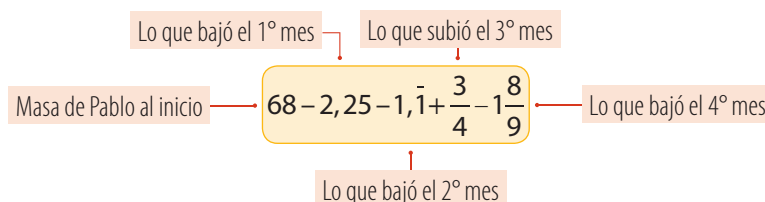
- Las propiedades en las operaciones de números enteros, decimales y fracciones positivas, ¿se cumplirán en el conjunto de los números racionales?

Ejemplo 1: Adición y sustracción de números racionales

Pablo siguió el programa "Elige Vivir Sano" del Ministerio de Salud y el primer mes bajó 2,25 kg; el segundo, $1,1$ kg; el tercer mes subió $\frac{3}{4}$ kg y el cuarto mes perdió $1\frac{8}{9}$ kg. Si su masa era de 68 kg, ¿con cuántos kilogramos quedó después del cuarto mes?

Para sumar o restar números racionales puedes realizar lo siguiente:

Paso 1 ➤ Plantear las adiciones y sustracciones involucradas en el problema.



Paso 2 ➤ Como hay números decimales periódicos involucrados, resulta pertinente transformar los decimales a fracción.

$$\begin{aligned}
 68 - 2\frac{1}{4} - \frac{10}{9} + \frac{3}{4} - 1\frac{8}{9} &= 68 - \frac{9}{4} + \frac{3}{4} - \frac{10}{9} - \frac{17}{9} \\
 &= 68 + \frac{(-9)+3}{4} + \frac{(-10)-17}{9} \\
 &= 68 + \frac{(-6)}{4} + \frac{(-27)}{9} \\
 &= 68 + \frac{(-6)}{4} - 3 = 65 + \frac{(-6)}{4} \\
 &= \frac{260}{4} + \frac{(-6)}{4} = \frac{260-6}{4} \\
 &= \frac{254}{4} = \frac{127}{2} = 63\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Al sumar o restar fracciones de igual denominador se suman o restan los numeradores.

La fracción $\frac{-27}{9}$ equivale al entero -3 .

El entero 65 equivale a la fracción $\frac{260}{4}$.

Relaciona

- ¿Por qué $\frac{65}{1} = \frac{260}{4}$?
- ¿Es cierto que $\frac{(-6)}{4} = -\frac{6}{4}$?
- ¿Por qué?

Observa

Verifica el resultado usando la calculadora, para ello usa la tecla:

a b/c para colocar fracciones.

En resumen

Para **sumar y restar números racionales** se puede utilizar su representación fraccionaria o decimal. Sin embargo, debes transformar los números decimales infinitos periódicos o semiperiódicos a fracción para operarlos con otro número racional. En $\mathbb{Q}$ la adición cumple con las propiedades de conmutatividad, asociatividad, existencia de un único elemento neutro aditivo y un elemento inverso aditivo.



Camaleón

Ejemplo 3: División de números racionales

Un camaleón pesa en la Tierra $4\frac{9}{10}$ kg $\cdot$ m/s² y en la Luna, $\frac{49}{60}$ kg $\cdot$ m/s². ¿Cuál es el promedio de su peso en ambos lugares?

Para calcular el peso promedio del camaleón se puede:

Paso 1 ➔ Sumar ambos pesos.

$$\frac{49}{10} + \frac{49}{60} = \frac{294 + 49}{60} = \frac{343}{60}$$

La fracción $\frac{49}{10}$ se amplifica por 6, quedando la fracción $\frac{294}{60}$.

Relaciona

- ¿Por qué $\frac{343}{60}$ no se transformó en decimal para dividirse en 2?
- ¿A qué número decimal corresponde el peso del camaleón?

Paso 2 ➔ Dividir en 2 el resultado anterior.

$$\begin{aligned} \frac{343}{60} \div 2 &= \frac{343}{60} \div \frac{2}{1} \\ &= \frac{343}{60} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{343}{120} = 2\frac{103}{120} \end{aligned}$$

El entero 2 es equivalente a la fracción $\frac{2}{1}$.

Para dividir fracciones se multiplica el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor.

El camaleón pesa en promedio $2\frac{103}{120}$ kg $\cdot$ m/s² entre la Tierra y la Luna.

Razona y comenta

- ¿Cuál es la propiedad de la división que se cumple solo en el conjunto de los números racionales?
- ¿ $\frac{2}{3} \div \frac{1}{2}$ es lo mismo que $2 \cdot \frac{2}{3}$? ¿Por qué? Justifica tu respuesta.
- ¿Cuál es la diferencia en los procedimientos para multiplicar y dividir fracciones?

En resumen

Para **multiplicar y dividir números racionales** se puede utilizar su representación fraccionaria o decimal. Sin embargo, debes transformar los números decimales infinitos periódicos o semiperiódicos a fracción para operarlos con otro número racional. En $\mathbb{Q}$ la multiplicación cumple con las siguientes propiedades conmutativa, asociativa, elemento neutro multiplicativo, elemento inverso multiplicativo y distributiva de la multiplicación con respecto a la adición.

Repaso

1. **Calcula** las siguientes operaciones con números enteros.

a) $(-2) + 5$

d) $(-2) + 9 - 5$

g) $30 - 50 - 80$

j) $56 - 2 \cdot 5$

b) $(-56) + 38$

e) $103 - (1 + 63)$

h) $(-25) \div 5$

k) $12 - 9 + 5 \cdot (-4)$

c) $26 + (-31)$

f) $(-5) \cdot 6$

i) $(-84) \div (-3)$

l) $(-1) + (1 - 1) \cdot (-1)$

2. **Calcula** las siguientes operaciones con números decimales. Puedes utilizar la calculadora.

- a) $0,1 + 0,3$ e) $0,3 \cdot 1,4$
 b) $3,20 + 5,16$ f) $5,25 \cdot 2,3$
 c) $5,1 + 1,3 - 4,6$ g) $8,2 \div 6,4$
 d) $6,8 - 3,12 + 0,2$ h) $2,65 \div 1,62$

3. **Calcula** las siguientes operaciones con fracciones. Utiliza la calculadora.

- a) $\frac{5}{8} + \frac{9}{2}$ c) $\frac{10}{3} + \frac{9}{8} - \frac{1}{24}$ e) $1\frac{2}{3} \cdot \frac{13}{5}$
 b) $\frac{7}{5} - \frac{1}{3}$ d) $\frac{7}{2} \cdot \frac{9}{5}$ f) $\frac{2}{9} \div \frac{6}{12}$

Práctica guiada

4. **Calcula** las adiciones y sustracciones de números racionales. Simplifica si es posible y verifica tus resultados con la calculadora.

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{9+10-6}{15} = \frac{13}{15}$$

- a) $\left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{3} + \frac{14}{3}$ j) $\frac{1}{7} + \frac{3}{2} - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right)$
 b) $\frac{3}{8} + \frac{1}{8} - \frac{7}{8}$ k) $0,3 + 0,8$
 c) $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{6}{4}$ l) $0,15 - 0,23$
 d) $\frac{1}{2} + \frac{5}{2} - \left(\frac{4}{2} - \frac{7}{2}\right)$ m) $(-0,16) - 5,14$
 e) $\frac{1}{7} - \left(\frac{3}{7} + \frac{10}{7}\right) + \frac{6}{7}$ n) $5,89 - 0,9$
 f) $\frac{4}{5} + \frac{16}{12}$ o) $0,1 + 3,58 - 15,39$
 g) $\left(-\frac{5}{6}\right) + \frac{5}{2}$ p) $13,5 - 38,7 - 89,2$
 h) $\frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{2}{3}$ q) $5,956 + (9,85 - 2)$
 i) $\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{5}{7} - \frac{11}{5}$ r) $(-9,001) - (18,6 + 1,1)$

5. **Calcula** las operaciones combinadas. Verifica tus resultados con la calculadora.

$$0,1 - \frac{2}{3} + 0,4\bar{3} = \frac{1}{9} - \frac{2}{3} + \frac{13}{30} = \frac{10-60+39}{90} = -\frac{11}{90}$$

- a) $1,24 - 0,31$
 b) $7,2 - (7,2 + 0,2)$
 c) $\left(1,7 - \frac{2}{9}\right) - \left(\frac{1}{6} + 0,34\right)$
 d) $0,1 - 3,41 + 5,2$
 e) $\left(\frac{1}{11} - 0,26\right) - ((-1,06) + 1,3)$
 f) $2,5 + \frac{1}{3} - \left(7,1 - \frac{1}{5}\right)$

6. **Analiza** cada igualdad. Luego, complétala con la fracción correspondiente.

$$\frac{2}{5} + \frac{7}{20} = \frac{3}{4}$$

- a) $\left(-1\frac{1}{2}\right) - 5\frac{4}{5} = \boxed{} + \frac{1}{4}$
 b) $\frac{0}{5} + \frac{3}{8} = \boxed{} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right)$
 c) $\left(-\frac{9}{4}\right) + \left(-\frac{7}{8}\right) = \boxed{} + \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{16}\right)$

7. **Calcula** las multiplicaciones de números racionales. Simplifica si es posible y verifica tus resultados con la calculadora.

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 5} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

- a) $\frac{81}{4} \cdot \frac{16}{3}$ g) $0,6 \cdot 1,5$
 b) $\left(-\frac{25}{36}\right) \cdot \frac{64}{125}$ h) $3,2 \cdot (-0,8)$
 c) $\frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$ i) $(-4,25) \cdot (-6,3)$
 d) $\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$ j) $60,05 \cdot (3 \cdot (-0,2))$
 e) $\left(-1\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)$ k) $(-1,1) \cdot (-7,2) \cdot (-3)$
 f) $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot (-8)$ l) $(-20,6) \cdot 5,3 \cdot 2,0\bar{2}$

- 8. Calcula** las divisiones con números racionales. Simplifica si es posible y verifica tus resultados con la calculadora.

$$\frac{1}{3} \div \frac{1}{9} = \frac{1}{3} \cdot 9 = \frac{9}{3} = 3$$

- a) $\left(-\frac{4}{9}\right) \div \frac{8}{16}$ g) $(-1,5) \div 0,3$
 b) $\left(-\frac{23}{6}\right) \div \frac{50}{8}$ h) $2,8 \div (-1,0\bar{4})$
 c) $\left(-\frac{5}{3}\right) \div \left(-\frac{4}{8}\right)$ i) $(-45,5) \div (-0,5)$
 d) $\frac{2}{5} \div 2$ j) $4,4\bar{6} \div (-0,02)$
 e) $3 \div \left(-\frac{9}{5}\right)$ k) $(4 \div (-3,8)) \div (-2,9)$
 f) $\frac{8}{7} \div \left(9 \div \left(-\frac{1}{3}\right)\right)$ l) $2,2\bar{1} \div 9,6 \div (-0,6)$

- 9. Calcula** las operaciones combinadas de números racionales. Puedes utilizar la calculadora.

$$(-3) \cdot \frac{11}{3} \cdot 3 \cdot \frac{3}{11} = \left(-\frac{3}{1}\right) \cdot \frac{11}{3} \cdot \frac{36}{11} = -\frac{3 \cdot 11 \cdot 36}{3 \cdot 11} = -\frac{1188}{33} = -36$$

- a) $1\frac{1}{2} \div 5\frac{3}{8}$
 b) $\frac{21}{2} \cdot \left(-\frac{3}{49}\right) \cdot \frac{1}{9}$
 c) $\left(5\frac{1}{4} \div \frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)$
 d) $\left(6 - \frac{3}{5}\right) \div 5\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{10} \cdot \frac{2}{11}\right)$
 e) $3,5 \div (-2,3) \cdot 2,6$
 f) $(5,01 \cdot 0,100) \div 0,003$
 g) $\frac{3,4 \div 0,34}{(-0,10)}$
 h) $\frac{(-5,78) \div (-0,02)}{3,25}$

Aplico

- 10. Analiza** la tabla. Luego, completa.

$a > 0 > b > c$	Signo del producto	$a > b > 0 > c$	Signo del producto	$0 > a > b > c$	Signo del producto
$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{b}$		$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}$		$\frac{c}{b} \cdot \frac{a}{b \cdot c}$	
$\frac{a \cdot b}{c} \cdot \frac{b \cdot c}{a}$		$\frac{a}{b \cdot c} \cdot \frac{b}{c \cdot a}$		$\frac{a \cdot c}{b} \cdot \frac{c}{b}$	

- 11. Verifica** si se cumplen las siguientes propiedades para la adición de números racionales.

- a) Propiedad conmutativa: $a + b = b + a$; $a, b \in \mathbb{Q}$.
 b) Propiedad asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$; $a, b, c \in \mathbb{Q}$.
 c) Elemento neutro: $a + 0 = 0 + a$; $a \in \mathbb{Q}$.

- 12. Resuelve** los siguientes problemas.

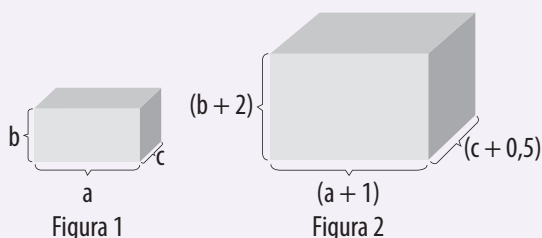
- a) El precio del dólar es de \$504,3. ¿A cuánto dinero equivalen 7,5 dólares?
 b) ¿Cuántos octavos hay en 9,5 kg de té?
 c) ¿Cuántos tercios hay en $\frac{20}{5}$ kg de almendras?
 d) ¿Cuántos metros cuadrados tiene un terreno rectangular de $\frac{60}{7}$ m de largo y $\frac{40}{9}$ m de ancho?
 e) La madre de Camilo le legó $\frac{5}{4}$ de la tercera parte del terreno que recibió su hermana. ¿Qué fracción del terreno recibirá Camilo?
 f) Si el terreno heredado en el ejercicio anterior corresponde a 50 000 hectáreas, ¿cuántas hectáreas recibirá Camilo?
 g) Si tres cuartos de kilogramos de manzanas tienen un valor de \$862, ¿cuál es precio de medio kilogramo?
 h) Un cuarto de kilogramo de queso es dividido en trozos de 0,025 kg. ¿Cuántos trozos de queso se obtuvieron?
 i) Una jarra con capacidad de $3\frac{1}{2}$ litros llena de jugo se reparte en vasos de $\frac{1}{4}$ litro. ¿Cuántos vasos se pudieron llenar con esa capacidad?

- j) Don Elías reparte $3\frac{1}{5}$ kg de alimento entre los animales de su granja. Si cada uno come $\frac{8}{15}$ kg de alimento, ¿cuántos animales hay en su granja? ¿Cuánto alimento necesitaría si la cantidad de animales se duplicara?

- k) Las aristas de la figura 1 miden:

$$a = \frac{1}{2} \text{ m}, b = \frac{2}{3} \text{ m} \text{ y } c = \frac{7}{2} \text{ m}$$

¿Cuáles son los volúmenes de las figuras 1 y 2?
¿Cuántas veces puede contener como máximo la figura 2 a la figura 1?



- l) En la cuenta de una casa comercial, al no pagar en la fecha correspondiente, se aplicará un interés de 6% por cada peso impago que deberá ser cancelado el próximo mes. Si una persona no pagó su cuenta en la fecha y el monto corresponde a \$4500, ¿cuánto dinero más tendrá que pagar el próximo mes?
- m) Un quinto del tiempo libre que tiene Lucía lo dedica al deporte, un tercio a las salidas con amigos y un cuarto lo dedica a escuchar música. Si quisiera agregar otra actividad extraprogramática, ¿qué fracción de tiempo le queda?
- n) Jorge ahorra monedas de \$1 y \$5. Se sabe que $\frac{2}{9}$ de las monedas ahorradas corresponden a monedas de \$1 y el resto son de \$5. Si en total tiene 13 500 monedas, ¿cuántas monedas de \$5 tiene? ¿Cuál es el monto ahorrado por Jorge?

- o) Mariela lleva un conteo promedio de las personas que viajan en su bus. Ella sabe que $\frac{3}{5}$ de las personas que viajan, lo hacen durante la mañana y $\frac{1}{4}$ de las personas que viajan el resto del día, $\frac{1}{4}$ hace de noche. Si un día jueves viajan entre 500 y 1000 personas, ¿cuántas personas como mínimo y como máximo no viajan durante la mañana?

13. **Conecta.** ¿Cuál es la solución de la siguiente ecuación?

$$x + \frac{1}{3} = 0,5 \div \frac{3}{2}$$

14. **Descubre el error.** ¿Cuál es error cometido en el desarrollo?

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{7}{5}\right) - 1, \bar{3} &= \frac{1}{5} + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{7}{5}\right) - \frac{4}{3} = \frac{19}{20} \cdot \left(-\frac{7}{5}\right) - \frac{4}{3} \\ &= \left(-\frac{133}{100}\right) - \frac{4}{3} = -\frac{799}{300} \end{aligned}$$

15. **Describe el procedimiento.** Describe paso a paso cómo resolverías la siguiente operación combinada:

$$\left(\frac{4}{5} - \frac{8}{3} \div 1, \bar{16}\right) \cdot 0, \bar{12} + 1\frac{5}{8}$$

16. **Argumenta.** ¿Para todo a, b y $c \in \mathbb{Q}$ se cumple que $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$?

17. **Crea.** Inventa un problema cuya solución se calcule con la operación $1\frac{1}{2} \div \frac{1}{8}$.

18. **Desafío.** Dos amigos se disponen a comer unos pasteles. El primero tiene 5 pasteles y el segundo 3. Cuando van a comenzar a comer llega un tercer amigo, sin pastel alguno, y les dice: "¿qué les parece si repartimos sus 8 pasteles de manera equitativa y a cambio yo les doy \$800 y ustedes se reparten el dinero de una manera que encuentren justa?". Los dos amigos se miraron y aceptaron.

¿Cómo repartieron los \$800 los dos amigos?

Integro

- ¿Cuál es la importancia del inverso multiplicativo en la operatoria con números racionales? Investiga por qué también se le llama recíproco.
- Al operar con números decimales periódicos o semiperiódicos, ¿qué estrategias se pueden utilizar? Describe dos.
- ¿Cuál es la importancia de la calculadora en la operatoria con números racionales? Explica.

Refuerzo

- Si se dividiera $\frac{1}{3}$ de una torta entre tres amigos, ¿cuánto recibiría cada uno?
- Describe el procedimiento para calcular $4,5 \cdot \frac{1}{9}$.
- Al calcular $\left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right)$, ¿qué signo tendrá el resultado?

Palabras clave

- Clausura.
- Operaciones en los números racionales.

Repasa

$$\left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{3} = \frac{(-9)+4}{12} = -\frac{5}{12}$$

$$\frac{5}{8} \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) = \left(-\frac{15}{56}\right)$$

$$\left(-\frac{4}{9}\right) \div \left(-\frac{8}{12}\right) =$$

$$= \left(-\frac{4}{9}\right) \cdot \left(-\frac{12}{8}\right)$$

$$= \frac{\cancel{(-4)}^1 \cdot \cancel{(-12)}^4}{\cancel{9}_3 \cdot \cancel{8}_2}$$

$$= \frac{(-1) \cdot (-4)}{3 \cdot 2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

¿Qué es la propiedad de Clausura?

- Al restar dos números naturales, ¿siempre se obtiene un número natural? ¿Por qué? Ejemplifica.
- Al dividir dos números enteros, ¿siempre se obtiene un número entero? ¿Por qué? Ejemplifica.

Taller

Reúnanse en parejas y realicen las actividades. Comparen sus resultados con otras parejas.

1. Encuentren un ejemplo en que la resta de dos números naturales no sea un número natural.
2. Encuentren un ejemplo en que la división de dos números enteros no sea entera.
3. Encuentren un ejemplo en que la suma entre dos fracciones sea un número entero.
4. Encuentren un ejemplo en que la multiplicación entre dos fracciones sea un número entero.
5. Encuentren un ejemplo en que la división entre dos fracciones sea un número entero.
6. Observen la siguiente operación definida en los números naturales:

Para $a, b \in \mathbb{N}$, se define la operación ($\heartsuit$) como $a \heartsuit b = 2a - 3b$.

Por ejemplo: 8 y $5 \in \mathbb{N}$, si se calcula $8 \heartsuit 5$ se obtiene que:

$$8 \heartsuit 5 = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 5 = 16 - 15 = 1$$

Luego, $1 \in \mathbb{N}$.

- a) Calculen $9 \heartsuit 4$, $3 \heartsuit 5$, $10 \heartsuit 3$ y $2 \heartsuit 8$.
- b) Al aplicar la operación $\heartsuit$, ¿siempre se obtiene un número natural?
- c) La operación $\heartsuit$, ¿es cerrada en los números naturales?

Razonen

y comenten

- ¿Existe un ejemplo en que al sumar o restar dos números racionales no se obtenga un número racional? ¿Por qué?
- ¿Existe un ejemplo en que al multiplicar o dividir dos números racionales no se obtenga un número racional? ¿Por qué?
- La adición, sustracción, multiplicación y división, ¿cumplen la propiedad de clausura en los números racionales?

En resumen

En el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, las operaciones de adición, multiplicación, sustracción y división (con divisor distinto de cero) cumplen con la propiedad de **clausura**, es decir, al operar con números racionales siempre se obtendrá otro número racional.

Repaso

1. **Calcula** las operaciones entre números naturales e **identifica** si el resultado es un número natural.

- a) $3 + 5$ e) $4 - 2$
 b) $25 - 3$ f) $5 - 9$
 c) $55 - 36$ g) $8 - 5 + 3$
 d) $150 + 235 - 450$ h) $9 + 8 - 19$

2. **Calcula** las divisiones de números enteros e **identifica** si el resultado es un número entero.

- a) $(-25) \div (-5)$ e) $(-1232) \div 22$
 b) $56 \div (-4)$ f) $1542 \div (-35)$
 c) $87 \div 3$ g) $(-2496) \div (-26)$
 d) $45 \div 6$ h) $(-5987) \div 12$

Práctica guiada

3. **Analiza** las siguientes situaciones.

Encuentra dos números enteros cuyo producto sea un número natural par.

$$(-2) \cdot (-4) = 8 \in \mathbb{N}$$

- a) Encuentra dos números racionales cuyo producto sea un número natural.
 b) Encuentra dos números racionales cuyo cociente sea cero.
 c) Encuentra dos números enteros cuyo cociente sea un número decimal semiperiódico.

Aplico

4. **Evalúa** si las siguientes operaciones cumplen con la propiedad de clausura en el conjunto en el que están definidas.

- a) Se define la operación λ para $a, b \in \mathbb{N}$, como:
 $a \lambda b = 3a - 4b$

Integro

- En los números naturales, ¿qué operación cumple la propiedad de clausura? ¿Y en los números enteros? ¿Por qué?
- Si la adición es cerrada en un conjunto numérico, ¿se puede afirmar, sin necesidad de comprobarlo, que la sustracción también es cerrada? ¿Por qué?
- ¿Por qué es importante comprender que las operaciones en los números racionales cumplen la propiedad de clausura?

- b) Se define la operación $\cup$ para $u, v \in \mathbb{Z}$, como:

$$u \cup v = u - v \cdot u + v$$

- c) Se define la operación $\star$ para $r, s \in \mathbb{Z}$, como:

$$r \star u = (r + u) - u$$

5. **Analiza** la siguiente afirmación. Luego responde.

$$a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a \div b = k; k \in \mathbb{Q}$$

- a) Traduce a lenguaje natural la afirmación propuesta.
 b) Da tres ejemplos en los que se cumpla la afirmación.
 c) ¿Es verdadera la afirmación propuesta para cualquier par de números racionales? Fundamenta.

6. **Evalúa** las siguientes afirmaciones. Si la afirmación es falsa indica un contraejemplo.

- a) La adición es cerrada en los números naturales.
 b) La división es cerrada en los números naturales.
 c) La multiplicación es cerrada en los números naturales.
 d) La sustracción es cerrada en los números naturales.
 e) La sustracción es cerrada en los números enteros.
 f) La división es cerrada en los números enteros.
 g) La multiplicación es cerrada en los números enteros.

7. **Descubre el error.** ¿Cuál es el error en la siguiente afirmación?

"Si $r, u \in \mathbb{Z}$, entonces, la operación $r \odot u = \frac{r}{u} \cdot \frac{u}{r} + \frac{u}{r}$ es cerrada en $\mathbb{Z}$ ".

8. **Argumenta.** Claudia afirma que si se dividen dos números naturales pares, el cociente entre ellos es un número natural. ¿Es correcto lo que ella afirma? Justifica tu respuesta.

Refuerzo

1. La operación $a \clubsuit b = a + b - a \cdot b$, ¿es cerrada en los números naturales?
 2. La operación $a \spadesuit b = (a - b) \cdot (a + b)$, ¿es cerrada en los números enteros?
 3. La operación $c \oslash d = \frac{c}{d} - c$, ¿es cerrada en los números racionales?

Palabra clave

Densidad.

¿Por qué los números racionales son densos?

- Si te preguntaran: ¿Cuántos números naturales hay entre 1 y 2? ¿Y cuántos números enteros hay entre -5 y -4? ¿Qué considerarías para responder estas preguntas?

Taller

Reúnanse en parejas y sigan las instrucciones.

1. Elijan dos números enteros positivos **a** y **b** tal que $a < b$. Por ejemplo, 2 y 3.
2. Ubíquenlos en la recta numérica.
3. Calculen el promedio **d** entre **a** y **b** y ubíquelo en la recta numérica. Por ejemplo, el promedio entre 2 y 3 es $(2 + 3) \div 2 = 2,5$, por lo tanto $d = 2,5$.
4. Calculen el promedio entre **a** y **d** y entre **d** y **b** y estimen su ubicación en la recta numérica.
5. Repitan las cuatro instrucciones anteriores para dos números enteros negativos.
6. Repitan las cuatro primeras instrucciones para dos números racionales no enteros.

Razonen

y comenten

- ¿Podrían seguir encontrando números racionales entre los números enteros dados al inicio?
- ¿Cuántos números racionales, por lo menos, hay entre dos números racionales?
- ¿Siempre se puede encontrar un número racional entre dos números racionales? ¿Por qué?
- ¿Cuántos números racionales hay en total entre los números enteros dados al inicio? ¿Es posible calcularlo?
- Vuelve a responder la pregunta inicial. ¿Cambió tu respuesta?

En resumen

El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ cumple con la propiedad de la **densidad**, ya que entre dos números racionales existen infinitos números racionales.

Repaso

1. **Calcula** el antecesor y sucesor de los siguientes números naturales.

- | | | | |
|-------|-------|--------|---------|
| a) 8 | c) 51 | e) 150 | g) 1200 |
| b) 28 | d) 79 | f) 600 | h) 7990 |

2. **Encuentra** un número natural entre cada par de números.

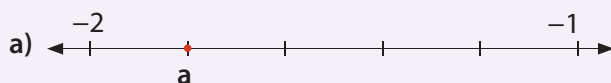
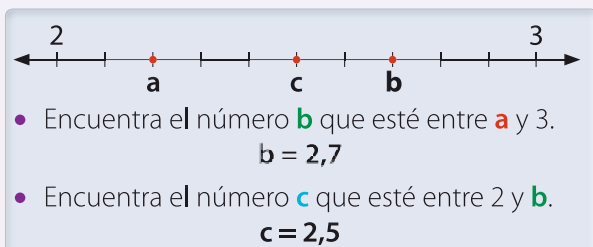
- | | |
|-------------|--------------|
| a) 5 y 7 | c) 46 y 72 |
| b) 96 y 103 | d) 165 y 178 |

3. **Identifica** un número entero entre cada par de números.

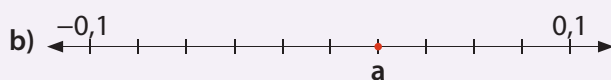
- a) 9 y 12 f) -250 y -248
 b) -1 y 1 g) -47 y -45
 c) -5 y 6 h) -150 y -111
 d) -16 y 0 i) -35 y -29
 e) 0 y 7 j) -100 y 98

Práctica guiada

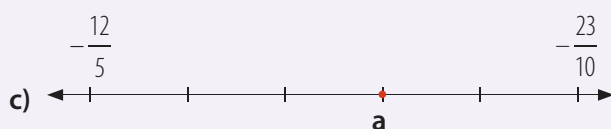
4. **Analiza** las rectas numéricas y luego responde.



- Encuentra el número **b** que esté entre **a** y -1.
- Encuentra el número **c** que esté entre -2 y **b**.



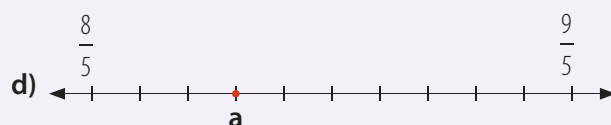
- Encuentra el número **b** que esté entre **a** y 0,1.
- Encuentra el número **c** que esté entre -0,1 y **b**.



- Encuentra el número **b** que esté entre **a** y $-\frac{12}{5}$.
- Encuentra el número **c** que esté entre $-\frac{23}{10}$ y **b**.

Integro

- ¿Son densos los números naturales? ¿Y los números enteros? ¿Por qué?
- ¿Por qué es importante comprender que los números racionales son densos?
- Imagina que los números racionales son puntos geométricos en una línea recta que representa la recta numérica. ¿La línea recta queda totalmente completa con estos números o quedarían espacios sin rellenar?



- Encuentra el número **b** que esté entre **a** y $\frac{9}{5}$.
- Encuentra el número **c** que esté entre $\frac{8}{5}$ y **b**.

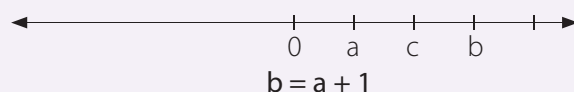
5. **Calcula** un número racional entre los dados, utilizando la propiedad $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

$$\frac{1}{8} y \frac{3}{4} \rightarrow \frac{1}{8} < \frac{1+3}{8+4} < \frac{3}{4} \rightarrow \frac{1}{8} < \frac{4}{12} < \frac{3}{4}$$

- a) $\frac{1}{4} y \frac{3}{10}$ b) $-\frac{5}{8} y -\frac{1}{2}$ c) $3,\bar{7} y 5,8$

Aplico

6. **Analiza** la siguiente información. Luego, responde.



- a) Si **a** y **b** son números naturales, ¿**c** es un número natural?
- b) Si **a** y **b** son números enteros, ¿**c** es un número entero?
- c) Si **a** y **b** son números racionales, ¿**c** es un número entero?
- d) Determina tres posibles valores de **a**, **b** y **c** para el caso anterior.
7. **Conecta.** ¿Qué diferencias y similitudes tendrá la densidad en matemática con la densidad en física? Investiga.
8. **Descubre el error.** ¿Qué error cometió Matilde al decir que entre un millón y dos millones hay infinitos números enteros?
9. **Argumenta.** ¿Por qué en el conjunto de los números enteros no existe un número que se encuentre entre dos números consecutivos? Justifica.

Refuerzo

- Describe una estrategia distinta a la vista en la lección para encontrar un número racional entre dos números racionales dados.
- Utiliza el valor posicional para mostrar que entre 1,1 y 1,2 se encuentran los números racionales 1,11; 1,12; 1,13... etc.
- Utiliza lo anterior para determinar 10 números decimales entre 2,1 y 2,2.

Palabras clave

- Aproximación.
- Redondeo.
- Truncamiento.
- Cifras significativas.

Repasa**Redondear**

- 3601 redondeado a la **UM** resulta 4000.
- 456 redondeado a la **D** resulta 460.
- 0,19 redondeado a la **décima** resulta 0,2.
- 0,4385 redondeado a la **milésima** resulta 0,439.

¿Cómo aproximar números racionales?

- Si tu promedio es 3,966666... en una asignatura, ¿la aprobaste o no? ¿Por qué?
- ¿Cuántas cifras significativas tendrá el decimal anterior? ¿Qué consideraste como cifra significativa? Explica.

Felipe calculó su promedio y le dio 3,9 $\overline{6}$. La profesora le indicó que podía **redondear** el promedio a la décima o **truncarlo** a la misma posición. ¿Qué le conviene realizar a Felipe?

Para **aproximar por redondeo**, Felipe puede hacer lo siguiente:

- Paso 1** ➤ Identificar la posición a la que se quiere redondear, en este caso, a la décima.
- Paso 2** ➤ Considerar la cifra decimal inmediatamente siguiente a la que determine la aproximación:
- Si dicha cifra es **menor que 5**, no hay modificaciones en las cifras que se conservan.
 - Si dicha cifra es **igual o mayor que 5**, la cifra por aproximar se debe aumentar en una unidad.

Cifra de la décima

3,966666... → 4,0

Cifra mayor que 5

6 > 5 por lo tanto la cifra de la décima aumenta de 9 a 10. El resto de los decimales se transforman en 0.

Luego, el promedio de Felipe quedaría en 4,0 y aprobaría la asignatura.

Para **aproximar por truncamiento** Felipe puede realizar lo siguiente:

- Paso 1** ➤ Identificar la posición a la que se quiere truncar, en este caso a la décima.
- Paso 2** ➤ Considerar las cifras decimales hasta la posición que se determinó en el paso anterior.

Cifra de la décima

3,966666... → 3,9

No se consideran todos los decimales después del 9.

Luego, el promedio de Felipe quedaría en 3,9 y no aprobaría la asignatura. A Felipe le conviene redondear su promedio.

Otros ejemplos

- 2,7811 redondeado a la centésima es 2,78.
- 67,065 redondeado a la milésima es 67,065.
- -1,32 truncando al décima es -1,3.
- 900,7 truncado a diezmilésima es 900,7777.

En resumen

Al **aproximar** un número racional por **redondeo** o por **truncamiento**, el número resultante puede ser menor o mayor que el original; de ser menor, se dirá que la aproximación es por **defecto**; mientras que si es mayor, se dirá que es por **exceso**.

Observa

- Al redondear o truncar se comete un error que corresponde al valor absoluto de la diferencia del valor exacto y su aproximación.

- Por ejemplo:

$$|3,966666... - 4,0| = |-0,033...| = 0,033...$$

¿Cuándo una cifra es significativa?

En Química, Felipe debía medir la masa de ciertos reactivos y anotar las medidas con dos cifras significativas. ¿Qué número debería anotar Felipe para la masa de cada reactivo?

Las **cifras significativas** (c. s.) sirven para expresar cantidades correspondientes a unidades de medidas. Para determinar las **c. s.** de una medida puedes seguir los criterios:

- Todos los dígitos distintos de cero son significativos.
- Los ceros situados entre dos **c. s.** son significativos.
- Los ceros a la izquierda del primer dígito distinto de cero no son significativos.
- En los números que poseen cifras decimales, los ceros a la derecha del último dígito distinto de cero son significativos.

Al escribir las cantidades con dos cifras significativas se redondea la última **c. s.**, es decir:

2,1803 gramos tiene cinco **c. s.**, escrito con dos c. s. es 2,2 g.

0,0803 gramos tiene tres **c. s.**, escrito con dos c. s. es 0,080 g.

4,8200 tiene cinco **c. s.**, escrito con dos c. s. es 4,8 g.

Luego, Felipe debía **sumar** las masas registradas utilizando **c. s.** Para ello siguió los pasos:

Paso 1 ➤ Sumar las cantidades utilizando la calculadora.

Paso 2 ➤ Calcular la menor cantidad de cifras decimales que poseen los sumandos.

Paso 3 ➤ Escribir el resultado redondeando a la cantidad de cifras decimales determinada en el paso 2.

Por lo tanto, $2,2 + 0,080 + 4,8 = 7,08$. La menor cantidad de decimales es 1 y el resultado se expresa como 7,1 gramos.

Para **multiplicar** medidas utilizando **c. s.** se puede:

Paso 1 ➤ Multiplicar las cantidades usando la calculadora.

Paso 2 ➤ Calcular la menor cantidad de **c. s.** que poseen los factores.

Paso 3 ➤ Escribir el resultado con la cantidad de **c. s.** determinada en el paso 2.

Por ejemplo, el peso de un reactivo es $0,07 \cdot 9,8 = 0,686$. La menor cantidad de **c. s.** es **1**, por lo que el resultado se expresa como $0,7 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$.

Razona

y comenta

- Vuelve a responder las preguntas que se hicieron al inicio, ¿cambiaron tus respuestas? ¿En qué? Explica.
- Al redondear el promedio de Felipe, ¿la aproximación es por defecto o por exceso?
- Al truncar el promedio de Felipe, ¿la aproximación es por defecto o por exceso?
- ¿En qué casos se hace necesario trabajar con cifras significativas? Menciona dos situaciones.

En resumen

- Al **sumar o restar** medidas, la cantidad de decimales del resultado es igual a la menor cantidad de decimales de los términos de la operación.
- Al **multiplicar o dividir** medidas, la cantidad de **c. s.** del resultado es igual a la menor cantidad de **c. s.** de los términos de la operación.



Masa de los reactivos.

Observa

- Escribir las medidas con una cifra significativa:
 $2\text{①} \rightarrow 2$ ya que $1 < 5$
 $0,08\text{①} \rightarrow 0,08$ ya que $0 < 5$
 $4\text{①} \rightarrow 5$ ya que $8 > 5$
- Por lo tanto, las masas de los reactivos escritos con una **c. s.** son 2 g, 0,08 g y 5 g.
- Cuando las medidas se expresan en notación científica, se consideran las **c. s.** que acompañan a la potencia de 10.
 $3,45 \times 10^{-3}$ tiene 3 **c. s.**
 $5,6 \times 10^8$ tiene 2 **c. s.**

Repaso

1. **Aproxima** por redondeo los números, según la cifra que se indica.
- a) 456 a la decena
 - b) 863 a la decena
 - c) 5719 a la centena
 - d) 19 568 a la centena
 - e) 637 a la unidad
 - f) 3,7 a la unidad
 - g) 21,62 a la décima.
 - h) 0,36 a la décima.
 - i) 1,232 a la centésima
 - j) 3,995 a la centésima
 - k) 0,7896 a la milésima
 - l) 9,0099 a la milésima

Práctica guiada

2. **Aproxima** por redondeo los números decimales, según la cifra que se indica.

1,08 redondeado a la décima es 1,1.

- a) 5,05 a la décima
 - b) -6,79 a la décima
 - c) 4,708 a la centésima
 - d) 0,0009 a la milésima
 - e) $0,\overline{65}$ a la décima
 - f) $-2,\overline{13}$ a la diezmilésima
3. **Encuentra** un número a partir de la aproximación por redondeo indicada.

2,1 se obtiene al redondear el número 2,12 a la décima.

- a) -8 a la unidad
 - b) 1,8 a la décima
 - c) -1,7 a la décima
 - d) 5,60 a la centésima
 - e) -80,615 a la milésima
 - f) -0,1111 a la diezmilésima
4. **Aproxima** por truncamiento los números decimales según la cifra que se indica.

1,45 truncado a la décima es 1,4.

- a) 0,96 a la décima
 - b) -9,28 a la décima
 - c) 90,02 a la centésima
 - d) 21,667 a la milésima
 - e) $5,\overline{6}$ a la décima
 - f) $-60,\overline{8}$ a la centésima
5. **Encuentra** un número a partir de la aproximación por truncamiento indicada.

3,4 se obtiene al truncar el número 3,45 a la décima.

- a) 0,9 a la décima
- b) -5,8 a la décima
- c) 6,70 a la centésima
- d) -90,062 a la milésima
- e) -1,2223 a la diezmilésima
- f) -10 a la unidad

6. **Analiza** la tabla y luego complétala.

Número	Redondear a la...	Error
-25,46	décima	-25,5 $ -25,46 - (-25,5) = 0,04$
87,15	décima	
-2,1	centésima	
6,235	milésima	
-13,28	diezmilésima	

7. **Analiza** la tabla y luego complétala.

Número	Truncar a la...	Error
-9,18	décima	-9,1 $ -9,18 - (-9,1) = 0,08$
-3,2	décima	
1,37	milésima	
-5,007	centésima	
28,132	diezmilésima	

8. **Calcula** las cifras significativas de los siguientes componentes de una mezcla.

El número 0,250 g de sodio, tiene 3 c.s.

- a) 3,405 l de cloro.
 - b) 1,025 g de azufre.
 - c) 3,800 g de platino.
 - d) 1,950 l de nitrógeno.
 - e) 0,003 g de aluminio.
 - f) 0,960 g de bromo.
9. **Expresa** las siguientes medidas con la cantidad de cifras significativas que se indican.

Medida (g)	Expresada con ...	
0,250	1 c. s.	0,3
0,256	1 c. s.	
1,750	1 c. s.	
3,089	2 c. s.	
0,102	2 c. s.	
1,800	3 c. s.	
2,0890	3 c. s.	

10. **Calcula** las siguientes adiciones y sustracciones con la calculadora y expresa el resultado, aplicando los criterios de cifras significativas.

$$0,161 + 3,086 = 3,247 \rightarrow 3,250$$

- a) $1,400 + 1,009$ e) $0,0560 - 0,005$
 b) $0,002 + 5,17$ f) $9,015 + 0,16 + 4,90$
 c) $3,06 - 0,07$ g) $7,905 - 0,12 - 2,100$
 d) $5,890 - 9,6$ h) $8,6 + 0,008 - 5,930$

11. **Calcula** las siguientes multiplicaciones y divisiones con la calculadora y expresa el resultado, utilizando los criterios de cifras significativas.

$$0,12 \cdot 0,2 = 0,024 \rightarrow 0,02$$

- a) $0,9 \cdot 0,5$ c) $4,52 \cdot 0,3$ e) $5,12 \div 0,20$
 b) $3,2 \cdot 2,1$ d) $89,6 \cdot 1,02$ f) $1,08 \div 72,06$

Aplico

12. **Resuelve** los siguientes problemas. Para ello puedes utilizar la calculadora y si es necesario aproxima los datos o bien los resultados.

- a) Jaime tiene la siguientes notas en una de las asignaturas de la carrera que estudia:

4,5; 3,8; 6,5; 5,5; 4,8

Si aún le queda una evaluación por rendir, y para eximirse del examen final debe tener un promedio superior o igual a 5,0. ¿Desde qué nota no le permite cumplir el promedio? Considera que las notas tienen una cifra decimal. ¿Redondeaste o truncaste el promedio de las notas que tiene Jaime para determinar la respuesta? Justifica.

- b) Martina necesita cambiar 4,5 dólares en una casa de cambio. Si se sabe que 1 dólar equivale a \$505,3, ¿cuánto dinero debiera entregarle el cajero? ¿Truncaste o redondeaste el resultado? Justifica.

- c) La encargada de una librería registra diariamente las ventas de agendas que se hacen en una semana. A continuación se muestran las ventas de la primera semana de enero:

Día	Nº de ventas
Lunes	20
Martes	16
Miércoles	18
Jueves	19
Viernes	10

- ¿Cuántas agendas se venden en promedio durante esa semana? ¿Truncaste o redondeaste el resultado? Justifica.
- d) Mauricio debe realizar una mezcla con elementos sólidos. ¿Cuánta masa tiene la mezcla de 1,036 g de potasio; 3,20 g de sodio y 0,120 g de calcio? Expresa tu resultado con cifras significativas.
- e) Lorena debe vaciar en un recipiente 3 frascos de precipitados con 0,003 g de molibdeno y la mitad de un vaso que contiene 0,50 g de cobalto, ¿cuántos gramos aproximadamente depositará en el recipiente? Expresa tu resultado con cifras significativas.
13. **Conecta.** La masa de la tierra es de $1,9891 \cdot 10^{30}$ kg. ¿Cuántas c. s. tiene este valor?
14. **Descubre el error.** Francisco midió gramos de aluminio en su balanza. La pesa mostró una masa de 1,0130 g. Al registrar esta medida en su cuaderno, anotó 1,013 g. considerando tres c. s. ¿En qué se equivocó?
15. **Describe el procedimiento.** Describe paso a paso el procedimiento para calcular la siguiente operación utilizando cifras significativas:

$$0,010 \cdot 1,20 - 0,108 \div 1,20$$

16. **Crea.** Inventa un problema en donde sea necesario aproximar o truncar a la unidad.

Integro

- ¿Cuál es la importancia de la aproximación en la operatoria con números racionales? Investiga la aproximación que se utiliza en informática.
- ¿Cuál es el rol que cumple el error en la aproximación de los resultados?
- ¿Cuál es el rol que cumplen las cifras significativas al expresar los resultados? Explica.

Refuerzo

1. Calcula el error que se comete al redondear y truncar a la centésima la masa de un roedor que pesa 4,567 kg. ¿En qué aproximación el error es menor? Entonces, ¿cuál resultado es más exacto?
2. La sonda Pathfinder fue enviada a Marte en 1996. Si la masa del robot era de 870 kg y la aceleración de gravedad en el planeta rojo es de $3,711 \text{ m/s}^2$, ¿cuál es el peso de la sonda expresado con 2 cifras significativas?

Palabras clave

- ➔ Calculadora.
- ➔ Aproximación.

¿Cuáles son las limitaciones de la calculadora al realizar cálculos con números racionales?

- Si tuvieras que ingresar $0,\overline{1}$ en la calculadora y colocaras muchos unos al decimal, ¿podrías considerar que ingresaste el número $0,\overline{1}$? ¿Por qué? ¿Qué resultado entrega la calculadora al realizar la división entre 71 y 3?

Taller

Reúnanse en grupos de cuatro integrantes, lean y discutan las preguntas planteadas.

Pedro, Ana y Raúl calcularon el área de un rectángulo de lados $\frac{3}{7}$ cm y $\frac{5}{7}$ cm en diferentes calculadoras y obtuvieron los siguientes resultados.

Pedro	0.306122449
Ana	0,30612244897959183673469387755102
Raúl	0,30612244897959

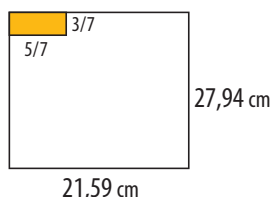
Razonen

y comenten

- ¿Por qué las calculadoras entregan diferente cantidad de cifras decimales? ¿De qué depende?
- ¿Por qué en la primera calculadora la última cifra decimal es 9? ¿Qué aproximación realizó?
- Si el número encontrado lo tienen que usar para otra operación, ¿qué harían?
- ¿Qué limitaciones existen al trabajar con números racionales en la calculadora?

Relaciona

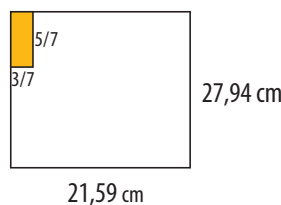
- Si los amigos consideraran el rectángulo en la hoja de la siguiente manera:



- ¿Cuántos rectángulos como máximo pueden dibujar? ¿Serán más o menos que de la otra manera? ¿Cuál es el área que queda sin rellenar con rectángulos?

Una de las limitaciones que existe al trabajar con números racionales en la calculadora es que los resultados que muestra la pantalla son aproximaciones del resultado real. Esto se debe al tamaño limitado de su pantalla: mientras más grande sea esta, más decimales aparecerán y más exacto será el resultado. Por otra parte, al utilizar aproximaciones de los resultados de las operaciones intermedias que resuelven un problema, se comete un error en el resultado final. Veamos un ejemplo:

Los tres amigos deben dibujar el rectángulo anterior repetidas veces hasta cubrir una hoja tamaño carta. Si la hoja mide 21,59 cm de ancho y 27,94 cm de largo, ¿cuántos rectángulos como máximo pueden dibujar? ¿Queda hoja sin rellenar con rectángulos? ¿Cuál es el área que queda?



Los amigos realizaron las siguientes operaciones en la calculadora para determinar cuántos rectángulos caben en el ancho de la hoja y cuántos en el largo:

Paso 1 ➤ Dividir el ancho de la hoja en el ancho del rectángulo.

$$21,59 \div \frac{3}{7} = \begin{array}{|c|} \hline 21,59 \div 3 \div 7 \\ \hline 50,37666667 \\ \hline \end{array} \rightarrow 50 \text{ redondeado a la unidad}$$

Paso 2 ➤ Dividir el largo de la hoja en el largo del rectángulo.

$$27,94 \div \frac{5}{7} = \begin{array}{|c|} \hline 27,94 \div 5 \div 7 \\ \hline 39,116 \\ \hline \end{array} \rightarrow 39 \text{ redondeado a la unidad}$$

Caben 50 rectángulos hacia al lado y 39 hacia abajo, en total $50 \cdot 39 = 1950$ rectángulos. Como se aproximaron los resultados significa que queda parte de la hoja donde no cabe un rectángulo completo.

Razona

y comenta

- ¿Es necesario considerar los decimales de los resultados obtenidos en la calculadora para lo que se desea conocer? ¿Para qué se redondeó a la unidad?
- ¿Qué aproximación realizó la calculadora en el paso 1? ¿A qué número racional exacto corresponde?

Para calcular esa superficie, los amigos realizaron lo siguiente en la calculadora:

Paso 3 ➤ Multiplicar el ancho del rectángulo por las 50 veces que cabe. Realizar el procedimiento para el largo.

$$\begin{array}{ll} \text{Para el ancho:} & \text{Para el largo:} \\ 50 \cdot \frac{3}{7} = \begin{array}{|c|} \hline 50 \times 3 \div 7 \\ \hline 21,42857143 \\ \hline \end{array} & 39 \cdot \frac{5}{7} = \begin{array}{|c|} \hline 39 \times 5 \div 7 \\ \hline 27,85714286 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Paso 4 ➤ Restar el resultado anterior al ancho de la hoja y obtener el ancho de la hoja restante. Repetir el procedimiento para el largo.

$$\begin{array}{ll} \text{Para el ancho:} & \text{Para el largo:} \\ 21,59 - \text{Ans} = \begin{array}{|c|} \hline 21,59 - \text{Ans} \\ \hline 0,161428571 \\ \hline \end{array} & 27,94 - \text{Ans} = \begin{array}{|c|} \hline 27,94 - \text{Ans} \\ \hline 0,082857142 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Paso 5 ➤ Calcular el área de la superficie, considerando dos cifras significativas.

$$0,16 \cdot 0,08 = 0,0128 \rightarrow 0,013 \text{ cm}^2$$

El área que queda sin cubrir es de $0,013 \text{ cm}^2$.

Caben 1950 rectángulos sobrando $0,013 \text{ cm}^2$ de la hoja tamaño carta.

Razona

y comenta

- Los resultados obtenidos en el paso 3, ¿son números racionales? ¿Por qué?
- En el paso 4, ¿si aproximas los resultados a qué posición lo harías? ¿Por qué? ¿En qué influirá esta aproximación en el resultado final?
- ¿Por qué en el paso 5 se aproximó? ¿Cómo ingresarías las operaciones en la calculadora para no tener que aproximar?

Observa

- La tecla Ans (**Ans**) es la abreviatura de answer que significa respuesta o contestación. Esta tecla muestra en pantalla el resultado de la operación anterior. Es muy útil para seguir operando.

Observa

- Para calcular la superficie no ocupada, utilizando tu calculadora y realizando los pasos 3, 4 y 5 en uno solo, debes utilizar paréntesis en las operaciones. Sigue la ruta para introducir a tu calculadora la operación completa:



Repaso

1. Completa las siguientes tablas.

Número	Redondear a la...	Error
0,326	centésima	
10,9109	décima	
-35,4752	diezmilésima	
0,999	unidad	
-2,3422	milésima	

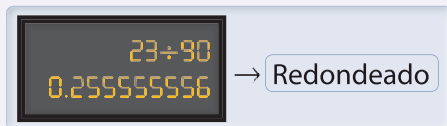
Número	Truncar a la...	Error
2,4571	centésima	
-25,83579	décima	
899,9999	diezmilésima	
-10,8756	unidad	
1,111122	milésima	

2. Identifica cuántas cifras significativas tienen los siguientes números racionales.

- | | | |
|----------|----------|------------|
| a) 0,156 | e) 0,180 | i) 96,500 |
| b) 7,639 | f) 5,6 | j) 1,01 |
| c) 0,10 | g) 1,330 | k) 6,203 |
| d) 2,05 | h) 402,3 | l) 0,00306 |

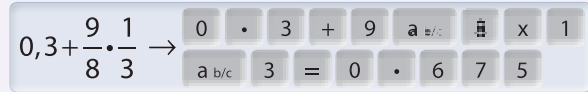
Práctica guiada

3. Identifica la aproximación que realizó la calculadora.



- | | |
|----|----|
| a) | d) |
| b) | e) |
| c) | f) |

4. Calcula las siguientes operaciones en la calculadora.



- | | |
|---|--|
| a) $0,1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{8}$ | e) $10,9 - \left(8,002 + \frac{8}{9}\right)$ |
| b) $0,5 - \frac{2}{3} + \left(-\frac{15}{4}\right)$ | f) $\frac{13}{12} \cdot (-0,1) + 2,13$ |
| c) $0,25 - \left(\frac{1}{3} + 1,12\right)$ | g) $9 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - \left(3,56 + \frac{1}{2}\right)$ |
| d) $3,1 + \left(\frac{8}{5} - \frac{4}{7}\right)$ | h) $1,64 + 7,6 \div 0,6 - 8,1 + \frac{17}{2}$ |

Aplico

5. Analiza la situación y luego responde.

Martina introdujo la siguiente operación en la calculadora científica: $0,1\overline{7} + 2,6\overline{8} - 1,6$ redondeando los números decimales a la centésima y obtuvo 1,27.

- Si el valor exacto de la operación es $1,2\overline{6}$, ¿cuál es el error cometido entre el valor exacto y la aproximación?
- Redondea a la centésima el valor exacto de la operación.
- ¿Cuál es el error cometido entre el valor exacto y lo que obtuviste en b)?
- Compara los errores calculados en a) y en c). ¿Qué sucedió?
- ¿Qué puedes concluir acerca de los procedimientos realizados?

6. Analiza la situación y luego responde.

Manuel introdujo la siguiente operación en la calculadora científica: $1,8 - 2,3 - 0,8$, truncando el número decimal a la unidad y obtuvo -1.

- Si el valor exacto de la operación es -1,3. ¿Cuál es el error cometido?
- Trunca a la unidad el valor exacto de la operación.
- ¿Cuál es el error cometido entre el valor exacto y lo que obtuviste en b)?
- Compara los errores calculados en a) y en c). ¿Qué sucedió?
- ¿Qué puedes concluir acerca de los procedimientos realizados?

7. **Analiza** con tu calculadora científica qué sucede cuando el resultado de una operación entre dos o más valores es un número de 10 o más cifras. A modo de ejercicio, resuelve lo siguiente:

$$23\,567\,895 \cdot 4^{10} - 12\,555\,980$$

- ¿Qué número se muestra como resultado en tu calculadora?
- ¿El número es finito o infinito? Justifica.
- Si es finito, escribe el número completo.
- Trunca el número obtenido en la calculadora a la centésima. Luego, inventa una situación en la que puedas escribir este valor truncado.
- Si el número resultante en la calculadora lo redondeas a la centésima, ¿se obtiene la misma aproximación realizada en d)? Justifica.
- Si ahora calculas $2 \div 7$, ¿se obtiene un número decimal finito o infinito? Justifica.
- ¿Crees que la calculadora está programada para redondear o truncar ciertos tipos de números? Para responder, haz la prueba resolviendo varias operaciones entre dos o más valores.

8. **Resuelve** los siguientes problemas, utilizando la calculadora y realizando las aproximaciones que estimes convenientes.

- Los lados de un triángulo son $\frac{4}{3}$ cm, 5,8 cm y 6,6 cm. ¿Cuál es el perímetro del triángulo?
- ¿Cuál es el área de un cuadrado de lado $\frac{13}{7}$ cm?
- El volumen de una esfera se puede determinar con la fórmula $V = \frac{4\pi r^3}{3}$. ¿Cuál es el volumen de una esfera de radio 4,9 m?
- Para convertir grados Fahrenheit en grados Celsius se emplea la expresión $^{\circ}\text{C} = \frac{5}{9} \cdot (^{\circ}\text{F} - 32)$. ¿A cuántos grados Celsius equivalen $0,8^{\circ}\text{F}$?

Integro

- ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de utilizar la calculadora para realizar operaciones con números racionales? Describe dos ventajas y dos desventajas.
- ¿En qué casos la aproximación prevalece frente a la exactitud de los resultados? En estos casos, ¿qué rol cumple la calculadora? Explica.

9. **Conecta.** La fuerza eléctrica entre dos cargas se puede calcular mediante la expresión $F = \frac{K \cdot q_1 \cdot q_2}{r^2}$

donde K es la constante de Coulomb cuyo valor es $9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$, q_1 y q_2 son las cargas de los dos cuerpos y r la distancia entre dichos cuerpos. ¿Cuál es la fuerza eléctrica que ejercen dos cuerpos cuyas cargas son de 3,5 C y 5,1 C respectivamente y que se encuentran a una distancia de $\frac{4}{3}$ m?

10. **Descubre el error.** Martina realizó una operación matemática en su calculadora y en el resultado obtuvo el siguiente número:

-9.65865866

Luego, Martina afirma que el número es un irracional, y que este ha sido redondeado por la calculadora. ¿Cuál es el error que cometió Martina en su afirmación?

- Describe el procedimiento.** Cuando utilizas tu calculadora para operar con los datos de un problema cuyo resultado es un número decimal periódico o semiperiódico, ¿cómo determinas si el número fue truncado o aproximado por la calculadora? ¿Cómo entregas la solución al problema? ¿Aproximas o truncas? ¿Con cuál de las dos aproximaciones se comete un menor error? ¿Qué es más exacto, aproximar los datos o aproximar el resultando final?
- Argumenta.** María afirma que se comete un menor error, cuando se aproxima por redondeo que cuando se hace por truncamiento. ¿Es correcta su afirmación? Justifica.
- Crea.** Inventa un problema donde tengas que utilizar como datos números racionales y la solución al problema corresponda a un número decimal periódico o semiperiódico.

Refuerzo

- Describe una situación en donde sea necesario entregar un resultado lo más exacto posible.
- Describe una situación en donde sea pertinente y necesario aproximar ya sea el resultado o las cantidades involucradas.



Resolver problemas utilizando la aproximación y la operatoria en los números racionales (lecciones 5, 8 y 9).

1 Resuelve las siguientes operaciones combinadas.

a. $7 \div \left(-\frac{2}{7}\right)$ g. $\left(-\frac{13}{8}\right) + \frac{5}{4} \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) + 2 \div \frac{8}{9}$

b. $\frac{1}{4} - \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\right)$ h. $\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3} - \frac{10}{9}\right) \div \frac{8}{9}$

c. $\frac{1}{5} + 0,3 - 0,\bar{2}$ i. $\left(\left(-\frac{1}{2}\right) \div \frac{3}{2}\right) \div \left(-\frac{9}{10}\right)$

d. $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{8}$ j. $\left(\frac{5}{6} \cdot 3\frac{2}{3}\right) \div \frac{1}{36}$

e. $\left(\frac{1}{3} \div \frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{8}{9}\right)$ k. $\left(2 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(3 - \frac{1}{4}\right) \div \left(1 - \frac{1}{5}\right)$

f. $\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{6}\right) \div \left(\frac{5}{9} + \frac{2}{3}\right)$ l. $\left(\frac{4}{9} \div \frac{16}{18}\right) - \left(1\frac{5}{8} + 2\right)$

2 Calcula la aproximación por redondeo y truncamiento de los números según la cifra decimal que se indica.

- 21,9 a la décima.
- 7,099 a la centésima.
- $8,3\bar{2}$ a la décima.
- 2,109 a la centésima.
- 18,0 $\bar{7}$ a la décima.
- 90,51 a la unidad.
- 0,00 $\bar{8}$ a la diezmilésima.

3 Resuelve los siguientes problemas utilizando aproximaciones.

- a. Las notas de Estela en Matemática eran las siguientes:

3,8; 5,6; 6,2; 4,1; 5,8; 4,4

Si para eximirse debe tener un promedio superior a 5,0, ¿se debiera truncar o redondear el promedio para tener la nota mínima de eximición? ¿A qué cifra decimal se debiera truncar o redondear el promedio? Justifica tu respuesta.

- El precio por litro de bencina de 93 octanos es de \$723,6. Si un taxista llena su estanque con 23 L de bencina, ¿cuál es el monto aproximado que debiera pagar por llenar el estanque? ¿Truncaste o redondeaste el resultado? Justifica tu respuesta.
- La madre de Ana debe repartir entre ella y sus seis hermanos una herencia de \$12 000 000. ¿Cuál es el dinero aproximado que recibirá cada hermano? ¿A qué cifra decimal se debiera aproximar el monto, si debe ser equitativo con cada uno? Justifica tu respuesta.
- El ascensor de un edificio asciende y desciende en promedio 700 m diariamente. Si a las 8:00 ya lleva recorrido $\frac{8}{15}$ de lo que recorre en promedio, y desde las 8:00 hasta las 13:00 realiza $\frac{2}{5}$ más de recorrido, ¿cuál es la fracción que le queda por recorrer y cuántos metros le faltan para alcanzar el promedio recorrido diariamente?
- Tres hermanas recibirán una herencia. La mayor recibirá $\frac{1}{7}$ de los \$1 500 000 que se heredarán, la hermana del medio recibirá $\frac{1}{9}$ de la herencia y la pequeña recibirá el resto. ¿Cuál es la fracción que heredó la hermana menor? ¿Cuánto dinero aproximadamente recibirá cada hermana?

4 Resuelve los siguientes problemas.

- Un castor come un cuarto de su comida diaria durante la mañana y luego come $\frac{3}{5}$ más de su comida durante la tarde. ¿Cuál es la fracción de comida que le falta por consumir?
- El total de estudiantes de un curso es 45. Un tercio de ellos escogió el electivo de Matemática, $\frac{4}{9}$ escogió Biología y el resto escogió Lenguaje. ¿Cuál es la fracción de estudiantes que escogió Lenguaje? ¿Cuántos estudiantes escogieron este electivo?
- Valeria se comió $\frac{13}{16}$ de sus papas en el almuerzo. ¿Cuántos gramos de papas tenía inicialmente si se comió 300 gramos?
- Una vuelta de broca de un taladro deja un agujero en la muralla de $\frac{3}{4}$ milímetros de profundidad. ¿Cuántas vueltas tendrá que dar la broca para que el agujero alcance una profundidad de 8 cm?
- Jaime compró 20 docenas de huevos para abastecer su negocio. $\frac{8}{16}$ del total de huevos, los vendió durante la primera semana y $\frac{2}{5}$ de los huevos que quedaban, durante la segunda. ¿Cuántos huevos quedan aún por vender?
- El corazón de una persona de 25 años late hasta 32 veces en 10 segundos al realizar actividad física. Si una persona de esa edad se ejercita 40 minutos, ¿cuántas veces latirá su corazón en ese periodo de tiempo?
- La calidad de los objetos de oro se mide en quilates. Un quilate significa que de 24 partes de un metal, una parte de ellas es oro puro. Si se tiene una joya de 18 quilates que pesa 90 gramos, ¿cuál es la cantidad de oro que tiene dicha joya?

Conjeturar acerca de las propiedades de los números racionales (lección 6 y 7).

5 Evalúa las siguientes afirmaciones.

- Si $a, b \in \mathbb{N}$, entonces $a \oplus b = a \cdot b + 1 \in \mathbb{Z}$.
- Si $a, b \in \mathbb{Q}$, entonces $a \Delta b = 2b + 3a \in \mathbb{Z}$.

c. Si $c, d \in \mathbb{Z}^-$, entonces $c \odot d = \frac{c}{d} + \frac{d}{c} \in \mathbb{Q}$.

d. Si $a, b \in \mathbb{Z}^-$, entonces $a \ominus b = 2a^2 + 3b^2 \in \mathbb{Q}$.

e. Si $a, b \in \mathbb{Q}^+$, entonces $a \Omega b = ab - (a + b)^2 \in \mathbb{N}$.

f. Si $c, d \in \mathbb{N}$, entonces $c \otimes d = \frac{2cd}{c} - 5cd \in \mathbb{Z}^+$.

6 Entre 0,5 y 0,6 se encuentran los números 0,51; 0,52;... Encuentra 3 números entre:

- 0,1 y 0,2
- 2,8 y 2,9
- 5,3 y -5,2
- 0,01 y 0,02
- 7,26 y 7,27
- 13,25 y -13,24
- 0,001 y 0,002
- 5,803 y 5,804
- 60,008 y -60,007

7 Calcula tres números racionales entre los siguientes números.

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| a. 0 y 1 | e. $-\frac{2}{3}y - \frac{3}{5}$ |
| b. $-\frac{4}{5}y$ y 0,2 | f. $-\frac{9}{4}y - 2,2$ |
| c. $\frac{1}{9}y$ y $\frac{6}{9}$ | g. $-\frac{12}{9}y$ y $1,\bar{3}$ |
| d. $1,\bar{2}$ y 1,2 | h. $-0,\bar{3}y - \frac{3}{10}$ |

8 ¿Existen infinitos números racionales con denominador 6 entre $\frac{4}{3}$ y $\frac{16}{6}$? Justifica tu respuesta.

9 ¿Existen infinitos números racionales con hasta dos cifras decimales entre 0,9 y 1,1? Justifica tu respuesta.

10 ¿Existen infinitos números racionales con hasta tres cifras decimales entre 0,11 y 0,12? Justifica tu respuesta.

Revisa tus respuestas en el solucionario al final del texto.



Problema

Javier y Matilde tienen un canasto de mandarinas. Javier se comió $\frac{2}{3}$ de ellas y Matilde $\frac{1}{30}$. ¿Qué fracción de mandarinas quedan sin comer?

Paso 1 **Comprendo.** ¿Qué entendiste del problema?

Se quiere determinar la fracción de mandarinas que no se han comido.

Paso 2 **Planifico.** ¿Qué harías para resolver el problema?

1° Sumar las fracciones de mandarinas que se comieron los amigos. Para ello se debe obtener el mínimo común múltiplo de los denominadores y amplificar las fracciones para igualar los denominadores, luego se suman los numeradores.

2° Restar al entero la fracción obtenida en el paso anterior.

Paso 3 **Resuelvo.** ¿Cómo ejecutarías la estrategia?

1° El mínimo común múltiplo entre 3 y 30 es 30.

Se amplifica la primera fracción por 10 y la segunda queda igual

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{30} = \frac{20}{30} + \frac{1}{30} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10}$$

La fracción de fruta que se comieron fue de $\frac{7}{10}$.

2° El entero en este caso sería $\frac{10}{10}$. Al restarle la fracción de fruta comida quedaría:

$$\frac{10}{10} - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$$



Ada Byron, Lady Lovelace
(1815 – 1852)

Hija del poeta Lord Byron y su esposa Anne Isabella Byron, se destacó como matemática y escritora. Fue conocida principalmente por su trabajo en la máquina de Charles Babbage, la máquina analítica. Sus notas incluyen lo que se reconoce como el primer algoritmo destinado a ser procesado por una máquina. Debido a esto, a menudo se considera la primera programadora de computador del mundo.

Paso 4 **Reviso.** ¿Cómo saber que es correcto el resultado?

Comprueba el resultado sumando las fracciones. Debe ser equivalente a la unidad.

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{30} + \frac{3}{10} = \frac{2 \cdot 10 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3}{30} = \frac{20 + 1 + 9}{30} = \frac{30}{30} = 1$$

Paso 5 **Comunico.** ¿Cómo interpretas el resultado obtenido?

La fracción de mandarinas que queda sin comer es $\frac{3}{10}$.

El papiro de Ahmes fue escrito por el escriba Ahmes en 1650 a.C. a partir de escritos de 200 años de antigüedad. De este, se extrajo información sobre cómo los egipcios resolvían problemas cotidianos que involucraban fracciones.



Resuelve los siguientes problemas.

- Un alumno dedica $\frac{1}{4}$ del día en ir al colegio, $\frac{3}{8}$ del día en dormir y $\frac{1}{5}$ del día para realizar tareas pendientes. Si el resto del día es dedicado al tiempo libre, ¿cuál es la fracción del día correspondiente a dicho tiempo libre?
- Una profesora corrigió $\frac{6}{7}$ de pruebas con lápiz de pasta rojo y $\frac{1}{9}$ con lápiz de pasta azul. Si aún le quedan 70 pruebas por corregir, ¿cuántas ha corregido?
- Martín se fue de vacaciones al sur con sus amigos. Durante el viaje recorrió $\frac{2}{7}$ del camino en camiones, $\frac{3}{8}$ en buses y el resto lo hizo en automóviles. Si en total recorrió 950 km, ¿cuántos kilómetros recorrió en automóviles?
- Cristina tiene variados juegos de consola. Un quinto de ellos es de estrategias, $\frac{3}{8}$ de misterio, $\frac{1}{9}$ son juegos basados en historias de películas y el resto de los juegos son de deportes. ¿Cuál es la fracción de juegos correspondientes a deportes?
- Se ocuparon $\frac{3}{8}$ de un cuaderno de 100 hojas, la mitad quedó desocupada y el resto fue arrancado. ¿Cuál es la fracción de hojas que fueron arrancadas? ¿Cuántas hojas están desocupadas?
- Marcelo dividió una tortilla en 8 trozos iguales. Él se comió la cuarta parte de los trozos de una tortilla y Felipe, el doble de los trozos que comió Marcelo. Por otra parte, Camila dice que Marcelo se comió la mitad de lo que han comido juntos Marcelo y Felipe. ¿Cuántos trozos han comido Marcelo y Felipe juntos? ¿Está en lo correcto Camila?
- Una parcela se divide en tres terrenos. El primero corresponde a los $\frac{4}{7}$ de la superficie total de la parcela, y el segundo corresponde a la mitad del primero. ¿Qué fracción de la parcela representa el tercer terreno?
- Fabián donó \$600 000 a tres fundaciones. A la fundación X donó la tercera parte del dinero, a la fundación Y donó $\frac{2}{5}$, y a la fundación Z donó el resto. ¿Cuál es la fracción del dinero que donó a la fundación Z? ¿Cuánto dinero donó a cada fundación?
- De un depósito con agua, se ha sacado: un sexto de agua la primera vez y luego el resto. Si el depósito tenía 300 litros de agua, ¿cuántos litros de agua se sacaron la primera vez? ¿Y la segunda vez?

Reflexiona

- Explica con tus palabras la estrategia trabajada y comenta con tus compañeros y compañeras qué les pareció.
- ¿Qué otra estrategia conoces para resolver el mismo problema? Describe una.
- ¿Cómo resolverías este tipo de problemas? ¿Por qué?

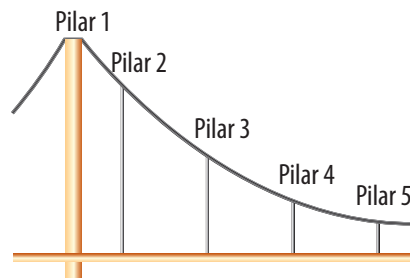
Palabras clave

- ➔ Potencias de base racional y exponente entero.

¿Qué es una potencia de base racional y exponente entero?

- Si quisieras expresar $1,2 \cdot 1,2 \cdot 1,2 \cdot 1,2 \cdot 1,2$ de forma abreviada ¿cómo lo harías?

Carla, técnico electricista, realiza la mantención del puente que se muestra en la imagen. Si en el puente, a cada pilar lo sigue otro cuya longitud es $\frac{5}{6}$ del anterior, ¿cuál es la longitud del quinto pilar, considerando que el mayor de ellos tiene una longitud de 50 m?

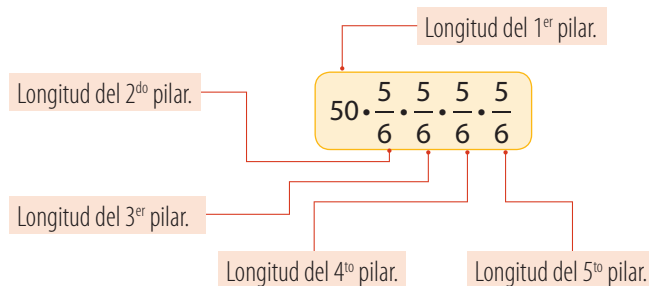


Para calcular la longitud del quinto pilar Carla siguió los pasos:

Observa

$$\begin{aligned} \left(\frac{9}{7}\right)^3 &= \frac{9}{7} \cdot \frac{9}{7} \cdot \frac{9}{7} = \frac{9 \cdot 9 \cdot 9}{7 \cdot 7 \cdot 7} \\ &= \frac{9^3}{7^3} = \frac{729}{343} \\ \left(-\frac{1}{3}\right)^2 &= \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 3} \\ &= \frac{1^2}{3^2} = \frac{1}{9} \\ 1,6^2 &= \left(\frac{16-1}{9}\right)^2 = \left(\frac{15}{9}\right)^2 \\ &= \left(\frac{5}{3}\right)^2 \\ &= \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{25}{9} \end{aligned}$$

- Paso 1** Expresar la longitud del pilar 5 en función del primero y del resto de los pilares anteriores a él.



- Paso 2** Expresar la multiplicación iterada como una potencia de base racional y exponente entero.

$$50 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

- Paso 3** Calcular el resultado de la potencia para encontrar la longitud del pilar 5.

$$\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \left(\frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right) = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{5^4}{6^4} = \frac{625}{1296}$$

Luego,

$$50 \cdot \frac{625}{1296} = \frac{50 \cdot 625}{1296} = \frac{31\,250}{1296} = 24 \frac{73}{648} = 24,11265432 \approx 24$$

El quinto pilar mide aproximadamente 24 m de longitud.

Observa

$\mathbb{Z}^+$ corresponde al conjunto de números enteros positivos.

En resumen

Para calcular una potencia de base racional y exponente entero positivo puedes utilizar la siguiente expresión:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \text{ con } a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \text{ y } n \in \mathbb{Z}^+.$$

¿Cómo se calcula una potencia de base racional y exponente entero negativo?

En este nivel se introduce la potencia de base racional y exponente negativo que equivale al inverso multiplicativo de la base elevada a un exponente positivo. Observa los pasos para calcular la potencia 4^{-2} .

Paso 1 Expresar la potencia involucrada, utilizando la propiedad de división de potencias de igual base.

$$4^{-2} = 4^{3-5} = \frac{4^3}{4^5} = \frac{\cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot 4 \cdot 4} = \frac{1}{4 \cdot 4} = \frac{1}{4^2}$$

Paso 2 Calcular el resultado de la potencia de base racional y exponente entero positivo. Se observa que la potencia involucrada es igual al inverso multiplicativo de la base elevada al inverso aditivo del exponente.

$$\text{Luego } 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$$

$$\text{Además } 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

¿Cómo se calcula una potencia de base racional y exponente cero?

Observa el procedimiento para calcular a^0 donde $a \in \mathbb{Q}$ y $a \neq 0$.

$$a^0 = a^{n-n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ veces}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ veces}}} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \dots \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \dots \cdot \cancel{a}} = 1$$

En resumen

1. Para calcular una potencia de base racional y exponente entero negativo puedes utilizar la siguiente expresión:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n} \text{ con } a, b \in \mathbb{Z} - \{0\} \text{ y } n \in \mathbb{Z}^+.$$

2. Para calcular una potencia de base racional y exponente cero puedes utilizar la siguiente expresión:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1 \text{ con } a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}.$$

Observa

- ¿Por qué $-\frac{2^3}{3} \neq \left(-\frac{2}{3}\right)^3$?
- $-\frac{2^3}{3} = -\frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3} = -\frac{8}{3}$
- $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$

Razona

y comenta

- Vuelve a responder la pregunta del inicio, ¿cambió tu respuesta? ¿Por qué?
- ¿Cómo calcularías $(0,33333\dots)^{-2}$? Describe tu procedimiento.
- ¿Cuál es el resultado de $\left(\frac{0}{5}\right)^3$? Recuerda que $0^n = 0$, con $n \neq 0$.

Relaciona

- ¿Cuánto es $0,3^{-2}$? Describe cómo lo calculaste.
- ¿Cuanto es $(-2, \overline{13})^{-1}$? Describe como lo calculaste.

Repaso

1. Representa como potencia las siguientes multiplicaciones iteradas.

a) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

d) $111 \cdot 111 \cdot 111 \cdot 111$

b) $(-6) \cdot (-6) \cdot (-6)$

e) $(-8) \cdot (-8) \cdot (-8)$

c) $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$

f) $12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12$

2. Representa como una multiplicación iterada las siguientes potencias.

a) -11^6

d) 44^3

b) -2^5

e) $(-22)^3$

c) $(-7)^4$

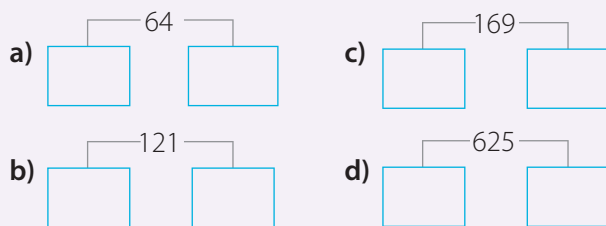
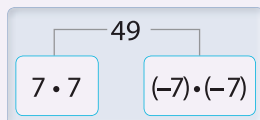
f) 123^4

3. Calcula el valor de las siguientes expresiones.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{(-3)^2 \cdot -3^2 \cdot 3^3}{3^2} & \text{c)} \frac{(-3)^3 + 4^2 - (-7)^3}{3} \\ \text{b)} \frac{5^4 \cdot (-5)^2}{5} & \text{d)} (-1)^{17} \cdot (-3)^5 + (-8)^2 - (-5)^3 \end{array}$$

Práctica guiada

4. Representa cada número como una potencia de base positiva y también como una potencia de base negativa. Luego, responde.



e) En cada caso, ¿por qué las potencias de base positiva o negativa tienen el mismo valor? Justifica.

5. Expresa como potencias de exponente entero positivo. Luego, calcula su valor.

$$7^{-5} = \left(\frac{1}{7}\right)^5 = \frac{1}{16807}$$

$$\begin{array}{llll} \text{a)} 5^{-4} & \text{c)} 10^{-6} & \text{e)} 12^{-6} & \text{g)} -7^{-2} \\ \text{b)} 8^{-4} & \text{d)} 3^{-2} & \text{f)} (-3)^{-4} & \text{h)} -9^{-3} \end{array}$$

6. Expresa como potencias de exponente entero negativo.

$$\frac{1}{6^3} = 6^{-3}$$

$$\begin{array}{llll} \text{a)} -\frac{1}{3^5} & \text{c)} \frac{1}{9^6} & \text{e)} \frac{1}{(-2)^5} & \text{g)} \frac{1}{(-5)^4} \\ \text{b)} \frac{1}{10^6} & \text{d)} \frac{1}{(-1)^4} & \text{f)} \frac{1}{(-3)^3} & \text{h)} \frac{1}{-3^2} \end{array}$$

7. Calcula el valor de las potencias.

$$(-2)^{-3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1^3}{2^3} = -\frac{1}{8}$$

$$\begin{array}{lll} \text{a)} (-3)^{-4} & \text{c)} 6^{-4} & \text{e)} -(-2)^{-10} \\ \text{b)} -8^{-3} & \text{d)} 5^{-5} & \text{f)} -(-3)^{-5} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{g)} -(-1)^{-100} & \text{i)} -(-3)^{-4} & \text{k)} -(-8)^{-3} \\ \text{h)} -1^{1025} & \text{j)} (-2)^{-11} & \text{l)} (-7)^{-4} \end{array}$$

8. Calcula el valor de las potencias. Luego resuelve la adición.

$$3^{-4} + 3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1^4}{3^4} + \frac{1^2}{3^2} = \frac{1}{81} + \frac{1}{9} = \frac{1+9}{81} = \frac{10}{81}$$

$$\begin{array}{ll} \text{a)} 6^{-2} + 6^{-3} & \text{c)} -5^{-2} + 5^{-3} \\ \text{b)} 2^{-2} + 2^{-4} & \text{d)} -4^{-4} + 4^{-2} \end{array}$$

9. Calcula el valor de las potencias. Luego resuelve la multiplicación.

$$3^{-4} \cdot 3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1^4}{3^4} \cdot \frac{1^2}{3^2} = \frac{1}{81} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{729}$$

$$\begin{array}{ll} \text{a)} 5^{-2} \cdot 5^{-3} & \text{c)} (-6)^{-2} \cdot (-6)^{-2} \\ \text{b)} 8^{-1} \cdot 8^{-5} & \text{d)} -12^{-3} \cdot (-12)^{-5} \end{array}$$

10. Calcula el valor de las potencias.

$$(-2)^3 = -8$$

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \left(\frac{1}{2}\right)^4 & \text{f)} \left(-\frac{1}{20}\right)^0 & \text{k)} -\left(\frac{5}{4}\right)^1 \\ \text{b)} (-0,5)^2 & \text{g)} (-4,75)^1 & \text{l)} (-2,5)^3 \\ \text{c)} \left(-\frac{1}{4}\right)^4 & \text{h)} -(0,75)^3 & \text{m)} (1,028)^{-1} \\ \text{d)} \left(\frac{2}{3}\right)^{10} & \text{i)} -\left(\frac{2}{3}\right)^5 & \text{n)} -4,5^{-2} \\ \text{e)} \left(-\frac{3}{5}\right)^2 & \text{j)} -\left(-\frac{1}{3}\right)^4 & \text{o)} (-4,5)^{-2} \end{array}$$

11. Calcula el valor de las potencias. Luego resuelve la multiplicación.

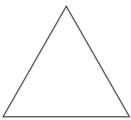
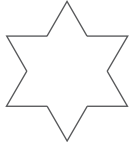
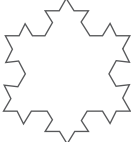
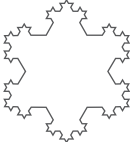
$$\begin{aligned} -\frac{1}{7^{-3}} \cdot (-3)^{-2} &= -\frac{1}{\left(\frac{1}{7}\right)^3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{\frac{1}{1}} \cdot \frac{1}{9} = -\frac{343}{1} \cdot \frac{1}{9} = -\frac{343}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{1}{(-4)^{-5}} \cdot (-2^8) & \text{c)} -\frac{1}{(-6)^2} \cdot (-2^{-8}) \\ \text{b)} -3^5 \cdot \left(-\frac{1}{(-9)^{-2}}\right) & \text{d)} \frac{-1}{(-5)^{-3}} \cdot 4^{-3} \end{array}$$

Aplico

12. Representa las siguientes situaciones a través de una potencia de base racional y exponente entero. Luego, resuélvelas.

- Un tipo de bacteria se triplica cada hora en el organismo de un animal. Si en el momento que le diagnostican la enfermedad el animal tenía 20, ¿cuántas bacterias tendrá transcurridas 8 horas?
- Hay siete casas, con siete gatos cada una. Cada gato atrapa siete ratones que se habían comido siete espigas de trigo por cabeza. Cada espiga había producido siete hekats (unidad de capacidad principal que fue empleada en el antiguo Egipto equivalente a 4,54 l.) de grano. ¿Cuántas unidades tenemos de cada cosa? (Problema 79, papiro de Rhind).
- El fractal conocido como copo de nieve de Koch se forma del siguiente modo:

Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4
			
Se tiene un triángulo equilátero.	Se divide cada lado en tres partes iguales, y en el segmento central de cada lado se levanta un triángulo equilátero.	Se repite el proceso anterior en cada lado de cada triángulo.	Se repite el proceso anterior en cada lado de cada triángulo.

Si el lado del triángulo de la figura 1 mide 30 cm:

- ¿Cuánto mide el perímetro de la figura 2?
 - ¿Cuántos triángulos nuevos se formaron en los lados del triángulo original para formar la figura 3?
 - ¿Cuál es el perímetro de la figura 4?
- En un cuadrado de lado 8 m se unen los puntos medios de sus lados para formar otro cuadrado.

Integro

- ¿Por qué $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ no es lo mismo que $\frac{1^2}{2}$?
- ¿Cuál es la importancia de los paréntesis al calcular potencias de base racional y exponente entero?
- ¿La potencia es una operación cerrada? Es decir, ¿al elevar un número racional a un exponente entero siempre se obtendrá un número racional?

A este que se le aplica el mismo procedimiento, uniendo sus puntos medios y así sucesivamente.

- ¿Cuál es el área del cuadrado que resulta al repetir 4 veces el procedimiento?
 - ¿Cuál es el área del cuadrado que resulta al repetir n veces el procedimiento?
- En una tienda de artículos escolares aumentan de manera considerable sus ventas en los meses de marzo y abril, de tal manera que cada semana se obtiene una ganancia del 50% mayor a la de la semana anterior.
 - Si la primera semana la ganancia fue de \$200 000, ¿cuál fue la de la sexta semana?
 - Determina una expresión que permita calcular las ganancias obtenidas en una semana s .
 - Si las ganancias disminuyeran en un 10% a medida que transcurren los meses (desde mayo a diciembre), ¿cuál es la expresión que permite calcular las ganancias de un mes m , sabiendo que en el mes de abril las ganancias fueron aproximadamente \$2 200 000?
 - ¿Cuál es la ganancia que obtuvo la tienda en el mes de diciembre?

13. Conecta. Los científicos Marie y Pierre Curie descubrieron el polonio y el radio, elementos radioactivos. La cantidad de estos elementos tarda un tiempo determinado (llamado vida media) en reducirse a la mitad. Por ejemplo, 1000 gramos de una sustancia radioactiva con una vida media de 10 años, tomará 10 años para reducirse a la mitad. Pasados 20 años se reduce a la cuarta parte; y aún al término de cincuenta años, queda una treintaidosa parte activa. Esto es poco más de 30 gramos. Esta situación, ¿se puede expresar utilizando potencias de base racional y exponente entero?

14. Descubre el error. ¿Cuál es error que cometió Marcela en resolver la siguiente potencia?

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{-2} = \left(-\frac{1}{7}\right)^2 = -\frac{1}{7} \cdot -\frac{1}{7} = \frac{1}{49}$$

Refuerzo

- La arista de un cubo mide $\frac{3}{7}$ cm. Expresa su volumen como una potencia.
- La superficie de un cubo se calcula con la fórmula $6 \cdot a^2$ donde a corresponde a la arista del cubo. Si un cubo tiene una arista de 1,7 cm, ¿cuál es su superficie?
- Muestra que $-\frac{4^3}{7} \neq \left(-\frac{4}{7}\right)^3$.

Palabras clave

- Propiedades de multiplicación y división de potencias.
- Potencia de una potencia.

¿Qué propiedades se pueden utilizar para operar con potencias?

- ¿Es posible que $(0,1\bar{3})^2 \cdot \left(\frac{2}{15}\right)^{-2} = 1$? ¿Cómo se podría expresar 1 como una multiplicación de potencias?

Relaciona

- ¿Por qué $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)$ es igual a 1? Justifica tu respuesta.
- ¿Cuál es el resultado de $\left(-\frac{5}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^0$?

Razona**y comenta**

- ¿Las propiedades de la multiplicación de potencias con base entera y exponente natural se conservan para las con base racional y exponente entero? ¿Por qué?
- Al multiplicar potencias de igual base racional e igual exponente entero, ¿qué propiedad se aplica? ¿Por qué? ¿Cuál es el resultado de $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$? ¿Por qué?

Taller

Reúnanse en parejas y respondan las preguntas.

Multiplicación de potencias

- Pablo necesita resolver $\left(\frac{3}{4}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$ y realizó el siguiente desarrollo.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}} = ?$$

1. ¿Cómo expresarías el desarrollo anterior en una sola potencia?
2. El exponente de esta potencia, ¿cómo se relaciona con los exponentes de las potencias originales? ¿Qué regularidad observas?
3. ¿Se cumple la misma regularidad al calcular $\left(-\frac{2}{7}\right)^3 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right)^{-4}$? Expresa la multiplicación en una sola potencia.

- María necesita resolver $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(-\frac{7}{9}\right)^4$ y realizó el siguiente desarrollo.

$$\begin{aligned} \left(-\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(-\frac{7}{9}\right)^4 &= \left(-\frac{2}{3} \cdot -\frac{2}{3} \cdot -\frac{2}{3} \cdot -\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{7}{9} \cdot -\frac{7}{9} \cdot -\frac{7}{9} \cdot -\frac{7}{9}\right) \\ &= \left(-\frac{2}{3} \cdot -\frac{7}{9}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot -\frac{7}{9}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot -\frac{7}{9}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot -\frac{7}{9}\right) = ? \end{aligned}$$

1. ¿Cuántas veces está repetida la expresión $\left(-\frac{2}{3} \cdot -\frac{7}{9}\right)$ en total?
2. ¿Cómo expresarías el desarrollo anterior en una potencia de base $\left(-\frac{2}{3} \cdot -\frac{7}{9}\right)$?
3. ¿Qué regularidad observas?
4. ¿Se cumple la misma regularidad al calcular $\left(-\frac{5}{8}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{-4}$? Expresa la multiplicación en una sola potencia.

En resumen

Para todo número racional se cumplen las siguientes **propiedades de la multiplicación de potencias**. Sean a y b distintos de 0.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a \cdot c}{b \cdot d}\right)^n$$

División de potencias

- Observa los siguientes desarrollos:

$$\left(-\frac{7}{10}\right)^4 \div \left(-\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{\left(\cancel{-\frac{7}{10}}\right) \cdot \left(\cancel{-\frac{7}{10}}\right) \cdot \left(-\frac{7}{10}\right) \cdot \left(-\frac{7}{10}\right)}{\left(\cancel{-\frac{7}{10}}\right) \cdot \left(\cancel{-\frac{7}{10}}\right)} = \left(-\frac{7}{10}\right) \cdot \left(-\frac{7}{10}\right) = \left(-\frac{7}{10}\right)^2$$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^2 \div \left(\frac{2}{7}\right)^3 = \frac{\left(\cancel{\frac{2}{7}}\right) \cdot \left(\cancel{\frac{2}{7}}\right)}{\left(\cancel{\frac{2}{7}}\right) \cdot \left(\cancel{\frac{2}{7}}\right) \cdot \left(\frac{2}{7}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{2}{7}\right)} = \left(\frac{2}{7}\right)^{-1}$$

1. ¿Cómo se relaciona el exponente de la potencia resultante con los exponentes de las potencias regulares?
2. ¿Qué regularidad observas?
3. ¿Se cumple la misma regularidad al calcular $\left(-\frac{2}{5}\right)^3 \div \left(-\frac{2}{5}\right)^{-4}$?

- Observa el siguiente desarrollo:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} \div \left(\frac{5}{8}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \div \left(\frac{8}{5}\right)^3 = \frac{\left(\frac{4}{3}\right) \cdot \left(\frac{4}{3}\right) \cdot \left(\frac{4}{3}\right)}{\left(\frac{8}{5}\right) \cdot \left(\frac{8}{5}\right) \cdot \left(\frac{8}{5}\right)} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right) \cdot \left(\frac{4}{3}\right) \cdot \left(\frac{4}{3}\right)}{\left(\frac{8}{5}\right) \cdot \left(\frac{8}{5}\right) \cdot \left(\frac{8}{5}\right)} = ?$$

1. ¿Cuántas veces está repetida la expresión $\frac{\left(\frac{4}{3}\right)}{\left(\frac{8}{5}\right)}$ en total? Exprésala como una potencia.
2. ¿La expresión que encontraste en la pregunta anterior es equivalente a $\left(\left(\frac{3}{4}\right) \div \left(\frac{5}{8}\right)\right)^{-3}$? ¿Por qué?
3. ¿Qué regularidad observas? ¿Se cumple la misma regularidad al calcular $\left(-\frac{5}{7}\right)^{-4} \div \left(\frac{2}{9}\right)^{-4}$?

Razonen y comenten

- ¿Las propiedades de la división de potencias con base entera y exponente natural se conservan para las con base racional y exponente entero?
- Al dividir potencias de igual base racional e igual exponente entero, ¿qué propiedad se aplica? ¿Por qué?
- ¿Cuál es el resultado de $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \div \left(\frac{1}{2}\right)^2$? ¿Por qué?

Links

Para profundizar en el uso de potencias visita:

<http://www.thatquiz.org/es-2/matematicas/potencia/>



Observa

$$\left. \begin{array}{l} 2^3 = 2^8 \\ (2^2)^3 = 2^6 \end{array} \right\} 2^3 \neq (2^2)^3$$

En general:

$$a^m \neq (a^m)^n \quad \text{con } a \neq 0$$

Potencia de una potencia

- Observa los siguientes desarrollos:

$$\left(\left(-\frac{6}{7} \right)^{-2} \right)^{-3} = \left(\left(-\frac{7}{6} \right)^2 \right)^{-3} = \left(\left(-\frac{7}{6} \right) \cdot \left(-\frac{7}{6} \right) \right)^{-3} = \left(-\frac{7}{6} \right)^{-3} \cdot \left(-\frac{7}{6} \right)^{-3} = \left(-\frac{6}{7} \right)^3 \cdot \left(-\frac{6}{7} \right)^3 = \left(-\frac{6}{7} \right)^6 = ?$$

1. ¿Cuántas veces en total está repetido $\left(-\frac{6}{7} \right)$?
2. ¿Cómo expresarías el desarrollo anterior en una sola potencia?
3. El exponente de la potencia anterior, ¿cómo se relaciona con los exponentes de las potencias originales?
4. ¿Qué regularidad observas?
5. ¿Se cumple la misma regularidad al calcular $\left(\left(-\frac{5}{8} \right)^{-4} \right)^2$? Expresa la multiplicación en una sola potencia.

Razonen

y comenten

- Vuelve a responder las preguntas del inicio de la lección. ¿Cambiaron tus respuestas?

En resumen

- Para todo número racional se cumplen las siguientes **propiedades de la división de potencias**. Sean **a** y **b** distintos de 0.

$$\left(\frac{a}{b} \right)^n \div \left(\frac{a}{b} \right)^m = \left(\frac{a}{b} \right)^{n-m} \qquad \left(\frac{a}{b} \right)^n \div \left(\frac{c}{d} \right)^n = \left(\frac{a}{b \div c} \right)^n$$

- Para todo número racional se cumple la siguiente **propiedad de potencia de una potencia**. Sean **m**, **n** y **b** distintos de 0.

$$\left(\left(\frac{a}{b} \right)^n \right)^m = \left(\frac{a}{b} \right)^{n \cdot m}$$

Repaso

1. **Expresa** como una sola potencia las siguientes multiplicaciones.

a) $2^2 \cdot 2^4$

f) $(-1)^{11} \cdot (-1)^{16}$

b) $5^3 \cdot 5^8$

g) $(-2)^{25} \cdot (-2)^7$

c) $8^2 \cdot 4^2$

h) $4^8 \cdot (-4)^6$

d) $(-4)^5 \cdot (-2)^5$

i) $(-3)^3 \cdot (-3)^3$

e) $(-6)^5 \cdot (-6)^5$

j) $(-1)^{1800} \cdot (-1)^{5000}$

2. **Expresa** como una sola potencia las siguientes divisiones.

a) $3^1 \div 3^3$

f) $(-11)^{15} \div (-11)^9$

b) $4^2 \div 4^5$

g) $(-13)^{26} \div (-13)^9$

c) $18^{15} \div 9^{15}$

h) $19^2 \div (-19)^2$

d) $(-1)^2 \div (-1)^4$

i) $(-20)^5 \div -20^1$

e) $(-15)^7 \div (-3)^7$

j) $-1^{800} \div (-1)^{761}$

3. **Expresa** como una sola potencia utilizando la propiedad potencia de una potencia.

- a) $(3^2)^3$ d) $((-2)^1)^5$ g) $(-1^2)^6$
 b) $(5^1)^4$ e) $((-7)^4)^3$ h) $(((-1)^2)^4)^3$
 c) $(3^8)^2$ f) $((-2)^7)^8$ i) $(((-4)^1)^7)^{10}$

4. **Aplica** las propiedades de las potencias para resolver los siguientes ejercicios.

- a) $5^2 \cdot 5^4$ f) $4^5 \cdot 4^3 \cdot 4^{10}$
 b) $(-2)^3 \cdot (-2)^1$ g) $(-8)^0 \cdot (-8)^4 \cdot (-8)^3$
 c) $3^4 \div 3^1$ h) $\frac{4^1 \cdot 4^3}{4^2}$
 d) $(-1)^5 \div (-1)^3$ i) $\frac{(-9)^5 \cdot (-9)^8}{(-9)^4 \cdot (-9)^6}$
 e) $(5^2)^3$ j) $((-1)^{23})^0 \cdot (-1)^5$

Práctica guiada

5. **Expresa** como una sola potencia las siguientes multiplicaciones de potencias de igual base.

$$\left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^{3+2} = \left(\frac{4}{5}\right)^5$$

- a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$ d) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^4$
 b) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^3$ e) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot (0,5)^5$
 c) $\left(-\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2$ f) $(0,3)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$

6. **Expresa** como una multiplicación de potencias de igual base las siguientes potencias.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

- a) $\left(\frac{1}{4}\right)^5$ c) $\left(-\frac{11}{4}\right)^{-1}$ e) $(-0,6)^{-2}$
 b) $\left(\frac{8}{9}\right)^{-8}$ d) $\left(-\frac{7}{12}\right)^{-15}$ f) $(-0,5)^{-10}$

7. **Expresa** como una sola potencia las siguientes multiplicaciones de igual exponente.

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{12}{5}\right)^2 = \left(-\frac{12}{15}\right)^2 = \left(-\frac{4}{5}\right)^2$$

- a) $\left(\frac{3}{5}\right)^7 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^7$ d) $\left(\frac{40}{3}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{57}{10}\right)^{-2}$
 b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^{-2}$ e) $(0,5)^{-4} \cdot \left(\frac{58}{8}\right)^{-4}$
 c) $\left(-\frac{8}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{11}{4}\right)^3$ f) $(-0,12)^3 \cdot \left(\frac{18}{44}\right)^3$

8. **Expresa** como una multiplicación de potencias de igual exponente y distinta base las siguientes potencias.

$$\left(\frac{9}{56}\right)^{-2} = \left(\frac{9}{7} \cdot \frac{1}{8}\right)^{-2} = \left(\frac{9}{7}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{-2}$$

- a) $\left(\frac{14}{15}\right)^{-1}$ d) $\left(-\frac{9}{68}\right)^{-3}$ g) $(-1,5)^{-10}$
 b) $\left(-\frac{1}{32}\right)^{-8}$ e) $(1,5)^{-4}$ h) $(1,02)^{-20}$
 c) $\left(\frac{80}{295}\right)^{-2}$ f) $(-2,05)^{-1}$ i) $(-3,25)^{-25}$

9. **Expresa** como una sola potencia las siguientes divisiones de potencias de igual base.

$$\left(\frac{9}{7}\right)^6 \div \left(\frac{9}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{9}{7}\right)^{6-(-2)} = \left(\frac{9}{7}\right)^8$$

- a) $\left(\frac{1}{5}\right)^2 \div \left(\frac{1}{5}\right)^3$ d) $\left(-\frac{4}{5}\right)^{-3} \div \left(-\frac{4}{5}\right)^4$
 b) $\left(-\frac{7}{9}\right)^2 \div \left(-\frac{7}{9}\right)^6$ e) $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \div (0,16)^4$
 c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-6} \div \left(\frac{2}{3}\right)^2$ f) $(0,25)^3 \div \left(\frac{1}{4}\right)^{-12}$

- 10. Expresa** como una división de potencias de igual base y distinto exponente las siguientes potencias.

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^5 = \left(-\frac{1}{4}\right)^{-3} \div \left(-\frac{1}{4}\right)^{-8}$$

- a) $\left(\frac{3}{8}\right)^7$ d) $\left(-\frac{17}{16}\right)^{-9}$ g) $(0,2)^{-3}$
b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ e) $(0,6)^{-2}$ h) $(-0,6)^{-2}$
c) $\left(-\frac{15}{2}\right)^{-1}$ f) $(3,2)^{-1}$ i) $(-1,4)^{-6}$

- 11. Expresa** como una sola potencia las siguientes divisiones de potencias de igual exponente.

$$\left(-\frac{1}{9}\right)^3 \div \left(\frac{4}{15}\right)^3 = \left(-\frac{1}{9} \div \frac{4}{15}\right)^3 = \left(-\frac{1}{9} \cdot \frac{15}{4}\right)^3 = \left(-\frac{15}{36}\right)^3 = \left(-\frac{5}{12}\right)^3$$

- a) $\left(\frac{1}{8}\right)^8 \div \left(\frac{4}{6}\right)^8$ d) $\left(\frac{5}{2}\right)^{-1} \div \left(\frac{6}{10}\right)^{-1}$
b) $\left(-\frac{6}{5}\right)^2 \div \left(-\frac{20}{9}\right)^2$ e) $(1,5)^{-2} \div \left(\frac{33}{8}\right)^{-2}$
c) $\left(-\frac{81}{24}\right)^{-5} \div \left(-\frac{28}{18}\right)^{-5}$ f) $(-1,35)^3 \div \left(\frac{63}{82}\right)^3$

- 12. Expresa** como una división de potencias de igual exponente y distinta base las siguientes potencias.

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \div \left(-\frac{4}{9}\right)^{-2}$$

- a) $\left(\frac{12}{9}\right)^{-9}$ d) $\left(-\frac{72}{64}\right)^{-12}$ g) $(2,3)^{-8}$
b) $\left(\frac{81}{64}\right)^{-3}$ e) $(0,8)^{-6}$ h) $(1,0\bar{1})^{-8}$
c) $(1,8)^{-10}$ f) $(-1,89)^{-13}$ i) $(-2,0\bar{6})^{-19}$

- 13. Expresa** como una sola potencia, utilizando la propiedad potencia de una potencia.

$$\left(\left(\frac{5}{4}\right)^2\right)^{-1} = \left(\frac{5}{4}\right)^{2 \cdot -1} = \left(\frac{5}{4}\right)^{-2}$$

- a) $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^5\right)^6$ c) $\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right)^1$ e) $\left(\left(\left(-\frac{3}{19}\right)^{-2}\right)^{-9}\right)^0$
b) $\left(\left(\frac{8}{7}\right)^3\right)^{-1}$ d) $\left(\left(-\frac{1}{4}\right)^5\right)^{-2}$ f) $\left((0,2^{-1})^{-8}\right)^2$

- 14. Expresa** como una potencia de una potencia las siguientes potencias.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{4}\right)^{3 \cdot -1} = \left(\left(\frac{3}{4}\right)^3\right)^{-1}$$

- a) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-6}$ d) $\left(-\frac{13}{16}\right)^{18}$ g) $(5,6)^8$
b) $\left(\frac{10}{7}\right)^1$ e) $(-1)^{-360}$ h) $(-1,3)^{24}$
c) $\left(-\frac{11}{8}\right)^{-18}$ f) $(1,1)^{16}$ i) $(2,15)^{-20}$

- 15. Aplica** las propiedades de las potencias para resolver los siguientes ejercicios.

$$\frac{4^4 \cdot 3^3 \cdot (4^8)^{-1}}{3^{-2} \cdot 4^{-6}} = \frac{4^4 \cdot 3^3 \cdot 4^{-8}}{3^{-2} \cdot 4^{-6}} = \frac{4^{4+(-8)} \cdot 3^3}{3^{-2} \cdot 4^{-6}} = \frac{4^{-4} \cdot 3^3}{3^{-2} \cdot 4^{-6}} = 3^{3-(-2)} \cdot 4^{-4-(-6)} = 3^5 \cdot 4^2$$

- a) $\frac{(-2)^5 \cdot 5^{-6} \cdot (-2)^{-8}}{5^{-2} \cdot (-2)^{-5}}$ d) $(-3,5)^2 \cdot (0,5)^2 \cdot (-4)^2$
b) $\frac{\left(\frac{125}{8}\right)^{-1} \cdot \frac{2}{5}}{\left(\frac{4}{25}\right)^2}$ e) $(1,2)^6 \div (1,2)^3 \div (1,2)^{-2}$
c) $(0,1)^{-3} \cdot \frac{1}{(0,1)^{-2}} \cdot (0,1)^{-2}$ f) $\left(\left(\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}\right)^2\right)^1\right)$

- 16. Relaciona** la operación de potencias con su valor escribiendo en la columna B la letra correspondiente.

Columna A

Columna B

- a) $\left(1\frac{2}{8}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{-2}$ _____ $\frac{4}{3}$
b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{6}{9}\right)^{-2}$ _____ $\left(\frac{7}{8}\right)^{-1}$
c) $0,75^{-3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-2}$ _____ -2^{-3}
d) $-2^{-5} \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^{-2}$ _____ $2^6 \cdot 3^3$
e) $\left(\frac{7}{8}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{8}{7}\right)^{-2}$ _____ $\left(\frac{4}{5}\right)^3$
f) $12 \cdot 3^2 \cdot 2^4$ _____ $\left(\frac{3}{2}\right)^5$

17. **Relaciona** la operación de potencias con su valor escribiendo en la columna B la letra correspondiente.

Columna A	Columna B
a) $((-3)^2)^{-2}$	— $\frac{1}{729}$
b) $\left(\left(\frac{0,125}{0,375}\right)^2\right)^{-3}$	— $\frac{1}{64}$
c) $\left(\left(\frac{22}{11}\right)^2\right)^{-3}$	— -4
d) $(3^2)^3$	— $\frac{1}{81}$
e) $\left(\left(\frac{5}{15}\right)^{-1}\right)^{-6}$	— 6561
f) $-(-2^{-1})^{-2}$	— 729

Aplico

18. **Resuelve** los siguientes problemas.

- ¿Cuál es el área de un cuadrado de lado $0,5^2$ m?
- ¿Cuál es el área de un cuadrado de lado $\left(\frac{5}{3}\right)^3$ cm?
- ¿Cuál es el volumen de un cubo de arista $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ cm?
- ¿Cuál es el volumen de un cubo de arista $(1,2)^3$ cm?
- ¿Cuál es el área de una superficie rectangular cuyo largo mide $\left(\frac{13}{8}\right)^5$ m y su ancho mide $\left(\frac{13}{8}\right)^3$ m?
- ¿Cuál es el volumen de una prisma rectangular de largo $\left(\frac{4}{3}\right)^5$ cm, ancho $\left(\frac{4}{3}\right)$ cm y alto $\left(\frac{4}{3}\right)^3$ cm?
- Una superficie rectangular tiene un área de 10^3 cm². Si la medida de su ancho es 64 cm, ¿cuánto mide su largo? Expresa la respuesta como una potencia de exponente 3.

Integro

- ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de utilizar las propiedades vistas en la operatoria con potencias? Menciona dos.
- ¿Qué significa que las propiedades de las potencias son recíprocas? Investiga y explica con tus palabras.

19. **Analiza** las siguientes situaciones.

- Si la base de una potencia es un número entero negativo y el exponente es un número par, ¿qué signo tiene el valor de la potencia?
- Si la base de una potencia es un número racional positivo y su exponente es el número cero, ¿qué signo tiene el valor de la potencia?
- Si la base de una potencia es el número cero, ¿a qué conjunto numérico pertenece el exponente de la potencia si el valor de esta es cero?
- Una potencia de base racional negativa con exponente par, ¿tiene el mismo valor que la potencia cuya base es el inverso aditivo del racional negativo e igual exponente par?

20. **Descubre el error.** Un estudiante calculó el valor de la siguiente potencia. Detecta el error y luego realiza el procedimiento correcto.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \left(-\frac{1}{4}\right)^{-3+2} = \left(-\frac{1}{4}\right)^{-1} = \left(-\frac{4}{1}\right)^1 = -4$$

21. **Describe el procedimiento.** Describe paso a paso el procedimiento para calcular el valor de las siguientes potencias de base racional y exponente entero.

$$\text{a) } \left(-\frac{5}{6}\right)^{-2} \cdot (-0,8\bar{3})^4 \quad \text{b) } \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-3}$$

22. **Argumenta.** Utilizando las propiedades de potencias muestra que:

$$\text{a) } \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m}, m \in \mathbb{Z} \quad \text{b) } \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m, m \in \mathbb{Z}$$

23. **Desafío.** Analiza la resolución del siguiente ejercicio que involucra propiedades de potencias en lenguaje algebraico y luego resuelve el ejercicio propuesto.

$$\frac{1}{9} x^2 y^{-3} \cdot xy \cdot 3x^{-1} = \frac{3}{9} x^{2+1-1} y^{-3+1} = \frac{3}{9} x^2 y^{-2} = \frac{x^2}{3y^2}$$

Ejercicio Propuesto: $\frac{1}{18} x^2 y^2 \cdot (3x)^3 \cdot y^{-1}$

Refuerzo

- ¿Cuál es el área de un cuadrado de lado $(0,3)^{-3}$ cm? ¿Qué propiedad de las potencias utilizaste para calcularlo?
- Expresa como una división de potencias de igual exponente 1^4 .

Palabras clave

- Operaciones combinadas.
- Números racionales.
- Potencias.

¿Cómo resolver problemas que involucran operaciones combinadas con números racionales y potencias?

- La prioridad de las operaciones con números enteros, ¿será la misma al operar con números racionales? ¿Por qué?

La ley de gravitación universal determina a la fuerza de atracción que dos cuerpos de masa m_1 y m_2 ejercen y que se separan por una distancia r .

Esta fuerza se calcula mediante la expresión

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \text{ donde } G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \text{ y es llamada constante de gravitación universal.}$$

¿Con qué fuerza (F) se atraen la Tierra, de masa $5,97 \cdot 10^{24}$ kg y la Luna de masa $7,34 \cdot 10^{22}$ kg, sabiendo que la distancia entre ellas es de $3,84 \cdot 10^8$ m aproximadamente?

Para calcular la fuerza de atracción puedes seguir los pasos:



Paso 1 Identificar los datos.

Masa de la Tierra $\rightarrow m_1 = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg

Masa de la Luna $\rightarrow m_2 = 7,34 \cdot 10^{22}$ kg

Distancia entre los cuerpos $\rightarrow r = 3,84 \cdot 10^8$ m

Constante de gravitación $\rightarrow G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$

Paso 2 Reemplazar en la fórmula $F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$

$$F = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5,97 \cdot 10^{24} \cdot 7,34 \cdot 10^{22}}{(3,84 \cdot 10^8)^2}$$

Observa

- La fuerza se mide en Newton (N). La constante de gravitación universal se mide en Newton por metros al cuadrado, dividido en kilogramos al cuadrado. Al reemplazar en la fórmula, las unidades de medida de metros y kilogramos se eliminan, quedando solo N.

Paso 3 Calcular el resultado de las operaciones combinadas utilizando los criterios de cifras significativas.

$$6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5,97 \cdot 10^{24} \cdot 7,34 \cdot 10^{22}}{(3,84 \cdot 10^8)^2} = \frac{6,67 \cdot 5,97 \cdot 7,34}{(3,84)^2} \cdot \frac{10^{-11} \cdot 10^{24} \cdot 10^{22}}{(10^8)^2}$$

Se aplicó la propiedad de potencias de igual base.

$$= \frac{292}{14,7} \cdot \frac{10^{-11+24+22}}{10^{16}}$$

Se agruparon decimales y potencias.

$$= 19,9 \cdot \frac{10^{35}}{10^{16}} = 19,9 \cdot 10^{19}$$

La Tierra y la Luna se atraen con una fuerza de $1,99 \cdot 10^{20}$ N.

¿Cómo abordar este tipo de ejercicios combinados?

$$\frac{2}{3} - \frac{5}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}$$

Paso 1 ▶ Identificar las operaciones involucradas y aplicar la prioridad de las operaciones.

Paréntesis → Potencias → Multiplicación → División → Adición → Sustracción

En este caso existe una sustracción entre un racional y una división indicada por la línea fraccionaria que a su vez representa un paréntesis, por lo tanto, se realiza primero el paréntesis más interior.

En este caso, esta adición está en el paréntesis más interior.

$$\frac{2}{3} - \frac{5}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}$$

Si escribieras la operación con paréntesis sería:

$$\frac{2}{3} - \left\{ 5 \div \left[2 + 1 \div \left(2 + \frac{1}{3} \right) \right] \right\}$$

El paréntesis rojo es el más interior.

Paso 2 ▶ Realiza la operación que está en el paréntesis más interior al más exterior.

En este caso hay una adición y una división.
Por la prioridad se realiza primero la división.

En este caso hay una sustracción y una división.
Por la prioridad se realiza primero la división.

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} - \frac{5}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}} &= \frac{2}{3} - \frac{5}{2 + \frac{1}{\frac{7}{3}}} = \frac{2}{3} - \frac{5}{2 + \frac{3}{7}} = \frac{2}{3} - \frac{5}{\frac{17}{7}} = \frac{2}{3} - \frac{35}{17} = \frac{34 - 105}{51} = \frac{-71}{51} = -1\frac{20}{51} \end{aligned}$$

$$2 + \frac{1}{3} = \frac{6+1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$2 + \frac{3}{7} = \frac{14+3}{7} = \frac{17}{7}$$

$$\frac{1}{\frac{7}{3}} = 1 \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{5}{\frac{17}{7}} = 5 \cdot \frac{7}{17} = \frac{35}{17}$$

El resultado de la operación es $-1\frac{20}{51}$.



Razona y comenta

- ¿Por qué es necesario comenzar con la operación que está en el paréntesis más interior al abordar estos ejercicios? Explica.
- En los ejercicios vistos anteriormente, ¿qué dificultades pueden presentarse al ser calculados con el uso de la calculadora? Menciona dos.

En resumen

Para **resolver operaciones combinadas** con números racionales y potencias se debe tener en cuenta la prioridad de las operaciones y ocupar las propiedades de las operaciones para que puedas simplificar los cálculos.

Repaso

1. **Calcula** las siguientes operaciones combinadas con números enteros.

- a) $3 - 5 + 4 - 9$ e) $(-12) \div 3 - 11 + 5$
 b) $48 + 19 - (13 + -35)$ f) $26 - 84 \div (-4) + 16$
 c) $5 \cdot (-2) + 8 - 4$ g) $(-7) + 38 \div (-2) + 5 \cdot 15$
 d) $(-71) - 5 \cdot (-90)$ h) $45 - 63 \cdot (-9) - 32 \div 16$

2. **Calcula** las siguientes operaciones combinadas.

- a) $3 - 0,8 + 4$ e) $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} + 2$
 b) $41 - 5,69 - 1,02$ f) $\frac{8}{3} - \frac{1}{4} \cdot 3$
 c) $6,5 \cdot 3 - 4,5$ g) $\frac{47}{12} - 5 + \frac{13}{3}$
 d) $(-8) + 1,2 + 3,92 \div 0,2$ h) $\frac{16}{7} \cdot 3 - \frac{1}{4} \div \frac{1}{2} - 1$

3. **Aplica** las propiedades de potencias y calcula las siguientes expresiones.

- a) $\frac{4 \cdot 3^2 \cdot 9^3 \cdot 8}{27 \cdot 2^5}$ e) $\left(\frac{5}{2}\right)^{-3} \cdot 2,5^{-3}$
 b) $\left(\frac{8 \cdot 2 \cdot 7^3}{2 \cdot 98}\right)^5$ f) $(-0,7)^{-4} \cdot (-0,7)^{-6}$
 c) $\left(\frac{3}{4}\right)^6 \div \left(\frac{3}{4}\right)^{-5}$ g) $\frac{2^3 \cdot 2,5^{-3} \cdot 8}{3,5^{-4} \cdot 32}$
 d) $\left(-\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-5}$ h) $\frac{2^{2^3} \cdot 5^3 \cdot (2^3)^2 \cdot 5^5}{2^3 \cdot 5^3 \cdot 2^8 \cdot 5^4}$

Práctica guiada

4. **Calcula** las siguientes operaciones combinadas. Puedes usar la calculadora.

$$\frac{\frac{1}{6} + \frac{2}{7}}{\frac{8}{9}} = \frac{\frac{7+12}{42}}{\frac{8}{9}} = \frac{25}{42} = \frac{25}{42} \cdot \frac{3}{8} = \frac{19}{42} \cdot \frac{3}{8} = \frac{57}{112}$$

- a) $\frac{1}{8} - \frac{5}{7}$ b) $\left(-\frac{7}{5}\right) \cdot \frac{30}{49}$
 $\frac{2}{9}$ $\frac{2}{7} + \frac{1}{9}$

c) $\frac{\frac{8}{9} \div \left(-\frac{64}{63}\right)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}$

h) $\frac{3 \div \frac{5}{7}}{0,2}$

d) $\frac{\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{4}{9}\right)}{0,5}$

i) $\frac{3 + \frac{1}{4}}{2}$

e) $\frac{\left(0,3 \cdot \frac{3}{5}\right) + 11,2}{\left(\frac{2}{3} - \frac{7}{2}\right) \cdot 4,23}$

j) $\frac{5}{1 + \frac{3}{2 + \frac{1}{4}}}$

f) $\frac{\frac{10}{3} \cdot \left(-\frac{9}{2}\right)}{0,6}$

k) $\frac{12 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}{\left(1,5 - \frac{1}{2}\right) \div \frac{12}{30}}$

g) $\frac{\left(\left(-\frac{4}{3}\right) + \frac{2}{7}\right) \cdot 2,16}{\left(1,5 \div \frac{7}{3}\right) - \frac{2}{3}}$

l) $\frac{1,5 + \left(\frac{1}{4} \cdot 4 \frac{1}{5}\right)}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}$

5. **Calcula** el valor de las siguientes operaciones combinadas con números racionales y potencias.

$$\left(\frac{3}{5} + \frac{2}{7}\right)^2 = \left(\frac{21+10}{35}\right)^2 = \left(\frac{31}{35}\right)^2 = \frac{961}{1225}$$

a) $\left(\frac{1}{2} + 1\right)^2$

g) $\left(-\frac{13}{9}\right) - \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \div 5$

b) $\left(\frac{12}{7} + \left(-\frac{8}{3}\right)\right)^2$

h) $\frac{9}{7} \cdot \left(-\frac{49}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$

c) $\left(\frac{3}{4} - \frac{8}{3}\right)^2$

i) $\left(\left(\frac{26}{8}\right)^{-1} \div \left(\frac{7}{5}\right)^{-1}\right)^{-1}$

d) $\left(\frac{9}{8} - \frac{1}{3}\right)^{-1}$

j) $\left(\left(\frac{81}{64} \div \left(-\frac{126}{45}\right)\right)^{-1}\right)^2$

e) $\left(\frac{5}{6} \cdot \frac{36}{125}\right)^{-2}$

k) $\frac{1,85 \cdot 0,25}{4,5^{-2}}$

f) $\left(-\frac{3}{8}\right)^2 \div \left(\frac{8}{5} - 10\right)$

l) $\frac{1}{7} \div 0,1 - \frac{14}{9} + 4^{-1}$

Aplicaciones en la Matemática

Aplico

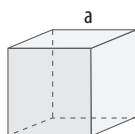
6. Resuelve los siguientes problemas.

- a) La medida del lado de un cuadrado es $\frac{1}{4}$ de su perímetro. Si el perímetro del cuadrado es 20,3 cm, ¿cuál es el área del cuadrado? ¿Cuánto mide su lado?

- b) ¿Cuál es el volumen de un cubo de arista 1,2 cm?

- c) La superficie total de un cubo se calcula con la fórmula $A_T = 6a^2$. ¿Cuál es el área total del cubo anterior?

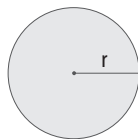
Volumen del cubo: a^3
donde a es su arista.



- d) Calcula el volumen y la superficie total de un cubo de lado $0,3$ cm. Describe paso a paso tu procedimiento.

- e) ¿Cuál es el área de un círculo de radio $\frac{2}{3}$ m? Utiliza π redondeado a dos cifras decimales.

Área del círculo: πr^2
donde r es el radio.



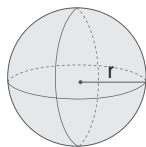
- f) El diámetro de una circunferencia es $3,4$ cm. ¿Cuál es el área de la circunferencia?

- g) El perímetro de un círculo se calcula con la fórmula $P = 2\pi r$. ¿Cuál es el perímetro del círculo anterior?

- h) Calcula el área y el perímetro de un círculo de radio $1,6$ cm. Describe paso a paso tu procedimiento.

- i) ¿Cuál es el volumen de una esfera de radio $\frac{3}{4}$ m? Utiliza π redondeado a dos cifras decimales.

Volumen de la esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$
donde r es el radio.



- j) La superficie total de una esfera se calcula con la fórmula $A = 4\pi r^2$. ¿Cuál es el área total de la esfera anterior?
- k) Calcula el volumen y la superficie total de una esfera de radio $1,16$ cm. Describe paso a paso tu procedimiento.
- l) El volumen de un cono se calcula mediante la siguiente expresión $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$, donde r es el radio de la base del cono y h es su altura. Si el volumen del cono es de $0,53\pi$ cm³ y su base tiene un radio que mide $\frac{6}{5}$ cm, ¿cuál es la medida de su altura?
- m) Calcula el volumen del cono sabiendo que el área de la base es $\frac{1}{9}\pi$ cm² y su altura es de $1,2$ cm. Describe paso a paso tu procedimiento.
- n) El volumen de una pirámide recta se calcula mediante la fórmula $V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$, donde A_b es el área basal de la pirámide, y h corresponde a su altura. ¿Cuál es el volumen de una pirámide de base cuadrada cuya altura es $1,5$ cm y la medida del lado de la base es de $\frac{8}{3}$ cm?
- o) En un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide $\frac{1}{2}$ cm y su hipotenusa mide 3,6 cm. ¿Cuál es la medida del otro cateto? Recuerda que el teorema de Pitágoras dice que en un triángulo rectángulo de catetos a y b e hipotenusa c , se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$.

Aplicaciones en la Física

7. Resuelve los siguientes problemas.

- a) Cuando la rapidez de un objeto en movimiento es constante esta se puede calcular mediante la expresión $v = \frac{d}{t}$ donde **d** es la distancia que ha recorrido el objeto en movimiento durante un tiempo **t**. ¿Cuál es la rapidez constante de un móvil que ha recorrido una distancia de 90 km en un tiempo de 50 minutos?
- b) Si un móvil va a 55 km/h, ¿cuál es la distancia que puede alcanzar a esa rapidez en 40 minutos?
- c) La energía cinética se calcula mediante la expresión $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ donde **m** corresponde a la masa del cuerpo en movimiento y **v** a la rapidez de dicho cuerpo. ¿Cuál es la energía cinética de un automóvil cuya masa es de 850 kg y que recorre una carretera a una rapidez de 80 m/s?
- d) Si la energía cinética de un móvil es de $2,25 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ y su masa es de 500 kg, ¿cuál es su rapidez?
- e) ¿Cuánto disminuye la energía cinética de un automóvil de 400 kg si su rapidez varía de 25 m/s a 15 m/s?
- f) La fuerza de atracción de dos cuerpos se calcula mediante la expresión $F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$, donde $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$. ¿Con qué fuerza se atraen dos cuerpos en el espacio, cuyas masas son de 1 kg y 2 kg y están situadas a 0,5 m de distancia uno del otro?
- g) Si la distancia entre los cuerpos en el espacio del problema anterior aumentara al doble, ¿cómo varía la fuerza de atracción entre ellos? Justifica.
- h) ¿Crees que la conclusión obtenida en la pregunta anterior se mantendrá para cualquier par de cuerpos en el espacio? Justifica.

Aplicaciones en la resolución de problemas

8. Resuelve los siguientes problemas utilizando los cinco pasos.

- a) Si una llave vierte $4\frac{1}{5}$ litros y otra $3\frac{3}{4}$ litros de agua por minuto, ¿en cuánto tiempo llenarán un depósito de 62 litros de capacidad cada una?
- ¿Qué entendiste del problema?
 - ¿Qué harías para resolverlo?
 - ¿Cómo ejecutarías la estrategia?
 - ¿Cómo verificarías el resultado?
 - ¿Cómo interpretas el resultado obtenido?
- b) Francisco cada mes deposita en el banco $\frac{1}{4}$ del dinero que depositó el mes anterior. Si se sabe que en el primer mes depositó \$3000 y en el cuarto mes, además depositó $\frac{5}{9}$ del dinero inicial, ¿cuánto depositó el cuarto mes?
- c) Un vendedor de productos lácteos vendió en una semana $\frac{2}{3}$ de lo que vendió la semana anterior. Si la semana anterior vendió \$850 300 y su comisión corresponde a $\frac{2}{3}$ de lo vendido en esa semana, ¿cuál es la ganancia del vendedor?
- d) Se necesitan 5 tiras de $5\frac{3}{5}$ cm de lana roja para diseñar un chaleco y además, se necesitan los $\frac{2}{5}$ del resto de lana que queda del ovillo. Si el ovillo es de 100 cm, ¿cuántos metros de lana quedan en el ovillo?
- e) Un vendedor de fiambrería vendió a una persona $\frac{1}{4}$ de los 5 kg que pesa una pieza de jamón. Luego viene otra persona y compra $\frac{1}{4}$ de lo que va quedando de la pieza de jamón. Una última persona compra nuevamente $\frac{1}{4}$ de lo que va quedando de la pieza. ¿Cuántos kilogramos de jamón quedan en la pieza?

f) Una población de bacterias se triplica cada 30 minutos. Además se estima que cierto alimento debe tener al menos 1 968 300 de estas bacterias para que se determine como contaminado.

- Haz un esquema que muestre el crecimiento de la población de bacterias al cabo de 4 horas.
- ¿Cuántas bacterias habrá al cabo de 3 horas si inicialmente habían 100?
- Si inicialmente el alimento tiene 100 bacterias, ¿cuánto tiempo debió pasar para que estuviera contaminado?

g) Un ciclista cada semana va aumentando su rutina de entrenamiento para participar en una carrera.

La primera semana recorre 0,6 km y cada semana recorre $\frac{3}{2}$ de lo que recorre la semana anterior.

- ¿Cuántos kilómetros recorre la segunda semana?
- ¿Qué expresión te permite calcular los kilómetros recorridos en la semana s ?
- ¿Qué estrategia utilizaste para determinar la expresión pedida en la pregunta anterior?
- ¿Cuáles fueron los pasos mentales que te permitieron llegar a la estrategia?
- Si en una semana el ciclista recorrió 2,025 km, ¿cuántas semanas pasaron desde que empezó a entrenar para recorrer dicho kilometraje? Ayúdate de una calculadora para responder.
- ¿Qué operaciones están involucradas en la pregunta anterior?
- ¿Qué estrategia utilizaste para llegar a la respuesta?

Integro

- ¿Por qué existe una prioridad en las operaciones? ¿Qué sucedería si no existiera?
- ¿Por qué las propiedades conmutativas, asociativas, distributivas, inverso y opuesto, entre otras, facilitan los cálculos al resolver operaciones combinadas? Justifica.

9. **Conecta.** La masa de un cuerpo celeste se calcula mediante la expresión $M = \frac{g \cdot r^2}{G}$ donde g es la gravedad asociada al cuerpo celeste, r (en metros) es el radio de él y G es la constante de gravitación universal equivalente a $6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{Kg^2}$. Si la Luna tiene una gravedad de $1,62 \frac{m}{seg^2}$ y un radio de 1 738 000 m, ¿cuál es la masa de la Luna? Ayúdate de la calculadora para determinarlo.

10. **Descubre el error.** El volumen de una esfera se puede determinar mediante la expresión:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Si el radio de la esfera es 1,7 cm, ¿cuál es el error que cometió Antonia al operar los valores de la expresión?

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (1,7)^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \frac{17^3}{10} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4913}{10} \pi = \frac{19\,652}{30} \pi \approx 655,1\pi$$

11. **Describe el procedimiento.** Describe el procedimiento para resolver la siguiente operación combinada.

$$\frac{-\left(\left(-\frac{4}{9}\right) - 1, \overline{10}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{8}{9} \div \left(-\frac{1}{3}\right)\right)}{1, \overline{3}}$$

12. **Argumenta.** ¿Qué propiedad permite calcular el

valor de $\left(\frac{\frac{3}{5}}{\frac{6}{7}}\right)^{-1}$? Justifica tu respuesta.

Refuerzo

1. El área total de un cilindro de altura h y radio r se calcula con la fórmula $2\pi r(h + r)$. ¿Cuál es el área total de un cilindro de radio $\frac{1}{5}$ cm y altura 0,8 cm?
2. Describe paso a paso el procedimiento que utilizaste para resolver el problema anterior.



Comprender las potencias de base racional y exponente entero y aplicar sus propiedades (lecciones 10 y 11).

1 Expresa como potencias de exponente entero positivo. Luego calcula su valor.

- | | |
|--------------|-------------------|
| a. 7^{-2} | e. $-(-4)^{-3}$ |
| b. 2^{-6} | f. $(-3)^{-4}$ |
| c. 5^{-3} | g. $-(-1)^{-100}$ |
| d. -8^{-2} | h. -1^{-1025} |

2 Calcula las operaciones con potencias.

- a. $3^{-2} + 3^{-2}$
- b. $-5^{-2} \cdot 2^2 + 3^{-1}$
- c. $(-7)^{-2} \cdot 2^{-2} + 3^{-2}$
- d. $\frac{1}{10^{-3}} \cdot (-3)^{-4}$
- e. $-(-9)^{-1} \cdot \left(\frac{-3^{-3}}{3^{-1}}\right)^{-1}$
- f. $\frac{1}{7^{-2}} - \frac{4^{-3}}{-(-1)^{1002}}$

3 Calcula las expresiones.

- | | |
|---------------------------------------|--|
| a. $\left(\frac{1}{2}\right)^6$ | f. $(0,3)^{-3}$ |
| b. $\left(\frac{5}{3}\right)^3$ | g. $(1,2\bar{5})^2$ |
| c. $\left(-\frac{4}{2}\right)^{-5}$ | h. $-\left(\frac{-0,2}{0,1}\right)^{-6}$ |
| d. $\left(-\frac{11}{66}\right)^{-2}$ | i. $\frac{(-25)^{-5}}{(-5)^{-5}}$ |
| e. $-\left(-\frac{1}{3}\right)^4$ | j. $-\frac{(-16)^{-2}}{(-3)^{-2}}$ |

4 Evalúa las siguientes afirmaciones. Justifica.

- Toda potencia de base distinta de 0 y exponente igual a 0 será 0.
- Si la base de una potencia es menor que 0 y su exponente es un número par, su valor es mayor que 0.
- El valor de una potencia de base y exponente menor que 0 es siempre mayor que 0.
- Que el resultado de una potencia sea un número entero depende del exponente de esta.
- Si la base de una potencia es un número racional y su exponente es un número entero positivo, su valor siempre es un número entero.

5 Aplica las propiedades de potencias para resolver las operaciones.

- | | |
|--|---|
| a. $\frac{64}{-2^5}$ | g. $(-0,5)^{-7} \div (-0,5)^{-3}$ |
| b. $8^{10} \cdot 8^{-8}$ | h. $(-5^2)^{-1}$ |
| c. $46^3 \cdot 46^2$ | i. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$ |
| d. $5^{-2} \cdot \frac{1}{5}$ | j. $\left(\frac{3}{4}\right)^1 \div \left(\frac{3}{4}\right)^{-4}$ |
| e. $\left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot 4^{-3}$ | k. $\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)^{-6}$ |
| f. $(-7)^{-8} \cdot (-7)^{-11}$ | l. $\frac{(-2)^5 \cdot 5^{-6} \cdot 5 \cdot (-2)^{-8}}{5^{-2} \cdot (-2)^{-5}}$ |

Resolver problemas que involucran números racionales y potencias (lección 12).

6 Expresa la potencia que desarrolla los siguientes problemas.

- ¿Cuál es el área de un cuadrado de lado $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ m?
- ¿Cuál es el volumen de un cubo cuya arista mide $0,3$ m?
- La mitad de un patio de forma rectangular de lados $\frac{19}{8}$ m y $\frac{3}{2}$ m se cubrirá con pasto. ¿Cuál es la superficie que será rellenada?

7 Resuelve las operaciones combinadas.

- $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{8}\right)^{-2}$
- $\left(\frac{1}{2} - 1\right)^{-1}$
- $\left(\left(-\frac{6}{5}\right) + \frac{1}{3}\right)^{-3}$
- $\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{7}{9}\right)^{-1}$
- $\left(\frac{5}{6} - \frac{2}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)$

8 Resuelve los siguientes problemas.

- La medida de la diagonal de un rectángulo se calcula mediante la expresión $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ donde **a** y **b** son las medidas de los lados del rectángulo. ¿Cuál es la medida de la diagonal de un rectángulo de lados $0,75$ m y $1,5$ m?
- El área total de un cubo se calcula mediante la expresión $A_T = 6a^2$ donde **a** representa la medida de la arista del cubo. ¿Cuál es la medida de la arista si el área total del cubo es $37,5$ m²?
- El volumen de una esfera se puede calcular mediante la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. ¿Cuál es el volumen de la esfera de radio 3 cm? Considera $\pi = 3,14$ aproximadamente.

- Una de las fórmulas que permite determinar el área de un triángulo cualquiera de lados **a**, **b** y **c** es la fórmula de Herón cuya expresión es la siguiente:

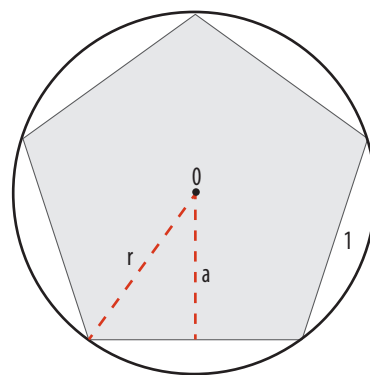
$$A = \frac{1}{4} \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4)}$$

¿Cuál es el área de un triángulo cuyos lados miden $1,5$ cm, 2 cm y $\frac{5}{2}$ cm?

- La apotema de un polígono regular se puede determinar a través de la fórmula

$$a = \sqrt{r^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}, \text{ donde } r \text{ es el radio circunscrito}$$

al polígono y **l** es el lado del polígono. ¿Cuál es la apotema de un polígono regular circunscrito de lado 6 cm y radio 5 cm?



- La distancia que un móvil puede alcanzar partiendo a una velocidad v_0 en un tiempo **t** y una aceleración constante **a** está dada por la fórmula $d = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$. Si un tren viaja inicialmente a $20 \frac{m}{s}$ a una aceleración constante de $3 \frac{m}{s^2}$, ¿qué tan lejos llegará al cabo de 30 segundos?
- Cuando un automóvil recorre una curva circular, la fuerza que ejerce hacia el centro de la curvatura es llamada fuerza centrípeta. Esta fuerza se calcula mediante la expresión $f = \frac{m \cdot v^2}{t}$ donde **m** es la masa del cuerpo en movimiento, **v** es la rapidez y **t** es el tiempo. Determina la fuerza centrípeta que ejerce un automóvil cuya masa es de $\frac{8503}{10}$ kg y va a una rapidez de 45 km/h durante $2,5$ horas.



Parque nacional Torres del Paine

Problema

Un bosque de 80 hectáreas que actualmente se está reforestando tiene $50\,000\text{ m}^3$ de madera y se sabe que la madera del bosque crece cada año $\frac{5}{4}$ de lo que se tenía anteriormente. ¿Cuánta madera tendrá el bosque al cabo de 4 años?

Paso 1 **Comprendo.** ¿Qué entendiste del problema?

Se debe determinar la cantidad de madera que habrá en el bosque en 4 años más.

Paso 2 **Planifico.** ¿Qué harías para resolver el problema?

Aplicar la estrategia "hacer una tabla" que represente la cantidad de madera que tiene el bosque a medida que transcurren los años, hasta llegar al año cuatro.

Paso 3 **Resuelvo.** ¿Cómo ejecutarías la estrategia?

La tabla muestra la cantidad de madera que tiene el bosque a medida que transcurren los años:

Danny Perich Campana (1954)

es un profesor de Estado en Matemática, chileno, diplomado en Planificación y Desarrollo de Organizaciones Educativas.

Entre sus creaciones se puede destacar el Portal Web Sector Matemática, además de publicaciones tales como: Guías de Aprendizaje: "Un mundo Q de fracciones para sumar, compartir e imaginar", "Aprender con Educared" y "Función cuadrática: La parábola". Libros de ejercicios Simce: "Cuarto Básico", "Octavo Básico" y "Segundo Medio". Libros de lectura: "Las aventuras de Daniel" y "1200 Ejercicios de Matemática Múltiple Choice"

Años	Cantidad de madera (m^3)
0	50 000
1	$50\,000 \cdot \frac{5}{4}$
2	$50\,000 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4}$
3	$50\,000 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4}$
4	$50\,000 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4}$

Años	Potencias	Cantidad de madera (m^3)
0	$50\,000 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^0$	50 000
1	$50\,000 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^1$	62 500
2	$50\,000 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2$	78 125
3	$50\,000 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^3$	97 656,25
4	$50\,000 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^4$	122 070,3125

Paso 4 Reviso. ¿Cómo saber que es correcto el resultado?

Al calcular $50\,000 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^4$, se tiene que:

$$50\,000 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^4 = 50\,000 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} = \frac{50\,000 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{31\,250\,000}{256} = 122\,070,3125 \approx 122\,070$$

Paso 5 Comunico. ¿Cómo interpretas el resultado obtenido?

Al cabo de 4 años, el bosque tendrá, aproximadamente, $122\,070 \text{ m}^3$ de madera.

Resuelve los siguientes problemas.

- Si un ser vivo al momento de morir tiene 1000 unidades de carbono 14, después de 5700 años tendrá 500 unidades, después de 11 400 años tendrá 250 unidades, y así sucesivamente.
 - Completa la tabla utilizando la información anterior.

Periodos de 5 700 años	Unidades de carbono 14
0	1000
1	
	250
	125
4	

 - ¿Qué puede concluir una arqueóloga de un fósil que tiene 43,75 unidades de C14 si la especie al momento de morir tenía 700 unidades de este material?
 - Escribe una expresión matemática que represente la regularidad que se produce entre los periodos de 5700 años transcurridos después de la muerte de una especie y las unidades de C14 presentes en el fósil.
- Al dejar caer una pelota, esta cae desde un metro de altura y luego en cada rebote asciende $\frac{3}{4}$ de la altura anterior. ¿Cuál es la altura en centímetros que alcanzará la pelota al quinto bote?
- A una hoja cuadrada de lado 10 cm, se le hace un doblés con el que se obtiene un rectángulo cuya área es la mitad del área del cuadrado. Luego, se le vuelve hacer un doblés, quedando un cuadrado cuya superficie es la mitad del rectángulo obtenido anteriormente. ¿Cuál es el área de la figura resultante al hacer el sexto doblés?
- La población inicial en una ciudad de Chile es de 1 000 725 habitantes en el año 2007, pero al transcurrir un año la población crece en $\frac{6}{5}$ de la población anterior. ¿Cuál será la cantidad de habitantes que se espera en esa ciudad para el 2014? Expresa matemáticamente la potencia que representa la regularidad.
- La presión atmosférica al nivel del mar es de 1 atmósfera. Al subir 1 km de altura, esta presión corresponde a 0,9 de la presión que se tenía inicialmente. ¿Cuál será la presión atmosférica a los 3 km de altura sobre el nivel del mar?

Reflexiona

- ¿Qué opinas de la estrategia **hacer una tabla**? Comenta con tus compañeros o compañeras las ventajas y desventajas de esta estrategia.
- ¿En qué otras situaciones te ha servido esta estrategia? Describe dos situaciones.
- ¿Qué otra estrategia conoces para resolver este tipo de problema? Describe una.



Operatoria de números racionales

¿Cuál de los siguientes procedimientos fue realizado correctamente? Compara los procedimientos paso a paso, guiándote por las flechas.

Caso 1

$$1 + \frac{2}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = 1 + \frac{2}{1 + \frac{1}{\frac{5}{2}}} = 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{5}} = 1 + \frac{2}{\frac{7}{5}} = 1 + \frac{4}{7} = \frac{11}{7}$$

Caso 2

$$1 + \frac{2}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = 1 + \frac{2}{1 + \frac{1}{\frac{5}{2}}} = 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{5}} = 1 + \frac{2}{\frac{7}{5}} = 1 + \frac{10}{7} = \frac{17}{7}$$

Razona

y comenta

- ¿Cuál es el procedimiento correcto?
- En el procedimiento erróneo, ¿cuál es el paso que tiene error? ¿Por qué?
- ¿Influye en el resultado el error cometido en el procedimiento?

1 Analiza cuál de los siguientes procedimientos es el correcto y en el caso incorrecto explica el error.

Caso 1

$$2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{\frac{1}{2} + 2}} = 2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{\frac{5}{2}}} = 2 + \frac{2}{2 + \frac{4}{5}} = 2 + \frac{2}{\frac{14}{5}} = 2 + \frac{10}{14} = \frac{32}{14} = \frac{16}{7}$$

Caso 2

$$2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{\frac{1}{2} + 2}} = 2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{\frac{5}{2}}} = 2 + \frac{2}{2 + \frac{4}{5}} = 2 + \frac{2}{\frac{14}{5}} = 2 + \frac{10}{14} = \frac{38}{14} = \frac{19}{7}$$

2 Calcula los siguientes ejercicios propuestos.

a. $\frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}$

b. $\frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}}{1 + \frac{-1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}}$

c. $3\frac{1}{3} + \frac{5}{8\frac{1}{2} + \frac{1}{8}}$

d. $\frac{\frac{5}{4} \div \frac{2}{7}}{\frac{8}{9} \cdot \frac{9}{8}} + \frac{6}{1} \cdot 14$

Potencias de base racional y exponente entero

¿Cuál de los siguientes procedimientos fue realizado correctamente? Compara los procedimientos paso a paso, guiándote por las flechas.

Caso 1

$$(0,004)^{-2} = \left(\frac{1}{0,004}\right)^2 = \frac{1^2}{0,004^2} = \frac{1}{0,016} = \frac{1}{\frac{16}{1000}} = \frac{1000}{16} = \frac{125}{2}$$

Caso 2

$$(0,004)^{-2} = \left(\frac{1}{0,004}\right)^2 = \frac{1^2}{0,004^2} = \frac{1}{\left(\frac{4}{1000}\right)^2} = \frac{1}{\frac{16}{1000\,000}} = \frac{1000\,000}{16} = 62\,500$$

Toma nota

- En este tipo de ejercicio tienes que identificar qué tipo de operaciones se están trabajando.

Razona

y comenta

- ¿Cuál es el procedimiento correcto?
- En el procedimiento erróneo, ¿cuál es el paso que tiene error? ¿Por qué?
- ¿Influye en el resultado el error cometido en el procedimiento?

1 Analiza cuál de los siguientes procedimientos es el correcto y en el caso incorrecto, explica el error.

Caso 1

$$(-0,2)^{-2} = \left(\frac{1}{-0,2}\right)^2 = \frac{1^2}{(-0,2)^2} = \frac{1}{\left(-\frac{2}{10}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{100}} = \frac{100}{4} = 25$$

Caso 2

$$(-0,2)^{-2} = \left(-\frac{1}{0,2}\right)^2 = \frac{1^2}{0,2^2} = \frac{1}{0,4} = \frac{1}{\frac{4}{10}} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

2 Calcula los siguientes ejercicios propuestos.

a. $(0,05)^{-3}$

b. $(0,002)^{-6}$

c. $(-1,3)^{-2}$

d. $\left(\frac{-10}{2,5}\right)^{-2}$

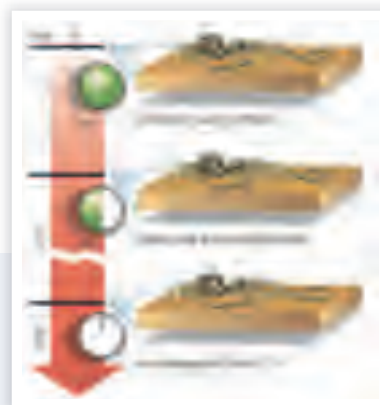
Reflexiona

- ¿Cuál es el error que cometes con frecuencia al resolver este tipo de ejercicios? ¿Coincide con los mostrados en esta página?
- ¿Qué harás cuando te enfrentes a ejercicios de este tipo para evitar errores?



La prueba del carbono 14 (C14)

En el inicio de esta unidad se mostraron los fósiles encontrados de la cultura chinchorro datados con la prueba del carbono 14. A continuación se presenta un taller relacionado con este tema.



Taller

Reúnanse en parejas, observen el esquema y respondan las preguntas.

Tiempo	Fracción de cantidades de carbono 14	
0 años	Cantidad original de carbono 14	
Después de 5700 años	$\frac{1}{2}$ queda	$\frac{1}{2}$ desintegrado
Después de 11 400 años	$\frac{1}{4}$ queda	$\frac{3}{4}$ desintegrado
Después de 17 100 años	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$ desintegrado
Después de 22 800 años	$\frac{1}{16}$	$\frac{15}{16}$ desintegrado

Para saber más...

¿Cómo es el método del C14?

El carbono 14 es una variante del carbono que forma parte del CO_2 presente en todos los seres vivos. Mientras viven, las plantas y los animales absorben bióxido de carbono del aire, y cuando mueren, sus átomos de C14 comienzan a desintegrarse. Como se conoce la velocidad de desintegración del C14, la edad de los restos puede calcularse contando el número total de átomos de carbono que contienen.

A medida que las sustancias radiactivas se desintegran, liberan partículas, y el tiempo que tardan en perder la mitad de ellas se conoce como su vida media. El C14 tiene una vida media de unos 5700 años, así que al cabo de dos vidas medias (unos 11 400 años) solo queda una cuarta parte de él, y después de tres vidas medias queda apenas la octava parte.

Fuente: <http://www.museoantropologia.unc.edu.ar/carbono%2014.htm>

- Transcurridos 5700 años, ¿qué sucede con el carbono 14?
- Transcurridos 4 periodos de 5700 años, ¿qué fracción del carbono 14 original queda?
- La fracción anterior, ¿a qué potencia corresponde?
- Si un ser vivo al momento de morir tiene 500 unidades de C14, ¿cuántas unidades tendrá después de 5700 años? ¿y después de 11 400 años?
- La prueba del C14 deja de ser útil para los fósiles de más de 57 000 años, ¿podrías explicar por qué? Investiga.

Reflexiona

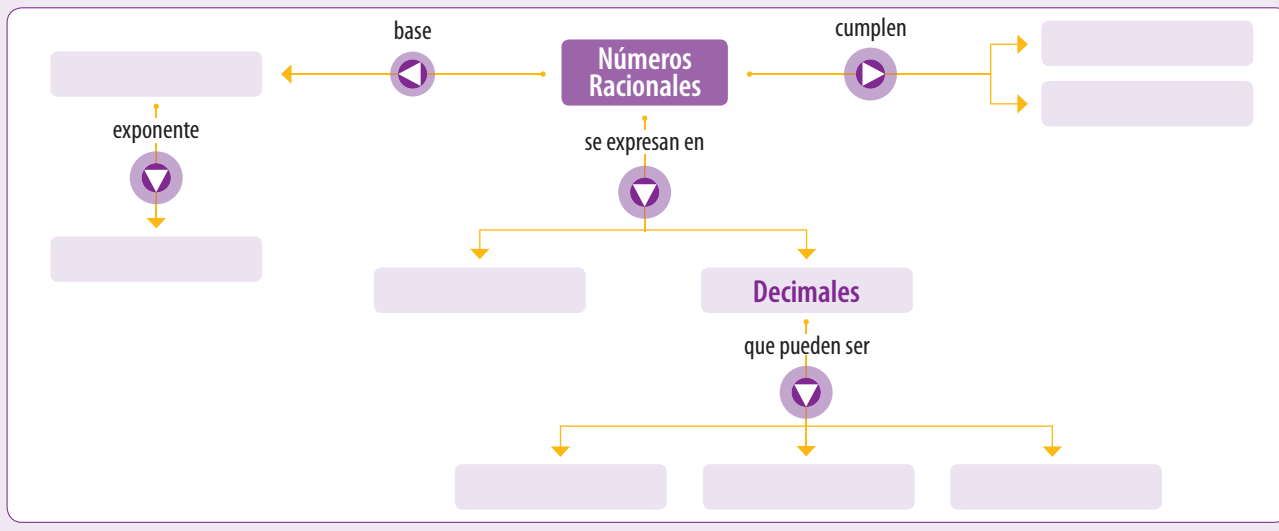
- ¿La prueba del C14 resulta útil para conocer la edad de existencia de rocas o minerales? ¿Por qué?
- ¿Cómo están involucradas las potencias de base racional y exponente entero en la prueba del C14?
- Investiga otras situaciones en que estén involucradas potencias de base racional y exponente entero.



¿Cómo se llama?

- Organiza las siguientes palabras en el mapa conceptual.

Semiperiódicos – Clausura – Fracción – Enteros – Potencia – Densidad – Periódicos – Finitos



¿Cómo se hace?

- Para **comparar** números racionales puedes hacer lo siguiente:

$$\frac{3}{4} - 0,7\bar{4} \rightarrow 0,75 > 0,744444\dots$$

$$\rightarrow 5 > 4$$

$$\rightarrow \frac{3}{4} > 0,7\bar{4}$$

$$\frac{5}{9} - \frac{7}{11} \rightarrow 5 \cdot 11 - 9 \cdot 7$$

$$\rightarrow 55 > 63$$

$$\rightarrow \frac{5}{9} > \frac{7}{11}$$

- Para **resolver** operaciones combinadas puedes realizar lo siguiente:

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2 - 1 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot 2 - 1$$

$$= \frac{25}{36} \cdot 2 - 1 = \frac{25}{18} - 1 = \frac{7}{18}$$

Ahora refuerza

- Compara y ordena** en forma creciente los siguientes números racionales.

a. $1,4\bar{1}$; $1,4\bar{1}$; $1,41$

b. $2,308$; $2,\bar{3}$; $2,38$

c. $6,\bar{13}$; $6,\bar{13}$; $6,13$

- Calcula** el valor de las expresiones.

a. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \div \left(\frac{4}{9}\right)^{-2}$

b. $\frac{2^{-1} \cdot 3^4 \cdot 4}{8 \cdot 9} + \frac{3}{5}$

c. $\left(\frac{2}{3} - 3\frac{1}{4}\right)^{-1} \div \left(\frac{12}{5}\right)^2$

d. $\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left[(-2)^4\right]^2 \cdot 2^{-3}}$

Tips para estudiar

- Al **aproximar** números decimales, truncar o redondear dependerá del problema planteado.
- Para **resolver operaciones** combinadas entre fracciones y potencias debes recordar la prioridad de las operaciones.
- Si en las operaciones combinadas aparecen números decimales periódicos y semiperiódicos, no olvides transformarlos en fracción antes de operar con ellos. Si estos números son negativos, realiza la transformación considerando su valor absoluto, luego coloca el signo negativo.

Reflexiona

- ¿Cuáles son los conceptos principales de la unidad? ¿Por qué?
- ¿Qué procedimiento te resultó más difícil de entender? Explícaselo a un compañero o compañera.
- Si un compañero o compañera te pregunta: "¿cuáles son los números racionales?", ¿qué le dirías? Explica.
- ¿Por qué es importante sintetizar lo aprendido? Justifica tu respuesta.



Los **números racionales** se pueden expresar como fracciones, números decimales finitos y números decimales infinitos periódicos o semiperiódicos.

Caracterizar los números racionales (lecciones 1 y 2).

1 Evalúa las siguientes afirmaciones. Justifica.

- Un número natural es también un número racional.
- Un número negativo se puede escribir como fracción.
- Un número decimal periódico es un número irracional.

Para **comparar** números racionales en su forma fraccionaria puedes utilizar el método de los productos cruzados, por ejemplo:

$$\begin{aligned} \frac{7}{8} & \quad \frac{2}{3} \rightarrow 7 \cdot 3 \quad 8 \cdot 2 \\ & \rightarrow 21 > 16 \\ & \rightarrow \frac{7}{8} > \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Establecer relaciones de orden en los números racionales y representarlos gráficamente (lecciones 3 y 4).

2 Compara los siguientes pares de números.

- $\frac{3}{8}; \frac{9}{8}$
- $-\frac{5}{3}; \frac{3}{5}$
- $-3,2; -3,\bar{2}$
- $\frac{4}{6}; \frac{12}{13}$

3 Representa en una recta numérica los siguientes números.

- $\frac{1}{3}; -\frac{5}{9}; -\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; 1\frac{3}{10}$
- $5,42; 5,4; 5,4\bar{2}; 5,\overline{42}; 5,\bar{4}$

Para **calcular operaciones combinadas** entre números racionales ten presente la prioridad de las operaciones. Si están involucrados números decimales periódicos o semiperiódicos, recuerda transformarlos en fracciones previamente.

Resolver problemas utilizando operatoria en los números racionales (lecciones 5, 8 y 9).

4 Resuelve.

- $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}$
- $\frac{2}{7} \cdot 9\frac{4}{8} - \frac{1}{3}$
- $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + 1}}}$
- $\frac{-0,0\bar{5}}{0,5 - 5}$

- Una persona cosechó $\frac{3}{7}$ de terreno durante la mañana, y en la tarde la mitad del resto. Si aún le quedan 20,5 hectáreas por cosechar, ¿cuál es la superficie total del terreno?
- En una carrera un automóvil recorrió $\frac{5}{6}$ del camino. Si en total son 10 km, ¿cuánto le queda por recorrer?
- Gabriela ocupó $\frac{3}{8}$ kg de azúcar para un queque. Si tenía 1 kg de azúcar, ¿cuántos gramos de azúcar le quedaron?
- Juan regaló $\frac{1}{9}$ de su dinero a su hermano, gastó $\frac{5}{36}$, y $\frac{4}{10}$ los perdió en una apuesta. Si aún le quedan \$3200, ¿cuánto dinero tenía en un inicio aproximadamente?

Conjeturar acerca de las propiedades de los números racionales (lecciones 6 y 7).

El **conjunto de los números racionales** cumple la propiedad de clausura, la cual indica que si se operan dos o más elementos del conjunto, el resultado seguirá siendo un elemento del conjunto.

5 Evalúa las siguientes afirmaciones.

- Si $x, y \in \mathbb{Z}$ entonces $x \clubsuit y = (x - y) - (x + y) \in \mathbb{Q}$.
- Si $m, n \in \mathbb{Z}$, entonces $m \oslash n = \frac{m+n}{2} \in \mathbb{Z}$.

Se denomina potencia de base racional y exponente entero a toda expresión de la

forma $\left(\frac{c}{d}\right)^n$ donde:

$$\left(\frac{c}{d}\right)^n = \begin{cases} \left(\frac{c}{d}\right)^n & \text{Si } n > 0 \\ 1 & \text{Si } n = 0; \frac{c}{d} \neq 0 \\ \left(\frac{d}{c}\right)^{-n} & \text{Si } n < 0; \frac{c}{d} \neq 0 \end{cases}$$

Las **propiedades** de las potencias son las siguientes:

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m} = a^{m+n}$
con $a \in \mathbb{Q}$ y $n, m \in \mathbb{Z}$
- $a^n \div a^m = a^{n-m}$
con $a \in \mathbb{Q} - \{0\}$ y $n, m \in \mathbb{Z}$
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
con $a \in \mathbb{Q} - \{0\}$ y $n, m \in \mathbb{Z}$

Comprender las potencias de base racional y exponente entero y utilizar sus propiedades (lecciones 10 y 11).

6 Expresa como potencias de exponente entero positivo y calcula su valor.

- a. 6^{-1} c. $(-2)^{-6}$ e. $(-1)^{-10}$ g. -9^{-3}
b. 8^{-2} d. $(-5)^{-3}$ f. $-(-6)^{-2}$ h. -11^{-3}

7 Calcula las siguientes potencias.

- a. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ c. $\left(-\frac{1}{8}\right)^{-1}$ e. $(1,1)^2$ g. $\left(\frac{-0,5}{2}\right)^{-2}$
b. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$ d. $\left(-\frac{5}{8}\right)^{-2}$ f. $(-3,5)^{-1}$ h. $-(-0,13)^3$

8 Aplica las propiedades de potencias.

- a. $5^{-2} \cdot 5^3$ c. $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\right)^{-1}$ e. $\left(\frac{0,3^3}{0,1^2}\right)^{-1}$
b. $2^{-3} \div 2^{-4}$ d. $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)^6 \div 0,5^{-3}$ f. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-10} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6$

Para **calcular operaciones** que involucren **números racionales y potencias** debes considerar la prioridad entre las operaciones. Primero debes resolver las potencias y luego las operaciones entre números racionales priorizando la multiplicación o la división sobre la adición o sustracción.

Resolver problemas que involucran números racionales y potencias (lección 12).

9 Resuelve.

- a. $2^{-1} + 3^{-2}$ d. $\frac{(2,5^3)^{-2} \cdot 2^{-2}}{5^{-3}}$ g. $\left(\left(\frac{2}{9} + \frac{1}{4}\right) \div \frac{17}{9}\right)^2$
b. $\frac{2^2 \cdot 3^3 \cdot 9^{-1} \cdot 2^3}{27 \cdot 2^5}$ e. $-(-8)^{-2} \cdot \frac{1}{2^{-4}}$ h. $\left(\left(-\frac{5}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - 0,2\right)\right)^{-1}$
c. $\frac{-1}{-5^{-2}} \cdot 10^{-2}$ f. $\left(\left(\frac{5}{10}\right)^{-1}\right)^{-3} \cdot 2^{-3}$ i. $\left(\left(\frac{3}{8} \cdot -\frac{5}{3}\right)^{-2} - \frac{9}{7}\right)$

- j. La superficie total de un cubo se calcula con la fórmula $A_T = 6a^2$. ¿Cuál es el área total de un cubo cuya arista mide $\frac{12}{3}$ m?
k. El volumen de una esfera se calcula con $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ donde r es el radio de la esfera. ¿Cuál es el volumen de una esfera cuyo radio mide 0,5 metros?
l. La energía cinética se calcula con $E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ donde m es la masa y v la velocidad. Si la energía cinética de un móvil es de $5 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ y su masa de 1000 kg, ¿cuál es su rapidez?



I. Marca con una x la alternativa correcta.

Caracterizar los números racionales (lecciones 1 y 2).

1 ¿Cuál de los siguientes números NO pertenece al conjunto de los números racionales?

- A. 2,555555... D. 0,101100111000...
B. -0,342342... E. 4,100000...
C. 65,06868...

2 ¿Cuál es el inverso multiplicativo de $\frac{5}{8}$?

- A. $-\frac{5}{8}$ C. -1 E. $\frac{8}{5}$
B. $-\frac{8}{5}$ D. 1

3 ¿Cuál de los siguientes números NO es racional?

- A. Entero negativo
B. Decimal finito
C. Decimal infinito no periódico
D. Decimal infinito periódico
E. Decimal infinito semiperiódico

4 ¿Cuál de los siguientes números racionales es el mayor?

- A. 1,24 C. $1,\overline{24}$ E. $1,\overline{24}$
B. 1,2 D. $1,\overline{2}$

Formular estrategias para comparar y representar en la recta numérica números racionales (lecciones 3 y 4).

5 Sebastián, Francisca y Florencia compran queso para preparar una pizza. Sebastián compró 260 g, Francisca $\frac{1}{4}$ kg y Florencia $\frac{3}{8}$ kg. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) VERDADERA(S)?

- I. Sebastián compró menos queso que Francisca.
II. Florencia compró más queso que Francisca.
III. Sebastián compró más queso que Florencia.

- A. Solo I. D. Solo I y II.
B. Solo II. E. Ninguna de las anteriores.
C. Solo III.

6 De mayor a menor, ¿cuál es el orden de los siguientes números racionales?

$$a = -\frac{2}{3}, b = -\frac{5}{6}, c = -\frac{3}{8}$$

- A. $a < b < c$ D. $c < a < b$
B. $b < c < a$ E. $c < b < a$
C. $b < a < c$

7 ¿Cuál es el número racional correspondiente al punto P en la recta numérica?



- A. 0,30 D. 0,70
B. 0,33 E. 0,78
C. 0,60

8 ¿Cuál de los siguientes números está después de $\frac{1}{3}$ en la recta numérica?

- A. 0,3 D. 0,333334
B. 0,3333 E. 0,333
C. 0,33

Resolver problemas utilizando operatoria en los números racionales (lecciones 5, 8 y 9).

9 Al truncar el decimal $0,\overline{14}$ a la milésima, ¿cuál es el error que se comete?

- A. 0 D. 0,004444....
B. 0,04 E. 0,0004444....
C. 0,4

10 El resultado de $\frac{1}{\frac{3}{8} - 0,75} + \frac{1}{\frac{3}{8} - 0,25}$ es:

- A. 4 D. $\frac{16}{3}$
B. $\frac{8}{3}$ E. $-\frac{16}{3}$
C. $\frac{15}{3}$

- 11** Un niño bebe la mitad de un litro de jugo por la mañana, y en la tarde $\frac{1}{3}$ de lo que quedaba. ¿Cuánto jugo bebió al final del día?

A. $\frac{5}{6}$ L D. $\frac{2}{3}$ L
 B. $\frac{1}{6}$ L E. $\frac{4}{5}$ L
 C. $\frac{1}{3}$ L

- 12** Se define $a \star b = \frac{1}{a \cdot b}$. Entonces, el resultado de $2 \star \left(-\frac{8}{7} \star \frac{3}{4}\right)$ es:

A. $\frac{3}{7}$ D. $-\frac{7}{3}$
 B. $\frac{7}{3}$ E. Ninguna de las anteriores.
 C. $-\frac{3}{7}$

- 13** Si una persona debe recorrer 12,3 kilómetros y ya ha caminado 7850 metros, ¿cuántos kilómetros le faltan por recorrer?

A. 4,45 km D. 5,45 km
 B. 4,55 km E. 6,62 km
 C. 5,55 km

- 14** Para un trabajo que se hace en tres etapas se dispone de 60 hombres. En la primera etapa trabaja la cuarta parte del total de hombres disponibles y en la segunda, $\frac{2}{3}$ del resto. Si en la tercera etapa trabajan los hombres que quedaron, ¿cuántos trabajaron solamente en la tercera etapa?

A. La mitad del total.
 B. Un tercio del total.
 C. La mitad de los que trabajaron en la segunda etapa.
 D. La mitad de los que trabajaron en la primera etapa.
 E. Un tercio de los que trabajaron en la segunda etapa.

- 15** Juan tiene un bidón de 5 litros de capacidad con $2\frac{1}{3}$ litros de agua. ¿Cuántos litros le faltan para llenarlo?

A. $2\frac{1}{3}$ D. $3\frac{1}{3}$
 B. $2\frac{2}{3}$ E. $3\frac{2}{3}$
 C. $1\frac{2}{3}$

Conjeturar acerca de las propiedades de los números racionales (lecciones 6 y 7).

- 16** Se define la operación $a \blacklozenge b = 2a \div b$, donde a y b son números racionales. ¿Cuál afirmación es FALSA con respecto a la operación?

A. Los resultados pueden ser números enteros.
 B. Solo está definida para b distinto de 0.
 C. Los resultados siempre serán números racionales.
 D. Los resultados pueden ser números decimales.
 E. Solo está definida para a distinto de 0.

Comprender las potencias de base racional y exponente entero y aplicar sus propiedades (lecciones 9, 10 y 11).

- 17** ¿Cuál de los siguientes números NO puede ser escrito como potencia de exponente 3?

A. 1 D. 169
 B. 8 E. 216
 C. 27

- 18** ¿Cuál es el valor de $\left(-\frac{4}{8}\right)^{-4}$?

A. 16 D. -16
 B. 32 E. $-\frac{1}{2}$
 C. -32



19 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es VERDADERA?

- A. Toda potencia de base distinta de cero y exponente igual a 1 tiene valor igual a 1.
- B. Si la base de una potencia y su exponente son números enteros, su resultado puede ser un número entero.
- C. Si el exponente de una potencia es un entero negativo y su base un número racional, su resultado es siempre un número entero.
- D. A y B son falsas.
- E. B y C son falsas.

20 ¿Qué alternativa representa mejor al valor de la potencia $((-3)^6)^{-1}$?

- A. Es igual a cero.
- B. Es mayor que cero.
- C. Es menor que cero.
- D. No se puede determinar.
- E. Ninguna de las anteriores.

21 ¿Cuál de las siguientes expresiones representa el área de un cuadrado cuyo lado mide 8 cm?

- A. 16 cm^2
- B. $(2^3)^2 \text{ cm}^2$
- C. 2^{3^2} cm^2
- D. $2 \cdot 2^3 \text{ cm}^2$
- E. $(2^3 + 2^3) \text{ cm}^2$

Resolver problemas que involucran números racionales y potencias (Lección 12).

22 ¿Qué valor se obtiene al simplificar la expresión $\frac{1000\ 000 \cdot 0,00012}{10^4}$?

- A. 12
- B. 1,2
- C. 0,12
- D. 0,012
- E. 1200

23 ¿Cuál es el valor de $\frac{2^3 \cdot 3^{-2} \cdot 5^{-1}}{(-8) \cdot 5^{-1}}$?

- A. 9
- B. 9^2
- C. -9
- D. $\frac{1}{9}$
- E. $-\frac{1}{9}$

24 ¿Cuál es el resultado de la expresión $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2}{\left(\frac{9}{4}\right)^2}$?

- A. 1
- B. $\frac{2}{3}$
- C. $\frac{3}{2}$
- D. $\frac{9}{4}$
- E. $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$

25 Un tipo de bacteria se reproduce de acuerdo con la expresión 2^t , siendo t el tiempo expresado en horas. ¿En cuánto tiempo se tendrán 1024 bacterias?

- A. 8 horas.
- B. 9 horas.
- C. 10 horas.
- D. 11 horas.
- E. 12 horas.

26 El número de bacterias (B) en cierto cultivo está dado por la expresión $B = 100^t \cdot 100^5$, donde t es el tiempo expresado en horas. ¿Cuál será el número de bacterias al cabo de 4 horas?

- A. 100^{20}
- B. 100^9
- C. 104^5
- D. 400^5
- E. $4 \cdot 100^5$

II. Resuelve los siguientes problemas.

Caracterizo los números racionales.

1 Identifica a qué conjunto numérico pertenece la solución de cada ecuación.

- a. $\frac{3}{6}x + 1 = 9$
- b. $6x - (2 - 3x) = 4$
- c. $2 + \frac{1}{3}x = \frac{1}{2}x + \frac{2}{9}$
- d. $25x + 1 = 2x + 3$

Resuelvo problemas utilizando la aproximación y la operatoria en los números racionales.

2 Resuelve los siguientes problemas.

- Un camión recorre $\frac{3}{8}$ de camino durante la mañana, y durante la tarde recorre otro $\frac{1}{4}$ de camino. Si en total debe hacer un último recorrido durante la noche, ¿cuántos kilómetros le faltan para terminar el trayecto si en total debe recorrer 950 km?
- Emilio preparó un queque para toda la familia. $\frac{1}{2}$ de él lo compartió con sus primos y $\frac{1}{6}$, con sus padres. ¿Cuál es la fracción de porción que queda?
- Fabián es artesano y arma collares para venderlos. Para armar un collar necesita 6 tiras de $\frac{5}{3}$ m y 3 tiras de $\frac{8}{7}$ m. ¿Cuántos metros aproximadamente necesita para armar el collar?

Conjetura acerca de las propiedades de los números racionales.

3 Evalúa las siguientes afirmaciones.

- Si a y $b \in \mathbb{Z}$, entonces $a \circ b = \frac{a}{b} \cdot b^2 + a \in \mathbb{Q}$.
- Si x e $y \in \mathbb{Z}^-$ entonces $x \otimes y = 0, \bar{1}x + y \in \mathbb{Q}$.

Comprendo las potencias de base racional y exponente entero, y utilizo sus propiedades.

4 Resuelve el siguiente problema de potencias.

Una máquina realiza la siguiente operación: "Cuando ingresa un valor se multiplica por 2^{-2} , el resultado obtenido se multiplica por 10^3 y finalmente el resultado lo divide por 4".

- Si a la máquina se ingresa el valor 4^3 , ¿cuál es el número que se obtiene?
- Si a la máquina se ingresa el valor 0,0032, ¿cuál es el número que se obtiene?
- Si el número que se obtiene de la máquina es 8000, ¿cuál es el valor ingresado inicialmente?
- Explica el procedimiento utilizado para responder cada pregunta.

Resuelvo problemas que involucran números racionales y potencias.

5 Calcula el valor de las siguientes operaciones combinadas utilizando propiedades de potencias.

a. $12^2 \cdot 36 \cdot \frac{4^7}{12^2} \cdot 9^7 \cdot 6^2$

b. $\left\{ \frac{\left(\frac{-2}{3} \right)^2 + 3^3 \div \left[\left(\frac{-2}{3} \right)^2 \right]^{-3}}{\left(\frac{2}{3} \right)^{-2} \cdot 3^{-4} + \left(\frac{2}{3} \right)^2} \right\}^{-1}$

Desafío

La moneda misteriosa

Dos agricultores que vendían pollos en el mercado del pueblo decidieron juntar sus puestos para ir cada uno al mercado la mitad de los días y así tener más tiempo para atender su campo. Para ello, como uno vendía dos pollos por una moneda y el otro tres pollos por dos monedas, decidieron vender cinco pollos por tres monedas. Antes de juntar los puestos, cada uno vendía 30 pollos al día, con lo que el primero recibía 15 monedas y el segundo, 20. Por tanto, juntando los puestos deberían ganar 35 monedas al día, pero en realidad obtenían 36.

¿De dónde sale la moneda de más?





Álgebra y funciones

Ideas previas

El sur de Chile se caracteriza por tener gran variedad de ríos, los cuales son aprovechados para generar electricidad a través de centrales hidroeléctricas como Coya y Pungal. Estas centrales hidroeléctricas generan electricidad gracias a la fuerza del agua que cae en las hélices de grandes turbinas que se encuentran conectadas a generadores eléctricos o dínamos.

La cantidad de energía eléctrica que se produce en una central hidroeléctrica se puede modelar a partir de funciones que dependen de distintas variables, como la cantidad de agua en el embalse, la pureza del agua, el caudal, el tipo de turbinas y generadores, entre otros. Todas estas variables son estudiadas por ingenieros, arquitectos, paisajistas, meteorólogos, mecánicos, biólogos, etc.

- Menciona tres variables que puedan estar involucradas en la función que modela la cantidad de energía eléctrica que genera una central hidroeléctrica y que no se mencionaron anteriormente. ¿Por qué crees que se deben considerar?

Palabras clave

- ⇒ Productos notables.
- ⇒ Factorización de expresiones algebraicas.
- ⇒ Ecuaciones literales, función lineal y afín.
- ⇒ Composición de funciones.







Repaso mis conocimientos previos

Una **variable** es una cantidad que puede tomar distintos valores.

Comprender el concepto de variable.

1 Identifica las variables involucradas en las siguientes situaciones.

- La masa de los camiones que pasan por un peaje.
- La recaudación de un fin de semana en un cine.
- La cantidad de libros vendidos en una ciudad.
- La energía liberada por un terremoto en algún país del mundo.

La **dependencia e independencia** de variables es la que refleja cualquier fórmula matemática. Por ejemplo, el costo total de un producto depende del precio y la cantidad de productos. Se establece la relación matemática:

$C = P \cdot C_p$, donde C es el costo total, P el precio por unidad y C_p el costo de cada unidad. En este caso la variable C_p es la variable independiente y C la variable dependiente.

Reconocer la dependencia e independencia de variables.

2 Identifica la variable dependiente e independiente en las siguientes situaciones que definen una función.

- Cada país tiene un escudo que es su símbolo nacional.
- El precio de los computadores de una tienda en un día específico.
- Al comprar verduras en la feria, el precio en pesos que pagarás se relaciona con la cantidad de kilogramos que compres.

Una **proporción** es la igualdad de dos razones.

Dos cantidades X e Y son directamente proporcionales si el cociente entre sus valores correspondientes es constante. Esto se representa mediante la expresión:

$$k = \frac{X}{Y}$$

Dos cantidades X e Y son inversamente proporcionales si el producto entre sus valores correspondientes es constante.

Se representa mediante la expresión:

$$k = Y \cdot X$$

Resolver problemas que involucran variación proporcional directa e inversa.

3 Calcula el valor de a y b en las siguientes tablas considerando que se relacionan proporcionalmente.

a. Directamente proporcional

x	3	7	b
y	a	49	56

b. Inversamente proporcional

x	a	33	45
y	12	6	b

4 Resuelve los siguientes problemas.

- Un estudio fotográfico realiza, en promedio, 780 ampliaciones en 4 días. Si el promedio se mantiene, ¿cuántas ampliaciones hará en 21 días?
- Un automóvil con una rapidez constante de 60 km/h viaja 5 horas por día durante 12 días. Si la rapidez aumentara a 80 km/h, ¿en cuántos días recorrería la misma distancia si recorre 5 horas diarias? ¿Y si viaja 6 horas diarias?
- Una máquina embotelladora llena 370 botellas en 30 minutos. ¿Cuántas botellas llenará en dos horas?
- A cierta hora del día, un árbol de 5,5 m de altura proyecta una sombra de 350 cm. ¿Cuántos metros mide un árbol que a la misma hora proyecta una sombra de 8,6 m?
- 3 kg de limones tienen un precio de \$500. ¿Cuál es el precio de 9 kg de limones?

Una **función** es una relación entre elementos de dos conjuntos A y B, donde a cada elemento del conjunto A le corresponde un único elemento del conjunto B.

Comprender el concepto de función.

5 Analiza si las siguientes relaciones representan una función.

- La cantidad de lluvia caída diariamente en Punta Arenas durante el mes de enero de 2013.
- El precio de un mismo cuaderno en cinco tiendas distintas de Antofagasta.
- El tiempo empleado en vaciar un depósito que tiene un cierto número de desagües para vaciarlo.

El **dominio** es el conjunto de valores que toma la variable independiente, conocidos como **preimágenes**.

El **recorrido** es el conjunto de valores que toma la variable dependiente conocidos como **imágenes**.

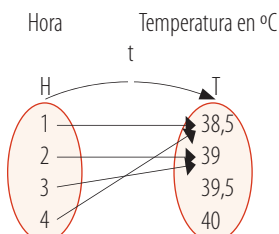
Identificar el dominio y recorrido de una función.

6 Identifica el dominio y recorrido de las siguientes funciones.

- $f(x) = x$, donde **x** son los números naturales menores que 10.
- $g(x) = x + 2$, donde **x** son todos los números pares mayores que 9 y menores que 25.
- $h(x) = 2(x - 1) + 2$, donde **x** son todos los números enteros mayores que -3 y menores que 4.

Una función se puede representar a través de un **diagrama sagital**, por ejemplo:

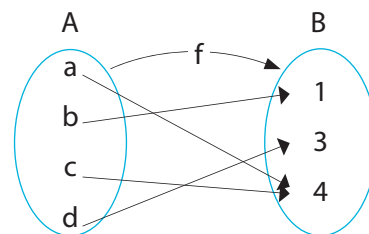
La temperatura de una persona a medida que transcurre el tiempo se representa como:



Representar gráficamente funciones.

7 Analiza la siguiente función f y completa.

- El dominio de f es: _____
- El recorrido de f es: _____
- $f(a) =$ _____
- $f(c) =$ _____



8 Modela cada situación con una función.

- Los litros de jugo que se preparan con **x** kg de manzanas, si se sabe que con 0,5 kg de manzana se prepara un litro de jugo.
- La ganancia obtenida con la venta del jugo de naranja, si con 2 kg de naranjas se prepara un litro de jugo que se vende a \$800 y cada kilogramo de naranja cuesta \$**x**.

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas en la cual aparecen algunas incógnitas, es decir, cantidades desconocidas.

Plantear ecuaciones de primer grado con una incógnita.

9 Modela las siguientes situaciones mediante ecuaciones de primer grado con una incógnita y responde.

- Si para envasar 12 kg de papas en bolsas de 2 kg y 3 kg se ocupan 2 bolsas de 3 kg, ¿cuántas bolsas de 2 kg se utilizarán?
- Manuela juntó \$15 000 en monedas de \$50 y de \$100. ¿Cuántas monedas de \$50 tiene si 30 son de \$100?
- Una granja tiene gallinas y conejos. El total de patas, entre gallinas y conejos es igual a 100. Si se sabe que hay 6 conejos, ¿cuántas gallinas hay en la granja?

Palabras clave

➔ Lenguaje algebraico.

¿Para qué se utiliza el lenguaje algebraico?

- El perímetro de un rectángulo corresponde al doble de la suma de su largo y su ancho. ¿Cómo se puede expresar algebraicamente lo anterior?

El papá de Isidora está comprando algunas prendas del uniforme que su hija usará en 1.º Básico: 4 blusas y 3 pares de calcetines, y en total gastó \$10 890. ¿Cómo podría obtener una expresión matemática que represente esta situación?

Las relaciones anteriores se pueden expresar matemáticamente a partir del lenguaje algebraico. Observa el modelamiento.



Paso 1 Identificar las variables y constantes involucradas en la situación.

Constantes	Variables
La cantidad de blusas compradas: 4	El precio de cada blusa: b
La cantidad de pares de calcetines: 3	El precio de cada calcetín: c
Gasto total: \$10 890	

Relaciona

- ¿Cómo se expresa en lenguaje algebraico el volumen de un cubo de arista a ?
- ¿Cómo se expresa en lenguaje algebraico el área de un círculo de radio r ?

Paso 2 Relacionar variables y constantes a través de expresiones algebraicas.

- La expresión $4b$ representa el precio total de las blusas.
- La expresión $3c$ representa el precio total de los calcetines.
- La igualdad $4b + 3c = 10\,890$ representa la situación planteada, es decir, el costo total de las blusas sumado al costo total de los calcetines es igual al monto pagado por el papá de Isidora.

Razona

y comenta

- ¿Por qué es necesario diferenciar entre una constante y una variable?
- En las expresiones algebraicas, ¿qué función cumplen las letras de estas? ¿Y qué función cumplen los números? ¿Y las operaciones entre estos?
- ¿Qué otras situaciones podrías representar a través de expresiones algebraicas?

En resumen

El **lenguaje algebraico** se utiliza para representar matemáticamente situaciones dadas en lenguaje natural. En el lenguaje algebraico se utilizan letras para representar variables a las que se les pueden asignar distintos valores.

Repaso

1. **Representa** en lenguaje algebraico los siguientes enunciados.

- a) El triple de un número.
- b) Un número aumentado en tres unidades.
- c) El triple de un número aumentado en dos unidades.
- d) La tercera parte de un número disminuido en una unidad.

2. **Calcula** el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas, considerando $a = 2$; $b = 5$; $c = -3$; $d = -1$ y $f = 0$.

- a) $5a^2 - 2bc - 3df$
- b) $3(a - b) + 2(c - d)^2$
- c) $\frac{c-d}{2} + \frac{a+b}{7}$
- d) $\frac{3}{4}a - \frac{2}{5}c - \frac{1}{2}b + \frac{7}{8}f$

Práctica guiada

3. **Analiza** las frases que se presentan en la tabla:

Lenguaje común	Lenguaje algebraico
Dos veces cinco es igual a $2 \cdot 5$	Dos veces un número es $2 \cdot n$
Tres veces dos, más uno es $3 \cdot 2 + 1$	Tres veces un número, más uno es $3 \cdot n + 1$
El cuadrado de dos, disminuido en tres es $2^2 - 3$	El cuadrado de un número, disminuido en tres es $x^2 - 3$

- a) ¿Qué diferencias y similitudes existen en las frases de la tabla?
- b) ¿Cuál es la ventaja de escribir frases en lenguaje algebraico respecto a una frase común?

4. **Representa** en lenguaje algebraico los siguientes enunciados.

Un múltiplo de 2 $\rightarrow 2x$

- a) Un múltiplo de 5.
- b) Un número par.
- c) Un número impar.
- d) El sucesor de un número.
- e) El antecesor de un número.

- f) Dos números consecutivos.
- g) Tres números pares consecutivos.
- h) Tres números impares consecutivos.
- i) La diferencia entre dos números pares consecutivos.
- j) La adición entre tres números consecutivos, comenzando desde $2x + 7$.
- k) El cuadrado de un número.

5. **Representa** en lenguaje natural las siguientes expresiones algebraicas.

$7x \rightarrow$ Un múltiplo de siete

- a) $2a$
- b) $4t$
- c) $3x - 1$
- d) $2m + 13$
- e) $4(x - 1)$
- f) $2a + 1 + (2a + 3)$
- g) $2x^2 - x^3$
- h) $x^3 - y^2$

6. **Representa** en lenguaje algebraico los siguientes enunciados.

El perímetro de un rectángulo corresponde al doble de la medida del largo sumado al doble de la medida del ancho.

$$P = 2a + 2b$$

- a) El área de un cuadrado corresponde a la medida del lado al cuadrado.
- b) El perímetro de un cuadrado corresponde al cuádruple de la medida del lado.
- c) El volumen de un cubo corresponde a la medida de su arista al cubo.
- d) En un triángulo rectángulo, la medida de la hipotenusa al cuadrado corresponde a la suma de cada cateto al cuadrado.
- e) El volumen de una pirámide de base cuadrada corresponde a la tercera parte del producto entre el área de su base y su altura.
- f) El número de diagonales que se pueden trazar en un polígono de n lados corresponde a la mitad del producto entre el número de lados y este disminuido en tres.

7. **Representa** en lenguaje natural las siguientes fórmulas matemáticas y físicas.

$P = 2a + 2b \rightarrow$ El perímetro del rectángulo es la suma entre el doble de la medida del largo y el doble de la medida del ancho.

- a) $A = \frac{b \cdot h}{2}$, donde **A** es el área del triángulo.
 b) $\alpha + \beta + \delta = 180^\circ$, donde α , β y δ son los ángulos interiores de un triángulo.
 c) $V = \frac{d}{t}$, donde **V** es la rapidez.
 d) $F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$, donde **F** es la fuerza gravitacional.
 e) $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$, donde **V** es el volumen de una pirámide.

8. **Identifica** las variables y constantes que están involucradas en cada situación.

El precio de 5 bufandas y 8 chalecos es de \$35 600.

Constantes

Variables

$\rightarrow$ Número de bufandas: 5 $\rightarrow$ Precio de la bufanda: x
 $\rightarrow$ Número de chalecos: 8 $\rightarrow$ Precio del chaleco: y
 $\rightarrow$ Gasto total: \$35 600

- a) Ocho monedas grandes y 7 monedas chicas suman un valor de \$3000.
 b) La cuenta del agua tiene un cargo fijo de \$1300 y se suman a la cuenta \$300 por cada cm^3 consumido.
 c) En un rectángulo la medida del largo es el triple de la medida del ancho y el perímetro del rectángulo es igual a 88 m.
 d) La edad de Pedro es la tercera parte de la edad de su padre y la suma de sus edades es igual a 80.
 e) La suma de 3 números consecutivos es 54.
 f) En una parcela hay gallinas y conejos, donde 130 es el número total de patas de animales y 44 es el número total de animales.

9. **Expresa** en lenguaje algebraico las siguientes ecuaciones que involucran más de una variable.

La diferencia entre la edad de Juan y la edad de María es 18. $x - y = 18$

- a) Para reunir dinero para el paseo de curso, los apoderados y estudiantes, por separado, deben recaudar un monto total de \$150 000.
 b) Una persona tiene ahorradas monedas de \$10, de \$50 y de \$100 y debe ahorrar \$15 860.
 c) La suma de tres ángulos interiores de un cuadrilátero es de 267° .

10. **Identifica** el término general en cada una de las siguientes sucesiones. Observa el ejemplo:

$-1, 1, 3, 5, \dots$ $a_n = 2n - 3$

- a) $2, 4, 6, 8, \dots$ e) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$
 b) $4, 0, -4, -8, \dots$ f) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$
 c) $3, 7, 11, 15, \dots$ g) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$
 d) $1, 8, 27, 64, \dots$ h) $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \dots$

11. **Evalúa** cada término general con los primeros números naturales, para encontrar los cuatro primeros términos de cada sucesión.

$a_n = -3n + 20 \rightarrow -3 \cdot 1 + 20 = 17 \quad -3 \cdot 2 + 20 = 14$
 $\rightarrow -3 \cdot 3 + 20 = 11 \quad -3 \cdot 4 + 20 = 8$

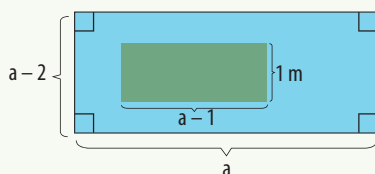
- a) $a_n = -2^n$ c) $a_n = (-1)^n \cdot 2n$
 b) $a_n = 1 + \frac{1}{3n}$ d) $a_n = 3n - \frac{2}{n+3}$

Aplico

12. **Resuelve** los siguientes problemas.

- a) Si el ancho de un terreno rectangular es la mitad de su largo, ¿cuáles podrían ser sus lados expresados algebraicamente?
 b) ¿Cuál es el perímetro del rectángulo anterior?
 c) El largo de cierto rectángulo corresponde al doble de su ancho. Determina una expresión algebraica que represente su área a partir del ancho.

- d) La casa de Jaime se ubica en el terreno representado por la zona verde.



Si el terreno de la vecina de Jaime tiene el doble de ancho y el triple de largo que el de Jaime, ¿cuál es la expresión algebraica que representa el área del terreno de la vecina?

- e) Marta cuida automóviles en un estacionamiento y se da cuenta de que faltan solamente dos para que en el estacionamiento del frente tenga el doble de la cantidad que tiene el suyo. ¿Cómo expresarías en lenguaje algebraico lo que Marta quiere decir?
- f) Juan recoge cartones para venderlos, por esta razón decide caminar diariamente el doble de la distancia que recorrió el día anterior. ¿Cuál es la expresión que representa la distancia que camina en el cuarto día, si el primer día camina x metros?
- ¿Cuánta distancia recorre en total el cuarto día?
 - ¿Cuánta distancia recorre el día n ?
- g) Laura y Pablo caminan diariamente un cierto recorrido. Laura camina todos los días la misma distancia y Pablo camina el doble de la distancia que recorre Laura. ¿Cuánta distancia recorren ambos en cinco días?
- 13. Conecta.** La criptografía es la ciencia que permite encubrir un mensaje mediante complicadas fórmulas y procesos. Por ejemplo, si se quiere entregar en clave un número de tres cifras, el emisor escribe xyz , y el receptor recibe $(2x)(5y)(3z)$, luego, si el emisor quiere mandar el 123 al receptor, envía el número 2109. Crea dos fórmulas que te permitan enviar números encriptados.

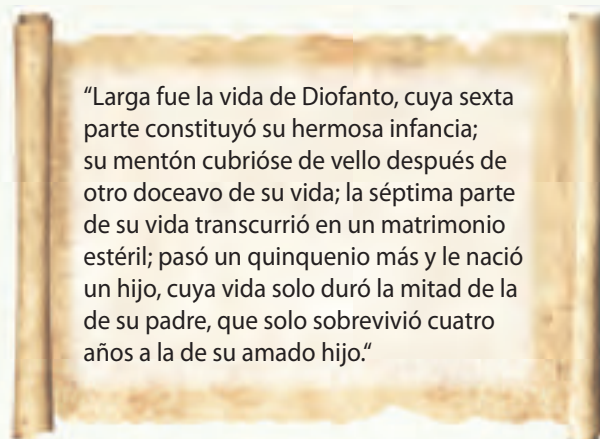
Reflexiono

- ¿Toda expresión escrita en lenguaje común se puede expresar en lenguaje algebraico? Entrega un ejemplo o un contraejemplo.
- Investiga acerca de la lógica y la forma en que se relaciona con el álgebra. ¿Mantienes o cambias tu respuesta anterior con esta nueva información?

- 14. Descubre el error.** Marcela tradujo al lenguaje algebraico la frase: "El triple de un número aumentado en 5 es 10" ¿Qué error cometió?

$$3x + 5 = 10$$

- 15. Describe el procedimiento.** Describe paso a paso la traducción al lenguaje algebraico del epitafio que se encuentra en la tumba de Diofanto.



- 16. Desafío.** Observa la siguiente secuencia de círculos y responde.



Figura 1

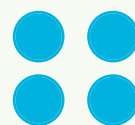


Figura 2

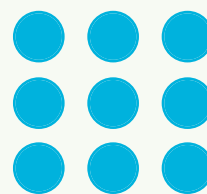


Figura 3

- a) ¿Qué cantidad de círculos azules tendrá la figura 8?
- b) ¿Qué expresión algebraica representa la cantidad de círculos de la figura n ?
- 17. Investiga.** Averigua la relación existente entre el álgebra booleana (Llamada así en honor a George Boole) y el lenguaje algebraico para su utilización en el área de la informática y matemática.
- 18. Crea.** Inventa una frase en lenguaje natural y pídele a dos compañeros o compañeras que la traduzcan al lenguaje algebraico. Compara sus respuestas.

Refuerzo

1. Escribe en lenguaje algebraico las siguientes frases:
 - La raíz cúbica del doble de un número aumentado en tres.
 - El doble de la diferencia entre un número y tres.
2. Investiga sobre la suma que realizó Carl Friedrich Gauss y la relación con el lenguaje algebraico.

Palabras clave

- ➔ Expresión algebraica.
- ➔ Reducción de términos semejantes.
- ➔ Valorización o evaluación de expresiones algebraicas.

¿Qué son las expresiones algebraicas? ¿Cómo evaluarlas? ¿Cómo reducirlas?

- En geometría has utilizado distintas expresiones matemáticas para calcular perímetros, áreas y volúmenes. ¿Qué relación tendrán estas expresiones con las expresiones algebraicas?

Para la campaña de reciclaje, Camila, la presidenta de curso, tenía el cartel que se muestra al costado.

¿Qué significa la expresión $15V$?

¿Y $20L$?

Si el curso de Juan juntó 300 latas y 450 botellas de vidrio ¿cómo calcularías sus puntajes parciales y el puntaje total?

Las expresiones para los puntajes anteriores se denominan términos y expresiones algebraicas, ya que corresponden a combinaciones de letras, números y signos de operaciones.

Observa:

V: cantidad de botellas de vidrio.

L: cantidad de latas.

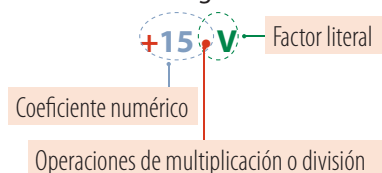
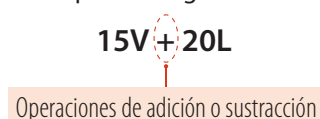
Puntaje parcial: $15V$

$20L$

Puntaje total: $15V + 20L$

Razona**y comenta**

- ¿Cuáles son los componentes de una expresión algebraica?
- ¿Qué operación hay entre el 15 y la variable V ?
- ¿Es correcto decir que una expresión algebraica está compuesta por términos algebraicos? ¿Por qué?

Término algebraico**Expresión algebraica**

Los términos algebraicos $15V$ y $20L$ representan los puntajes parciales por la recolección de botellas de vidrios y latas respectivamente, y la expresión algebraica $15V + 20L$ representa el puntaje total obtenido por la recolección de ambos materiales reciclables.

En resumen

Una **expresión algebraica** es un conjunto de cantidades numéricas y literales relacionadas entre sí por los signos de las operaciones aritméticas y de potenciación. Un **término algebraico** corresponde a cada una de las partes de la expresión algebraica separadas por los signos de adición y sustracción. Todo término algebraico está compuesto por un coeficiente numérico y un factor literal, donde el **coeficiente numérico** son los factores numéricos con sus respectivos signos y el **factor literal** es el producto de las letras con sus respectivos exponentes. Las expresiones algebraicas se pueden clasificar respecto al número de términos algebraicos que las componen, es decir:

- **Monomio:** es una expresión algebraica que está formada por un solo término algebraico que solo contiene potencias positivas o cero en su factor literal. Ejemplo: $-3x^2yz^3$
 - **Binomio:** dos términos algebraicos. Ejemplo: $2a^2bc^4 - 4x^2y$
 - **Trinomio:** tres términos algebraicos. Ejemplo: $4x + 5y^2 + 8xy$
 - Una expresión algebraica que solo tiene monomios como términos algebraicos se llama **polinomio**. Ejemplo: $-2x + 8y^2 - 3xy + 9y$
- Se utiliza de forma genérica la palabra polinomio precisando si es necesario el número de términos.

¿Cómo evaluar una expresión algebraica?

Para calcular los puntajes parciales y el total del curso de Juan, se pueden **evaluar** los términos y la expresión algebraica. Observa:

Paso 1 ▶ Tener presente lo que representa cada variable.

V: cantidad de botellas de vidrios.

L: cantidad de latas.

Paso 2 ▶ Remplazar las cantidades reunidas por el curso de Juan en las variables que correspondan.

$$V = 450 \quad \text{y} \quad L = 300$$

$$\text{Puntajes parciales: } 15V \rightarrow 15 \cdot 450 = 6750$$

$$20L \rightarrow 20 \cdot 300 = 6000$$

$$\text{Puntaje total: } 15V + 20L = 6750 + 6000 = 12\,750$$

Por lo tanto, el puntaje total obtenido por el curso de Juan fue de 12 750 puntos.

¿Cómo reducir una expresión algebraica?

Para reducir una expresión algebraica debes seguir los siguientes pasos:

Paso 1 ▶ Eliminar paréntesis si los hay.

$$-(3V + 2L) - (4V^2 - 5,3L) + \frac{1}{2}V \rightarrow -3V - 2L - 4V^2 + 5,3L + \frac{1}{2}V$$

Paso 2 ▶ Reconocer términos semejantes, es decir, aquellos que posean el mismo factor literal.

$$-3V - 2L - 4V^2 + 5,3L + \frac{1}{2}V$$

$-3V$ y $\frac{1}{2}V$ tienen como factor literal V

$-2L$ y $5,3L$ tienen como factor literal L

Paso 3 ▶ Reducir los términos semejantes.

$$\begin{aligned} -3V - 2L - 4V^2 + 5,3L + \frac{1}{2}V &= -3V + \frac{1}{2}V - 2L + 5,3L - 4V^2 \\ &= \frac{(-6+1)V}{2} + (-2+5,3)L - 4V^2 \\ &= -\frac{5}{2}V + 3,3L - 4V^2 \end{aligned}$$

En resumen

1. **Evaluar una expresión algebraica** significa determinar el valor numérico que representa para ciertos valores de las variables que la componen. Para ello se deben remplazar dichos valores en la expresión y luego calcular el resultado.
2. Se denominan **términos semejantes** a todos aquellos términos que tienen igual factor literal.
Reducir términos semejantes consiste en agrupar dichos términos algebraicos, sumar o restar los coeficientes numéricos y conservar el factor literal.

Repasa

$-(2x + 5y) = -2x - 5y$
porque se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición:

$$\begin{aligned} -(2x + 5y) &= -1 \cdot (2x + 5y) \\ &= (-1) \cdot 2x + (-1) \cdot 5y \\ &= -2x - 5y \end{aligned}$$

De esto se concluye que siempre que haya un signo $(-)$ fuera del paréntesis, los signos de cada término del paréntesis cambian.

Observa

- Son términos semejantes x^2y ; yx^2 ya que poseen las mismas letras y los mismos exponentes (aunque estén en distinto orden).

Observa

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}w - \left(\frac{1}{4}v + 2w\right) - 0,1v &= \frac{2}{3}w - \frac{1}{4}v - 2w - 0,1v \\ &= \frac{2}{3}w - 2w - \frac{1}{4}v - 0,1v \\ &= \left(\frac{2}{3} - 2\right)w + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{10}\right)v \\ &= \left(-\frac{4}{3}\right)w + \left(-\frac{13}{36}\right)v \\ &= -\frac{4}{3}w - \frac{13}{36}v \end{aligned}$$

Razona

y comenta

- Vuelve a responder la pregunta del inicio de la lección, ¿cambió tu respuesta? ¿Por qué?
- ¿Qué sucede cuando existe un signo menos frente a un paréntesis?
- ¿Por qué $-3V$ y $-3V^2$ no son términos semejantes?

Repaso

1. Resuelve las siguientes ecuaciones.

- a) $5x + 3x = 4$ d) $-2u - 8u = 14$
 b) $7y + 8y = 2$ e) $4m - m = 12m + 1$
 c) $8z - 7z = 3$ f) $-8 = n + 1 - 3n$

2. Representa las siguientes situaciones con una expresión matemática.

- a) El doble de un número.
 b) La diferencia de dos números.
 c) La cuarta parte de un número.
 d) El producto entre dos números.

Práctica guiada

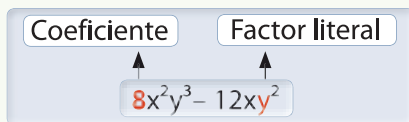
3. Analiza la siguiente tabla y luego complétala.

Término	Coefficiente	Factor Literal
$5abc^2d^2$	5	abc^2d^2
$-0,5x^6y^2$		
$1,3m^2n^3$		
$-\frac{1}{2}xyz^2$		

4. Analiza la siguiente tabla y luego complétala.

Expresión Algebraica	Clasificación
$-5xy + 12x^2y - 10xy^3$	Trinomio
$6a^3b^2$	
$1 - 3ab^2 + 12abc - 3a^3b^2$	

5. Identifica, según indica la flecha.



- a) $\frac{1}{2}a^2 - \frac{3}{5}xy + 1,5b \rightarrow$
 b) $-0,45abc^4 + \frac{7}{2}z \rightarrow$
 c) $\frac{2}{5}xy - 2x^2y^3 + 7x^4y^5 \rightarrow$

- d) Escribe una expresión algebraica que contenga: 4 términos algebraicos, cuyos coeficientes sean $2, \frac{4}{3}, -\frac{1}{5}$ y 12, y que cada factor literal esté compuesto, a lo menos, por dos letras.

6. Evalúa si las afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Justifica las falsas.

Al sumar $-2x$ y $(y - 3x)$ el resultado corresponde a un trinomio. F
 Justificación: La expresión corresponde a un binomio.

- a) El término $5xy$ es semejante con $5x^2y$.
 b) $-\frac{1}{4}uw^2 + 3wu^2 + w^2u = \frac{3}{4}uw^2 + 3wu^2$
 c) La expresión $uvw + vwu$ no se puede reducir.
 d) Si $z = p = 1000$, entonces el valor de $(z + p)(z - p)$ es 20 000.

7. Reduce las siguientes expresiones algebraicas.

$$5ax^3 - 2ax^2 + 12ax^3 - 14ax^2 = 17ax^3 - 16ax^2$$

- a) $4xy^2 + 9xy^2$ f) $0,5y - 0,2xy + 0,7y$
 b) $a^3 + 5a^3$ g) $\frac{3}{4}x - \frac{2}{5}x$
 c) $-pq + 5pq - 2pq$ h) $5ab^3 + 4ab^2 + 3ab^3 - 5ab^2$
 d) $4x^3 - 2x^2 - 6x^3 - 4x^2$ i) $ab - 10ab - ax - 12ax$
 e) $4a^2 + 1 + a^2 + a - 3a$ j) $-0,5 - \frac{4}{10}m + 0,07n - \frac{3}{10}$

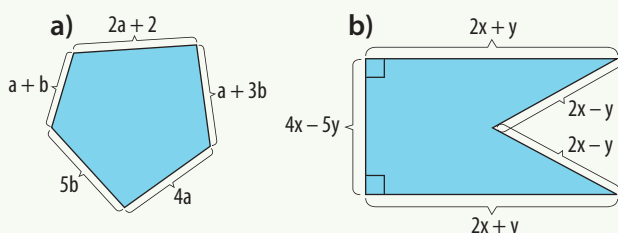
8. Reduce términos semejantes eliminando paréntesis.

$$m - n - (2n + 5m) - n = m - n - 2n - 5m - n = -4m - 4n$$

- a) $(x - y) - (y + z - p) + (2y - x)$
 b) $a + [(b - a) - (b - c)]$
 c) $(p + 2r - 6p) - [3r - (6p - 6r)]$
 d) $a^2 - (a^2 - b^2) - (b^2 - c^2) + b^2 - (a^2 + c^2) - c^2$
 e) $(a + b - c) - (a - b + c) + (-a + b + c) - (-a - b + c)$
 f) $(m + n - p) - [m - (m - n + p)]$

Aplico

9. **Representa** con una expresión algebraica el perímetro P de cada uno de los polígonos. Para ello reduce los términos semejantes.

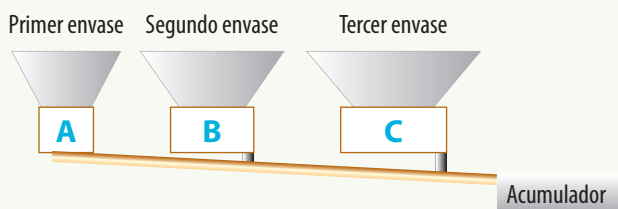


10. **Representa** mediante expresiones algebraicas las siguientes situaciones.

- El perímetro P de un cuadrado de lado a .
- El área A de una rectángulo de lados a y b cm.
- La longitud del cateto c faltante de un triángulo rectángulo de hipotenusa a y cateto p .

11. **Resuelve** los siguientes problemas.

- Camila crea un acumulador de lluvia para su invernadero, con tres envases de agua, como el que se muestra en la figura, donde la capacidad de los envases es de A , B y C litros.



- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la capacidad total T del acumulador?
 - Si Camila descubre que la capacidad del tercer envase es igual al doble del segundo y este al triple del primer envase, ¿cuál es la cantidad de litros acumulados si $A = 3$ litros?
- b) La profesora de Andrés le pide que le ayude a determinar el índice de masa corporal de los

alumnos de su curso ($IMC = \frac{m}{h^2} [kg/m^2]$), donde

m es la masa en kilogramos y h la altura en metros. La OMS indica que si el IMC está entre 18,5 y 24,99 kg/m^2 la persona se clasifica como normal, si $IMC > 25 kg/m^2$, la persona tiene sobrepeso y si $IMC > 30 kg/m^2$, la persona es obesa. Andrés recolecta las siguientes masas en kilogramos para alumnos con una altura de 1,73 m.

57	57,6	60	61,2	66,53	75
76	78,6	81,6	82,3	90	95,56

- ¿Cuántos alumnos se encuentran en la categoría de obesos?
- Si las masas de la lista corresponden a alumnos con una estatura de 1,7 m, ¿cuántos de ellos se encontrarían en la categoría de sobrepeso?

12. **Conecta.** Según la teoría de relatividad de Galileo, la velocidad de un cuerpo depende del punto de referencia. Por ejemplo, si un tren viaja a una velocidad V_t y uno de los pasajeros corre en el mismo sentido a V_p , la velocidad del pasajero respecto a un observador que se encuentra fuera del tren es de $V_r = V_t + V_p$. ¿A qué velocidad corre un pasajero en un tren que va a 100 km/h si un observador externo mide la velocidad del pasajero en 115,2 km/hr?

13. **Descubre el error.** La suma S de los ángulos interiores de un polígono de n lados es igual a $S = 180^\circ (n - 2)$. Utilizando la expresión anterior, Carmen dice que la suma de los ángulos interiores de un heptágono regular es igual a 1258°. ¿Qué error cometió Carmen?

14. **Describe el procedimiento.** Describe paso a paso el procedimiento que utilizas para representar mediante una expresión algebraica el promedio de las asignaturas de Matemática, Biología, Lenguaje e Historia.

15. **Desafío.** Determina la expresión algebraica que representa la secuencia 1, 4, 7, 10, 13.

Reflexiono

- ¿Cuál es la importancia del álgebra? ¿En qué situaciones diarias podrías aplicar las expresiones algebraicas?
- ¿Qué ventajas tiene reducir términos semejantes?
- Al reducir términos semejantes, ¿se sigue la misma prioridad de las operaciones que en las operaciones combinadas?

Refuerzo

- Escribe un término semejante a $-\frac{5}{7}a^2bc^3$.
- Reduce la expresión $-9y^2x + 5x^2y + 8yx^2 + 3xy^2$.
- La distancia que recorre un automóvil en cierto intervalo de tiempo se calcula mediante la expresión $d = vt$ donde v es la rapidez en km/hr y t el tiempo en horas. Si un automóvil recorre 15 km en 25 minutos, ¿a qué rapidez se desplaza?

Palabras clave

- ➔ Multiplicación de expresiones algebraicas.

¿Cómo multiplicar expresiones algebraicas?

- Generalmente expresamos como a^2 el área de un cuadrado de lado a . ¿Cómo se expresaría el área de un cuadrado de lado $2a$? ¿Cuál sería el resultado?

Multiplicación de monomios

El largo de un terreno rectangular es $5x$ y el ancho es $3y$. ¿Cuál es el área del terreno?

Como se muestra en la figura 1, el terreno representado por el rectángulo de lados $5x$ y $3y$ está compuesto por 15 rectángulos pequeños de lados x e y , cada uno de área xy . Luego, el área del terreno es 15 veces xy , es decir $15xy$.

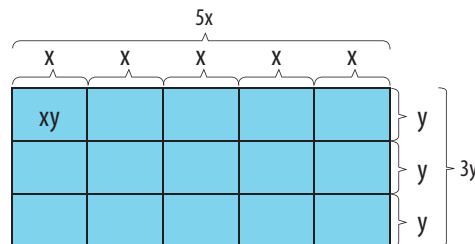


Figura 1

Para calcular el área del rectángulo de forma algebraica se multiplican las medidas de los lados de la siguiente manera:

Paso 1 ➔ Multiplicar los coeficientes numéricos.

$$A = 5x \cdot 3x = (5 \cdot 3) x \cdot y = 15 x \cdot y$$

Paso 2 ➔ Multiplicar los factores literales utilizando propiedades de las potencias.

$$A = 15 x \cdot y = 15x^1 \cdot y^1 = 15 (xy)^1 = 15xy$$

Propiedad de la multiplicación de potencias de igual exponente.

El área del terreno es $15xy$, expresión equivalente a la obtenida geoméricamente.

Multiplicación de monomio por polinomio

El rectángulo tiene lados $a + 2b$ y $2a$. ¿Cuál es su área?

Como se muestra en la figura 2, el rectángulo de lados $2a$ y $a+2b$ se puede dividir en dos rectángulos de lados $2a$ y a , y de lados $2a$ y $2b$. Al calcular sus áreas multiplicando los monomios se obtiene $2a^2 + 4ab$.

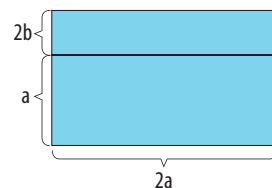


Figura 2

Para multiplicar un monomio por un polinomio de forma algebraica puedes seguir los pasos:

Paso 1 ➔ Multiplicar el monomio por cada término del polinomio, utilizando la propiedad distributiva.

$$A = 2a(a + 2b) = 2a \cdot a + 2a \cdot 2b$$

Paso 2 ➔ Multiplicar los monomios de acuerdo con el caso mostrado anteriormente.

$$A = 2a \cdot a + 2a \cdot 2b = 2a^2 + 4ab$$

El área del rectángulo es $2a^2 + 4ab$, expresión equivalente a la obtenida geoméricamente.

Observa

Multiplicación de monomio

$$\begin{aligned} -2x \cdot 10y &= (-2 \cdot 10) x \cdot y \\ &= (-20) x \cdot y \\ &= (-20) x^1 \cdot y^1 \\ &= (-20) (xy)^1 \\ &= -20xy \\ \frac{1}{4}z \cdot 8z^2 &= \left(\frac{1}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{8}}{1} \right) z \cdot z^2 \\ &= 2z \cdot z^2 \\ &= 2z^1 \cdot z^2 \\ &= 2z^{1+2} = 2z^3 \end{aligned}$$

Observa

Multiplicación de monomio por polinomio

$$\begin{aligned} -3x^2(5x - 2y) &= \\ &= (-3x^2) \cdot 5x + (-3x^2) \cdot (-2y) \\ &= (-3 \cdot 5) x^2 \cdot x + (-3 \cdot -2) x^2 \cdot y \\ &= (-15) x^2 \cdot x^1 + 6 x^2 \cdot y^1 \\ &= (-15) x^2 + 1 + 6x^2y \\ &= -15x^3 + 6x^2y \end{aligned}$$

Multiplicación de polinomios

Observa las medidas del rectángulo. ¿Cuál es su área?

Como se muestra en la figura 3, el rectángulo de lados $2a + 5b$ y $6a + 7b$ se puede dividir en áreas parciales, obteniéndose un área total de $12a^2 + 30ab + 14ab + 35b^2$. Reduciendo términos semejantes se obtiene la expresión $12a^2 + 44ab + 35b^2$.

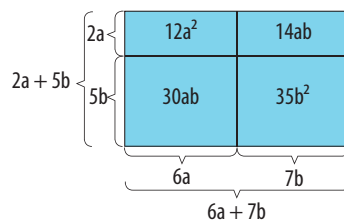


Figura 3

Para multiplicar dos polinomios de forma algebraica puedes seguir los pasos:

Paso 1 Multiplicar uno de los polinomios por cada uno de los términos del otro, utilizando la propiedad distributiva, considerando a uno de los polinomios como un término.

$$A = (2a + 5b)(6a + 7b) = (2a \cdot 5b) \cdot 6a + (2a \cdot 7b) \cdot 7b$$

Paso 2 Multiplicar cada monomio por el polinomio, usando nuevamente la propiedad distributiva.

$$A = (2a + 5b)(6a + 7b) = 2a \cdot 6a + 5b \cdot 6a + 2a \cdot 7b + 5b \cdot 7b \\ = 12a^2 + 30ab + 14ab + 35b^2$$

En cada producto de monomios se multiplican los coeficientes numéricos y los factores literales.

Paso 3 Reducir los términos semejantes.

$$A = (2a + 5b)(6a + 7b) = 12a^2 + 14ab + 30ab + 35b^2 \\ = 12a^2 + 44ab + 35b^2$$

Se suman términos semejantes $14a + 30ab = 44ab$

El área del rectángulo es $12a^2 + 44ab + 35b^2$, expresión equivalente a la obtenida geoméricamente.

En resumen

Para **multiplicar expresiones algebraicas** se utilizan propiedades de potencias y la propiedad distributiva entre otras. Estos productos se pueden obtener de las multiplicaciones entre:

- **Monomios:** Se multiplican sus respectivos coeficientes numéricos y factores literales, utilizando propiedades de las potencias para estos últimos.
- **Monomio por polinomios:** Se multiplica el monomio por cada término que constituye al polinomio, utilizando la propiedad distributiva y la multiplicación de monomios.
- **Polinomios:** Se multiplican todos los términos del primer polinomio por cada uno de los términos del segundo polinomio.

Relaciona

- ¿Qué propiedad de la multiplicación estás aplicando al distribuir los términos?

Razona

y comenta

- ¿Qué propiedades de las potencias se utilizan para multiplicar expresiones algebraicas?
- Al multiplicar dos binomios, ¿qué tipo de polinomio se obtiene? ¿Se obtendrá siempre el mismo tipo?
- ¿Qué sucede con los signos de la expresión algebraica obtenida al multiplicar dos binomios del tipo $(a - b)$?

Observa

Multiplicación de polinomios

$$(2x + y)(y - 5x) = \\ = (2x + y) \cdot y + (2x + y)(-5x) \\ = 2x \cdot y + y \cdot y + 2x \cdot (-5x) + y \cdot (-5x) \\ = 2xy + y^2 + (-10)x^2 + (-5)xy \\ = 2xy + y^2 - 10x^2 - 5xy \\ = -3xy + y^2 - 10x^2$$

Repaso

1. **Reduce** términos semejantes en cada una de las siguientes expresiones algebraicas.

a) $3x + 2y - 8x - y$

e) $3a^3 + 2a^2 + 5a^3 - 2a^2$

i) $0,7x^2y - xy - 3x^2y + 6yx$

b) $11z - 5v - 18z + 13v$

f) $-5b^2z + 6r + 7b^2z + 4r + 25b^2z$

j) $2ab^2 - 4,5ab^3 + 7,3ab^2 - 1,9ab^2 + 0,8ab^3$

c) $x + 2y + 3xy + 4x - 5xy + y$

g) $5x^2y^3 + 6x^3y^2 + x^2y^3 - 4x^2y^2 - 4x^2y^3 - 8x^3y^2$

k) $3bx + 4y - 6bx + 3y + 9xb + bx$

d) $m + n + m + n - n - m - m - m$

h) $abc + a^2bc + ab^2c + abc^2 + a^2b^2c$

l) $-\frac{1}{3}xy + 2ab + yx - 4ba + 2xa$

Práctica guiada

2. Calcula el producto de monomios.

$$3z \cdot z^2 = 3 \cdot z^{1+2} = 3z^3$$

- a) $x \cdot x$ h) $5x^3y^2 \cdot 2x^3$
 b) $3y \cdot y$ i) $-3x \cdot (-8xy^3) \cdot (-5y^2)$
 c) $2x \cdot 3x$ j) $-4x^{-2}y^2 \cdot -3x^4y^2 \cdot 3x^2y^3$
 d) $4a \cdot 5b$ k) $a^2 \cdot -3b \cdot -a^{-3}b \cdot b^2$
 e) $3ab \cdot 4b$ l) $10ab \cdot -0,5ab^4 \cdot 3b \cdot a^2$
 f) $d^2 \cdot d$ m) $-4xy \cdot -2y^4 \cdot 2x^2 \cdot y^{-2}$
 g) $2x^2 \cdot 4x^3$ n) $10ab \cdot 0,2a^{-1}b^4 \cdot -ab^{-2}$

3. Calcula el producto de monomio por binomio.

$$m(2 + 3m^2) = m \cdot 2 + m \cdot 3m^2 = 2m + 3m^3$$

- a) $y(y + 1)$ i) $3x(5x - 4x^2)$
 b) $x(2x - 3)$ j) $3mn^2(2m^2 - n^3)$
 c) $8y(1 + x)$ k) $-4x^2(7x^2 + 8y)$
 d) $10z(8 - y)$ l) $-d^6(9c^6 - yd)$
 e) $-7(3c + 2d)$ m) $3m^3n^2(5m^2n - 8n)$
 f) $-8m(-n - m)$ n) $5xz(-6xyz - 12yxz^2)$
 g) $x^2(5 + y)$ o) $0,6x(0,1xy - 1,5)$
 h) $9xz^3(x - z)$ p) $\frac{1}{3}dc^2 \left(\frac{8}{5}c^2de^6 + \frac{9}{8}c^3d \right)$

4. Calcula el producto de monomio por trinomio.

$$2a(ba - a - 5b) = 2a \cdot ba - 2a \cdot a - 2a \cdot 5b \\ = 2a^2b - 2a^2 - 10ab$$

- a) $x(x + y + 1)$
 b) $c(d - e - 2)$
 c) $3mn(2m - 8n + 5mn)$
 d) $-ab(9ab - 8 - 15b)$
 e) $4xy^2 \cdot (5x^2 + 3x - y^2)$
 f) $-2x \cdot (x^2 + 3x^2y - 5z)$
 g) $\frac{5}{6}ab \cdot \left(\frac{3}{10}a^4 - \frac{2}{5}b^5 + a^2b \right)$

5. Calcula el producto de binomios y reduce.

$$(3x + 1)(x - 2) = 3x \cdot x - 3x \cdot 2 + 1 \cdot x - 1 \cdot 2 \\ = 3x^2 - 6x + x - 2 = 3x^2 - 5x - 2$$

- a) $(x + y)(x + 1)$ f) $(2a - 3b)(8a - 5b)$
 b) $(x + y)(x - 1)$ g) $(-5x + 2)(8 - y)$
 c) $(a + b)(a + b)$ h) $(p^2 + 4q)(p^2 - 2q^2)$
 d) $(a - b)(a - b)$ i) $(3a^3 - 2)(3a^5 - 5b^3)$
 e) $(3a + 5)(4b + 1)$ j) $(0,5x^2 + 10x)(0,2z - 8z^2)$

6. Calcula el producto de binomio por trinomio y reduce.

$$(x + 1)(x + y + 1) = x \cdot x + x \cdot y + x \cdot 1 + x \cdot y + 1 \\ = x^2 + xy + x + xy + 1 \\ = x^2 + xy + 2x + y + 1$$

- a) $(x - 2)(x - z + 6)$
 b) $(a - 7)(-a - b - 9)$
 c) $(8a + 2)(5a + 8b - 5)$
 d) $(-m + n)(-7n + 10m - 1)$
 e) $(-9n - m)(12m - 8 + 10n)$
 f) $(5a^2 + 8b^5)(a - b + ab)$
 g) $(9x^7 - y^3)(3x + 5y - 8xy)$
 h) $\left(\frac{1}{2}u^2v + 2u \right)(3u - 5tv + 3uv)$

7. Calcula el producto de trinomios y reduce.

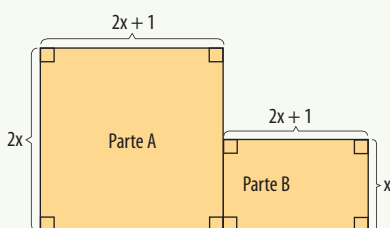
$$(x + y + 1)(x - y - 1) \\ = x \cdot x - x \cdot y - x \cdot y - y \cdot y - y \cdot x - y \cdot 1 - 1 \cdot x - 1 \cdot y - 1 \\ = x^2 - xy - xy - y^2 - yx - y - x - y - 1 \\ = x^2 - y^2 - 2y - 1$$

- a) $(a + b + c)(a + b + c)$
 b) $(a + b + c)(a + b - c)$
 c) $(3x - 3y + 1)(x + y + 2)$
 d) $(x - 2y^4 + y^{-1})(3x^{-2}y + 2xy + x)$
 e) $(2x - 3y + 6z^2)(0,2x + 0,3y + z)$

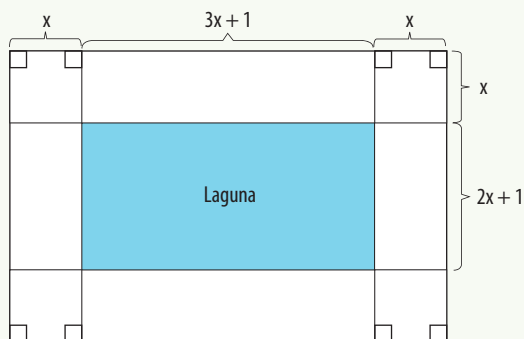
Aplico

8. Resuelve los siguientes problemas.

- a) Catalina y Pedro quieren dividir el área de un terreno para plantar diferentes hortalizas. Si el terreno corresponde a la siguiente figura:



- ¿Cuál es el área de la parte A del terreno?
 - ¿Cuál es el área de la parte B del terreno?
 - ¿Cuál es el área total del terreno?
- b) Un colegio ubicado en la segunda región decide colocar paneles solares para generar electricidad. Los paneles son cuadrados de lado a y rectangulares de lados a y $\frac{a}{2}$. ¿Cuál es el área total que cubren los paneles si se utilizan 12 cuadrados y 15 rectangulares?
- c) En un parque se decide colocar una laguna rectangular como se muestra en la figura.

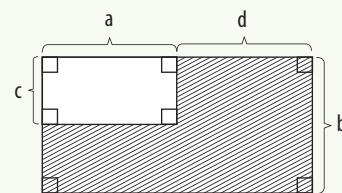


- ¿Cuál es el área de la laguna?
- Se decide colocar una reja de protección alrededor de la laguna. ¿Qué longitud debe tener?

Reflexiono

- ¿Por qué es importante reducir una expresión algebraica?
- ¿Todas las expresiones algebraicas pueden ser reducidas? ¿Por qué? Da ejemplos.
- ¿Qué condiciones debe cumplir una expresión algebraica para ser reducida? Explica.

- d) Patricio, Marta y Andrea discuten sobre la fórmula que representa el área de la zona achurada en la siguiente figura:



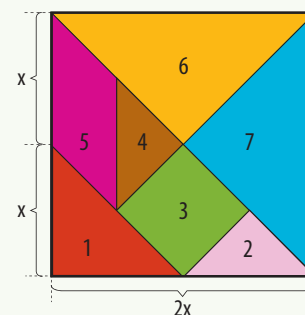
Patricio dice que el área es $(a + c)b - d$.

Marta dice que el área es $ab + bd - ac$.

Andrea dice que el área es $(a + d)a - ac$.

¿Quién o quiénes tienen la razón?

9. **Conecta.** Un Tangrama Chino es una figura compuesta por triángulos isósceles, un cuadrado y un romboide.



¿Cuál es el área de cada una de las figuras que componen el Tangrama?

10. **Descubre el error.** Observa el desarrollo. ¿Qué error se cometió?

$$\begin{aligned} x(2x - y) - (x + y) \\ 2x^2 - y - x + y \\ 2x^2 - x \end{aligned}$$

11. **Describe el procedimiento.** Describe paso a paso el procedimiento para reducir la expresión $(ax - b)(a + b)$.
12. **Desafío.** Determina el área de un cuadrado de lado $a^2 + ab$.
13. **Crea.** Inventa dos figuras geométricas distintas que tengan un perímetro de $2a + 2b + c + 1$.

Refuerzo

1. ¿Cuál es el monomio que se debe multiplicar por $-3ab$ para obtener el producto a^2b^6 ?
2. Determina el área de un cuadrado de lado $(a + b)$.
3. Determina el área de un rectángulo de lados $(a + b)$ y $(a - b)$.

Palabras clave

- ➔ Suma por diferencia.
- ➔ Cuadrado de binomio.
- ➔ Binomios con término común.

¿Qué son los productos notables?

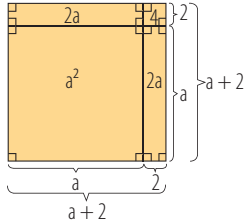
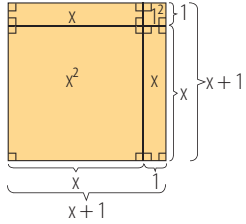
- Un producto notable es una multiplicación de dos expresiones algebraicas que se puede resolver mediante pasos, sin efectuar la multiplicación término a término.

Taller

Reúnanse en parejas, completen la tabla y respondan las preguntas.

Cuadrado de binomio

Ana está calculando el área de los siguientes cuadrados.

Lado	Área	Representación	Producto
$(a + 2)$	$(a + 2)^2$		$(a + 2)(a + 2) =$ $= a \cdot a + a \cdot 2 + 2 \cdot a + 2 \cdot 2$ $= a^2 + 2a + 2a + 4$ $= a^2 + 4a + 4$
$(x + 1)$	$(x + 1)^2$		$(x + 1)(x + 1) =$ $= x \cdot x + x \cdot 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot 1$ $= x^2 + x + x + 1^2$ $= x^2 + 2x + 1$
$(3 + y)$	$(3 + y)^2$		
$(2x + 1)$	$(2x + 1)^2$		
$(1 + 3a)$	$(1 + 3a)^2$		
$(x + 2y)$	$(x + 2y)^2$		

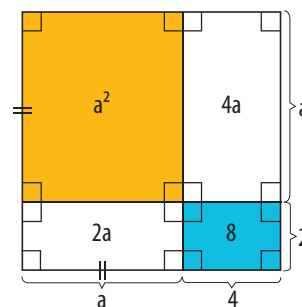
Razonen y comenten

- ¿Qué regularidad observas en el lado de los cuadrados?
- ¿Qué regularidad observas en el producto al calcular el área de los cuadrados? Describe la regularidad.
- ¿Podrías deducir el área de un cuadrado de lado $(a+b)$ aplicando la regularidad descrita? ¿Qué resultado obtendrías?

Binomios con término común

Lucía está calculando el área de las superficies de colores de cerámicas de distintos tamaños.

Ancho	Largo	Área	Producto
$(a + 2)$	$(a + 4)$	$(a + 2)(a + 4)$	$a^2 + 6a + 8$
$(x + 4)$	$(x + 5)$	$(x + 4)(x + 5)$	$x^2 + 9x + 20$
$(x + 1)$	$(x + 2)$	$(x + 1)(x + 2)$	
$(b + 2)$	$(b + 3)$	$(b + 2)(b + 3)$	
$(a + 2)$	$(a - 3)$	$(a + 2)(a - 3)$	



Razonen y comenten

- ¿Qué regularidad observas en las multiplicaciones de expresiones algebraicas?
- ¿Qué regularidad observas en el producto? ¿Qué relación hay entre el coeficiente numérico del segundo término con los términos libres de los binomios? ¿Qué relación hay entre el término libre del producto y los términos libres de los binomios? Describe la regularidad observada.
- ¿Podrías deducir el producto de $(x - 1)(x + 2)$ reduciendo pasos en la multiplicación? ¿Qué resultado obtendrías?

Suma por su diferencia

Jaime está calculando el área de los siguientes rectángulos.

Largo	Ancho	Área	Producto
$(a + b)$	$(a - b)$	$(a + b)(a - b)$	$a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$
$(x + 3)$	$(x - 3)$	$(x + 3)(x - 3)$	
$(2a + b)$	$(2a - b)$	$(2a + b)(2a - b)$	
$(x + 3y)$	$(x - 3y)$	$(x + 3y)(x - 3y)$	
$(2x + 3y)$	$(2x - 3y)$	$(2x + 3y)(2x - 3y)$	

Razonen y comenten

- ¿Qué regularidad observas en los lados de los rectángulos?
- ¿Qué regularidad observas en el producto al calcular el área de los rectángulos? Describe la regularidad.
- ¿Podrías deducir el área de un rectángulo de lados $(x + 1)$ y $(x - 1)$ reduciendo pasos en la multiplicación? ¿Qué resultado obtendrías?

En resumen

Los **productos notables** son multiplicaciones de expresiones algebraicas que presentan regularidades por lo que su cálculo se puede abreviar de la siguiente manera:

Cuadrado de binomio:

$$(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$$

$$(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$$

Binomios con término común:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

Suma por su diferencia:

$$(u + v)(u - v) = u^2 - v^2$$

Cubo de binomio:

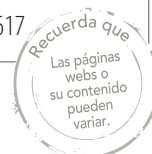
$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$$

$$(u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3$$

Links

Para reforzar productos notables visita:

<http://goo.gl/V5617>



Repaso

1. Calcula los siguientes productos.

- a) $-6xy \cdot y^3 \cdot 4x^{-3}$
 b) $a^{-2} \cdot -b \cdot -\frac{1}{2}a^3b \cdot b^2$
 c) $(5x - 6y^2) \cdot x$
 d) $-30c^3 \cdot (8c^2d^6 + cd)$
 e) $x(y - 5x)$
 f) $3a^2(-7a + 8a^3b)$
 g) $-11a^3b^2(b^3 - 13ac^5)$
 h) $(-4a^3b^2 + 6ac^2) \cdot 0,5a^2c$
 i) $6c(8d - 5cd + 9)$
 j) $-p^2(9p + 8q - 12p^3q)$
 k) $2x\left(-\frac{1}{2}y^4 - x^2 + 3y\right)$
 l) $-6pq \cdot \left(\frac{2}{3}p^{-2} - pq^2 + p^2q^{-2}\right)$

2. Calcula el producto de binomios.

- a) $(x + 2)(x + 5)$ d) $(5x^2 - y)(12x - y^3)$
 b) $(p + q)(3p - 5q)$ e) $(-m^2 + 3n^3)(2m^2 + mn)$
 c) $(8a - 9b)(12b - 4a)$ f) $(0,2x^2y + x)(8z - 2xy^2)$

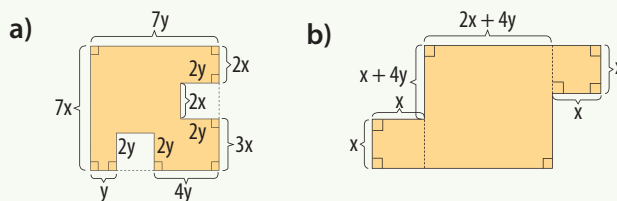
3. Calcula el producto de binomios por trinomios.

- a) $(x - 1)(x + y + 5)$
 b) $(3p + q)(8p + q - 1)$
 c) $(-6m^2n + m)(3 + 8m - n^{-1})$
 d) $(a - b)(2a - b - 7ab)$
 e) $(3x^2 + 2)(1 - x - y^3)$
 f) $\left(\frac{1}{4}x^5y^{-4} - 2\right)(-x^2 + y^{-3} - 8xy)$
 g) $\left(\frac{xy + ab}{2}\right)\left(\frac{x^2y^2 - abxy + a^2b^2}{3}\right)$

4. Calcula el producto de trinomios por trinomios.

- a) $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$
 b) $(2x - 3y + 4z^2) \cdot (5x + 2y + 4z)$
 c) $(-xy - 3y^3 + 3x^2y)(5xy^2 + 3x^2y - 4x^3)$
 d) $(-4xy + 2y^4 + 3x^2y^2) \cdot (5xy^2 + 3x^2y + 7xy)$
 e) $(pq - 4q^2 + p^3)(p + 2pq + p^2)$

5. Calcula el área de las siguientes figuras.



Práctica guiada

6. Calcula el producto de cuadrados de binomios.

$$(m + 1)^2 = m^2 + 2 \cdot 1 \cdot m + 1^2 = m^2 + 2m + 1$$

- a) $(x + 5)^2$ f) $(x + 3y^2)^2$
 b) $(x - 7)^2$ g) $(9ab^3 - 5c)^2$
 c) $(-a + 1)^2$ h) $(11m^2n + 8m^6)^2$
 d) $(-a - 2)^2$ i) $(2,25x + 5)^2$
 e) $(3a + 4b)^2$ j) $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2$

7. Calcula el producto de binomios con término común.

$$(m + 5)(m + 3) = m^2 + (5 + 3) \cdot m + (5 \cdot 3) = m^2 + 8m + 15$$

- a) $(x + 2)(x + 1)$ f) $(5xy - z)(5xy - 2)$
 b) $(a + 5)(a - 4)$ g) $(13k - 5a^2)(13k + 2b^3)$
 c) $(x - 1)(x + 3)$ h) $(11u - 3x^4y)(xy^4 + 11u)$
 d) $(m - 2)(m - 6)$ i) $(x^2 - a^2b)(x^2 - ab^2)$
 e) $(x + p)(x - q)$ j) $(0,5u + 3tv^3)(0,5u + t^3)$

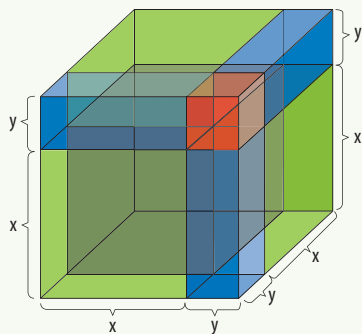
8. Calcula el producto de las sumas por diferencias de binomios.

$$(m+1)(m-1) = m^2 - (1)^2 = m^2 - 1$$

- a) $(x+2)(x-2)$ f) $(k^2 - k^4)(k^2 + k^4)$
 b) $(3x-2)(3x+2)$ g) $(3u^2 + 2uv)(3u^2 - 2uv)$
 c) $(a^2 + 3)(a^2 - 3)$ h) $(u + v^2)(u - v^2)$
 d) $(9c^8d - 3)(9c^8d + 3)$ i) $(0,2x^2 + yz)(0,2x^2 - yz)$
 e) $(x + 4y^2)(x - 4y^2)$ j) $\left(x + \frac{3}{4}y\right)\left(x - \frac{3}{4}y\right)$

9. Calcula el volumen de los cubos de acuerdo a la arista que aparece en la tabla y responde las preguntas.

Arista	Volumen
$(x+y)$	
$(a+b)$	
$(x+1)$	
$(a+2)$	
$(x+2y)$	



- a) ¿Qué regularidad observas en el producto al calcular el volumen de los cubos de la tabla anterior? Descríbela.
 b) ¿Podrías deducir el producto de $(x-1)^3$ reduciendo pasos en la multiplicación? ¿Qué resultado obtendrías?

10. Calcula el producto de cubos de binomios.

$$(m+1)^3 - m^3 + 3 \cdot m^2 \cdot 1 + 3 \cdot m \cdot 1^2 + 1^3 = m^3 + 3m^2 + 3m + 1$$

- a) $(x+2)^3$ d) $(-m-5)^3$ g) $(3uv^2 + 2u^2v)^3$
 b) $(y-3)^3$ e) $(2a+3b)^3$ h) $(3xy^2 - x^2z)^3$
 c) $(-a+4)^3$ f) $(x+3y^2)^3$ i) $(2,7y-5)^3$

11. Analiza cada igualdad. Luego, complétala.

$$(x-y)(x+y) = \underline{x^2} - y^2$$

- a) $\left(\frac{2}{3}x - 6\right)\left(\frac{2}{3}x - 4\right) = \frac{4}{9}x^2 - \underline{\hspace{2cm}} + 24$
 b) $(x + \underline{\hspace{2cm}})(x - 4) = x^2 - x - 12$
 c) $\left(\frac{a}{2} + \frac{3}{4}\right)\left(\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{a^2}{4} + \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}$
 d) $(2a+1)(2a-1) = 4a^2 - \underline{\hspace{2cm}}$

12. Analiza cada expresión. Luego, reduce los términos semejantes en los productos notables involucrados.

$$(x+y)^2 + (x-y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 = 2x^2 + 2y^2$$

- a) $(a+b)^2 - (a-b)^2$
 b) $(x+z)^3 - (x-z)^2 + x(x-z)$
 c) $(a+2)(a-3) + (a+4)(a-4)$
 d) $x(x+3y)^2 + (x-y)^3$

Aplico

13. Analiza las tablas y luego responde.

- a) Observa la tabla.

$(a+b)^2$	$a^2 + b^2 + 2ab$
$(a+b+c)^2$	$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
$(a+b+c+d)^2$	$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$

- b) ¿Qué regularidad observas? Descríbela.
 c) ¿Cuál es el producto de $(a+b+c+d+e)^2$?
 d) Observa la tabla.

$(a-b)(a^2 + ab + b^2)$	$a^3 - b^3$
$(a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$	$a^4 - b^4$
$(a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$	$a^5 - b^5$

- e) ¿Qué regularidad observas? Descríbela.
 f) Aplicando la regularidad descubierta determina el producto de:
 $(a-b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)$
 g) ¿Cuáles son los factores del resultado $a^7 - b^7$?

14. Analiza los siguientes cálculos.

- a) Nicolás utilizó la regularidad del cuadrado de binomio para calcular 61^2 .

$$\begin{aligned} 61^2 &= (60 + 1)^2 \\ &= 60^2 + 2 \cdot 60 \cdot 1 + 1^2 \\ &= 3600 + 120 + 1 \\ &= 3721 \end{aligned}$$

- Utiliza esto para calcular el valor de 32^2 , 104^2 y 203^2 .
- b) Paulina utilizó la regularidad del cuadrado de binomio para calcular 49^2 .

$$\begin{aligned} 49^2 &= (50 - 1)^2 \\ &= 50^2 - 2 \cdot 50 \cdot 1 + 1^2 \\ &= 2500 - 100 + 1 \\ &= 2401 \end{aligned}$$

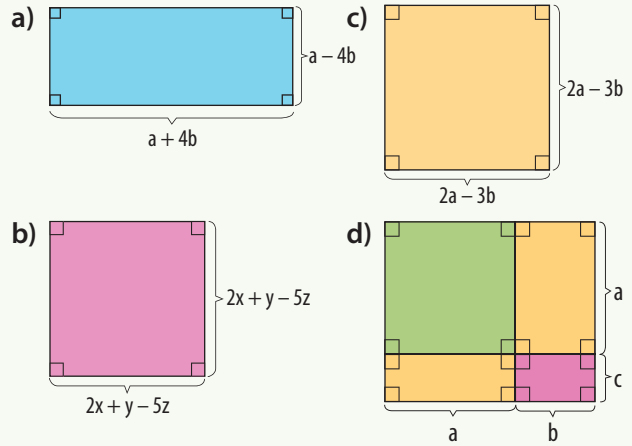
- Utiliza esto para calcular 59^2 , 98^2 y 999^2 .
- ¿Cuál es la diferencia entre el procedimiento de Nicolás y Paulina?
- ¿En qué casos es conveniente aplicar un método respecto de otro?
- c) Javier calculó $42 \cdot 34$ de la siguiente manera:
- $$\begin{aligned} 42 \cdot 34 &= (38 + 4)(38 - 4) \\ &= 38^2 - 4^2 \\ &= 1444 - 16 \\ &= 1428 \end{aligned}$$
- ¿Qué estrategia ocupó Javier?
- Utiliza esto para calcular $41 \cdot 39$, $48 \cdot 52$ y $63 \cdot 57$.
- ¿Qué características deben cumplir los factores para aplicar este procedimiento?

- d) Estefanía calculó $21 \cdot 27$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 21 \cdot 27 &= (30 - 9)(30 - 3) \\ &= 30^2 + (-9 + -3) \cdot 30 + (-9 \cdot -3) \\ &= 900 + (-12) \cdot 30 + 27 \\ &= 900 - 360 + 27 \\ &= 567 \end{aligned}$$

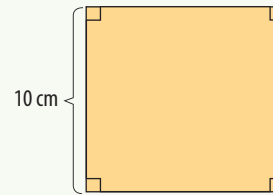
- ¿Qué estrategia ocupó Estefanía?
- Utiliza la estrategia anterior para calcular $18 \cdot 26$, $45 \cdot 32$ y $85 \cdot 103$

15. Calcula el área total de cada figura.

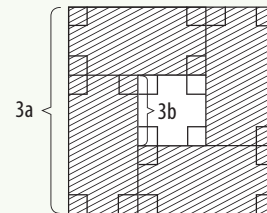


16. Resuelve los siguientes problemas.

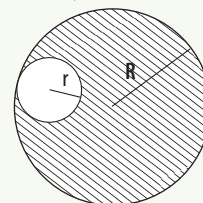
- a) Una caja se forma a partir de un cuadrado de cartón de lado 10 cm recortando un cuadrado de lado x cm en cada esquina, como el que se muestra en la figura.



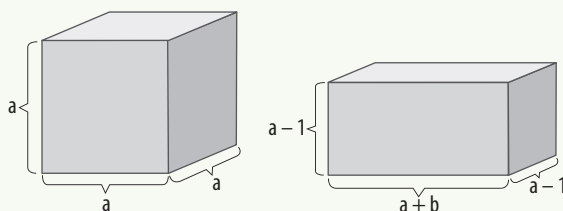
- ¿Cuál es el área lateral de la caja?
- ¿Cuál es el volumen de la caja?
- b) Observa la siguiente figura formada por rectángulos de igual forma y tamaño:



- ¿Cuál es el área de cada rectángulo?
- ¿Cuál es el área del cuadrado formado en el centro?
- c) Utilizando productos notables expresa una fórmula para calcular el área de la región achurada de la siguiente figura formada por dos circunferencias de radio R y r .



- d) Juan asegura que si el lado de un cuadrado aumenta en 2 unidades, el área del cuadrado resultante se duplica. ¿Está en lo correcto?
- ¿De qué manera puedes comprobar o refutar la afirmación de Juan utilizando productos notables?
- e) Un rectángulo de lados **a** y **b** se modifica de tal forma que uno de sus lados se reduce en 3 unidades y el otro lado aumenta en 3 unidades. ¿Su perímetro aumenta o disminuye?
- f) Marcela desea construir dos cajas de cartón utilizando la misma cantidad de cartón en cada una de ellas, pero con distintas aristas. Si las dimensiones de las cajas son las que se muestran en la imagen, ¿qué relación existe entre **a** y **b**?

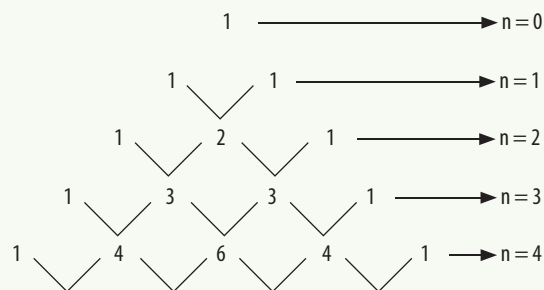


- g) ¿Cuál es el binomio que se debe sumar a $x^2 + 10x - 15$ para obtener el cuadrado de $x + 11$?
- h) ¿Qué expresión algebraica se debe sumar al binomio $x^2 + y^2$, para obtener el cuadrado de $x - y$?
- i) ¿Qué expresión algebraica se debe sumar al binomio $x^2 + 2xy$, para obtener el cuadrado de $x + y$?
- j) Calcula el valor de $8xy$ si $x^2 + y^2 = 24$ y $(x + y)^2 = 30$.
- k) Si $(x - y)^2 = 16$ y $x^2 + y^2 = 106$, calcula el valor de xy .
- l) Si $a + b = 10$ y $a^2 - b^2 = 30$, calcula el valor de $\frac{a-b}{3}$.
- m) Si la suma de dos números es 10 y su resta es 3, ¿cuál es la diferencia entre sus cuadrados?

Reflexiono

- ¿Por qué se le llama a los productos anteriores productos notables? ¿En qué se basa esta distinción?
- ¿Por qué es necesario hacer la distinción entre productos de polinomios y productos notables?
- ¿Por qué es útil conocer y aplicar los productos notables? Argumenta tu respuesta.

17. **Conecta.** El triángulo de Pascal es un arreglo matemático por el que se pueden determinar los coeficientes numéricos del binomio $(x \pm y)^n$. A continuación se muestran los coeficientes del binomio para algunos valores de n .



Describe la regularidad del triángulo de Pascal y calcula el valor de los coeficientes numéricos del binomio $(a - b)^8$.

18. **Argumenta.** Nicole asegura que la expresión $(a - b)^2$ es equivalente a $a^2 - b^2$ para cualquier valor de a y b . ¿Es correcto lo que afirma Nicole? Argumenta.

19. **Descubre el error.** ¿Cuál es el error en el siguiente desarrollo?

$$\begin{aligned} \left(a^3 - \frac{1}{3}\right)^2 &= (a^3)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot a + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= a^6 - \frac{2a}{3} + \frac{1}{9} \end{aligned}$$

20. **Describe el procedimiento.** Describe paso a paso cómo puedes calcular el área de un cuadrado de lado $2x + \sqrt{2}$.

21. **Investiga.** Investiga sobre la relación que existe entre el triángulo de Pascal y el binomio de Newton.

Refuerzo

1. ¿Cuál es el valor de $(x - y)^2$ si $x^2 + y^2 = 85$ y $xy = 38$?
2. ¿Cuál es el volumen de un cubo de arista $2a + \frac{b^x}{3}$?
3. Desarrolla el cuadrado de binomio $(a^n - b^{n+1})^2$.

Palabras clave

- ➔ Factor común.
- ➔ Trinomio cuadrado perfecto.
- ➔ Trinomios con término común.
- ➔ Diferencia de cuadrados.

Repasa

El m.c.d. (máximo común divisor) de dos o más números es el mayor de sus divisores comunes.

Para calcular el m.c.d. entre dos o más números, debes descomponer cada número en factores primos, luego seleccionar todos los factores comunes elevados a los menores exponentes y multiplicarlos. Ejemplo:

El m.c.d. $(9, 18, 30) = 3$ porque:

$$9 = 3 \cdot 3 = 3^2$$

$$18 = 9 \cdot 2 = 3 \cdot 3 \cdot 2$$

$$30 = 15 \cdot 2 = 5 \cdot 3 \cdot 2$$

El divisor común es 3, y el menor grado es 1.

¿Qué es factorizar? ¿Cómo se factorizan expresiones algebraicas?

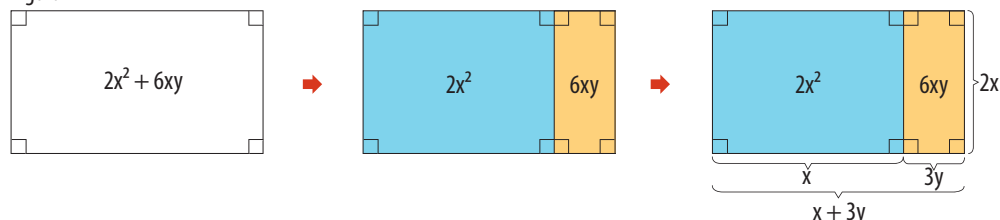
- Dado un polinomio, ¿será posible determinar la multiplicación que lo pudo haber generado? ¿En qué casos se podría determinar? ¿En qué caso no se podría?

Factor común

Elena quiere determinar un par de posibles lados del siguiente rectángulo de área $2x^2 + 6xy$. ¿Cómo podría realizarlo?

En esta situación se pide que a partir del resultado de la multiplicación se busquen los factores que originaron el producto. Observa la figura 1 para encontrar los lados del rectángulo:

Figura 1



Paso 1 Expresa cada término de la expresión algebraica como multiplicación.
 $2x^2 + 6xy = 2 \cdot x \cdot x + 2 \cdot 3 \cdot x \cdot y$

Paso 2 Identifica el **factor común** de los términos que componen la expresión.
 $2x^2 + 6xy = 2 \cdot x \cdot x + 2 \cdot 3 \cdot x \cdot y$ Factor común: $2x$

Paso 3 Escribe la expresión algebraica como un producto de factores en el que uno de ellos es el factor común.

$$2x^2 + 6xy = 2 \cdot x \cdot x + 2 \cdot 3 \cdot x \cdot y = 2x(x + 3y)$$

Por lo tanto, la factorización es de $2x^2 + 6xy$ es $2x(x + 3y)$, y las posibles medidas de los lados del rectángulo de Elena son: $2x$ y $(x + 3y)$.

Razona**y comenta**

- ¿Qué relación tiene el coeficiente numérico del factor común con respecto a los coeficientes numéricos de los términos de la expresión algebraica que representa el área del rectángulo?
- Compara los exponentes de los factores literales de los términos de la expresión algebraica original. ¿Qué puedes concluir con respecto al exponente del factor literal del factor común?

Trinomio cuadrado perfecto ($x^2 \pm 2xy + y^2$)

Almendra quiere determinar una posible expresión para el lado de un cuadrado a partir de su área correspondiente a $x^2 + 2xy + y^2$. ¿Cómo podría realizarlo?

En esta situación se pide que a partir de un **trinomio cuadrado perfecto** se busquen los factores que originaron el producto. Observa la figura 2 para encontrar los lados del rectángulo.

Observa los pasos para factorizar un **trinomio cuadrado perfecto** de forma algebraica:

Paso 1 Comprobar si dos de los términos son cuadrados perfectos positivos.

$$x^2 + 2xy + y^2 \quad x^2 \text{ e } y^2 \text{ son cuadrados perfectos positivos.}$$

Paso 2 Identificar los términos que al elevarlos al cuadrado resultan los cuadrados perfectos anteriores.

$$x^2 + 2xy + y^2 = x \cdot x + 2xy + y \cdot y \quad \text{Los términos son } x \text{ e } y.$$

Paso 3 Comprobar que el tercer término del trinomio corresponda al doble producto de los términos encontrados en el paso anterior.

$$x^2 + 2xy + y^2 = x \cdot x + 2 \cdot x \cdot y + y \cdot y \quad \text{El término } 2xy \text{ corresponde al doble producto de } x \text{ e } y.$$

Paso 4 Escribir la suma o diferencia (dependiendo del signo del doble producto) de los términos encontrados en el paso 2, elevada al cuadrado.

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

Por lo tanto, la factorización de $x^2 + 2xy + y^2$ es $(x + y)^2$ y el lado del cuadrado mide $(x + y)$.

Trinomio de la forma $(x^2 + px + q)$

Felipe desea determinar una posible medida de los lados de un rectángulo a partir de su área $x^2 + 7x + 10$. ¿Cómo podría realizarlo?

En esta situación se pide factorizar un **trinomio de la forma $(x^2 + px + q)$** . Observa la figura 3 para encontrar los lados del rectángulo.

Observa los pasos para factorizar un **trinomio con término común** de forma algebraica:

Paso 1 Identificar el término común y comprobar que esté elevado al cuadrado en la expresión.

$$x^2 + 7x + 10 \quad \text{El término común es } x.$$

Paso 2 Comprobar que de los otros dos términos uno esté multiplicado por el término común y el otro sea un término libre.

$$x^2 + 7x + 10 \quad 7 \text{ está multiplicado por el término común y } 10 \text{ es el término libre.}$$

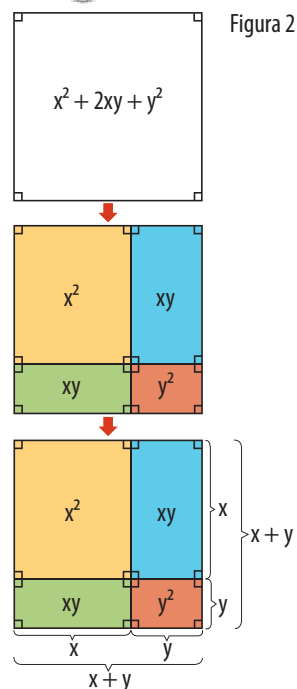
Paso 3 Identificar dos términos que sumados resulten en aquel que está multiplicando al término común y multiplicados correspondan al término libre.

$$x^2 + 7x + 10 = x^2 + (2 + 5)x + 2 \cdot 5 \quad \text{Los términos } 2 \text{ y } 5 \text{ corresponden a los términos no comunes.}$$

Paso 4 Escribir la multiplicación de los binomios correspondientes a la suma o diferencia (según el signo de los términos no comunes) del término común con cada término no común.

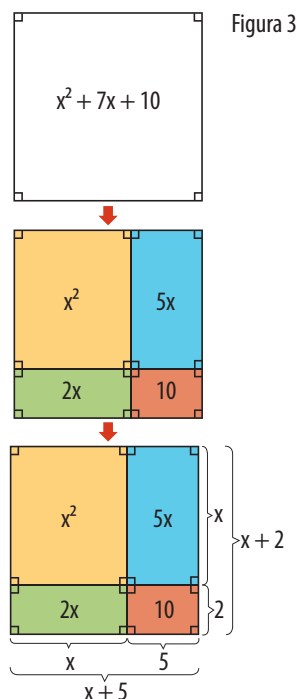
$$x^2 + 7x + 10 = x^2 + (2 + 5)x + 2 \cdot 5 = (x + 2)(x + 5)$$

Por lo tanto, la factorización de $x^2 + 7x + 10$ es $(x + 2)(x + 5)$, siendo $(x + 2)$ y $(x + 5)$ los lados del rectángulo.



Relaciona

Un cuadrado de binomio es de la forma $(a \pm b)^2$, su resultado $a^2 \pm 2ab + b^2$ corresponde a un **trinomio cuadrado perfecto**.



Relaciona

Un producto de binomios con término común es de la forma $(x + a)(x + b)$, su resultado $x^2 + (a + b)x + ab$ corresponde a un **trinomio**.

Relaciona

- Al multiplicar y dividir por el mismo número, ¿se altera la expresión? ¿Por qué?
- ¿Por qué razón se multiplica por el mismo coeficiente que acompaña al término común? ¿A qué producto notable se parece la nueva expresión?

Relaciona

Una suma por su diferencia es de la forma $(a + b)(a - b)$, su resultado $a^2 - b^2$ corresponde a una **diferencia de cuadrados**.

Trinomio de la forma $(ax^2 + bx + c)$

En el caso de que el trinomio sea de la forma $ax^2 + bx + c$ se realiza lo siguiente: por ejemplo, para el caso $7x^2 - 6x - 1$ observa los pasos.

Paso 1 Multiplicar y dividir la expresión por el coeficiente que acompaña al término x^2 .

$$7x^2 - 6x - 1 = \frac{7 \cdot 7x^2 - 7 \cdot 6x - 7 \cdot 1}{7} = \frac{(7x)^2 - 7 \cdot 6x - 7}{7}$$

Paso 2 Identificar dos términos que sumados resulten en aquel que está multiplicando al término común (que en este caso es $7x$) y multiplicados correspondan al término libre.

$$7x^2 - 6x - 1 = \frac{7 \cdot 7x^2 - 7 \cdot 6x - 7 \cdot 1}{7} = \frac{(7x)^2 - 6 \cdot 7x - 7}{7} = \frac{(7x)^2 + (-7+1) \cdot 7x + (-7 \cdot 1)}{7}$$

Paso 3 Aplicar el paso 4 de la factorización de un trinomio con término común y aplicar factor común en los binomios que sea posible.

$$7x^2 - 6x - 1 = \frac{(7x-7)(7x+1)}{7} = \frac{\cancel{7}(x-1)(7x+1)}{\cancel{7}} = (x-1)(7x+1)$$

Por lo tanto, la factorización de $7x^2 - 6x - 1$ es $(x-1)(7x+1)$.

Diferencia de cuadrados $(a^2 - b^2)$

En esta situación se pide que a partir de una **diferencia de cuadrados** se busquen los factores que originaron el producto. Observa la figura 4 para encontrar los lados del rectángulo.

Observa los pasos para factorizar la **diferencia de cuadrados** de forma algebraica:

Paso 1 Comprobar que cada término de la expresión corresponda a un cuadrado perfecto.

$$a^2 - b^2 = a \cdot a - b \cdot b$$

Son cuadrados perfectos.

Paso 2 Identificar los términos que al elevarlos al cuadrado resultan los términos de la expresión.

$$a^2 - b^2 = a \cdot a - b \cdot b$$

Los términos son **a** y **b**.

Paso 3 Escribir la multiplicación de la suma y la diferencia de los términos encontrados en el paso anterior.

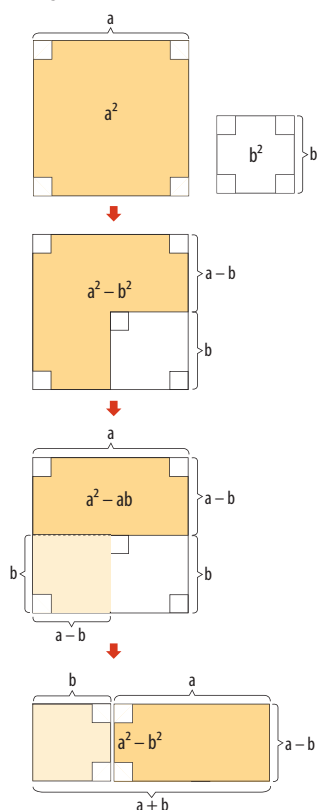
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Por lo tanto, la factorización de $a^2 - b^2$ es $(a + b)(a - b)$.

Razona**y comenta**

- ¿Las expresiones algebraicas solo se pueden factorizar si corresponden a un producto notable? ¿Por qué?
- ¿En qué consiste el proceso de factorización? Explícaselo a un compañero o compañera.
- ¿Un trinomio se podría factorizar como una suma por diferencia?
- ¿Un binomio se podría factorizar como un cuadrado de binomio?
- ¿Qué posibles factorizaciones podrían corresponder a un trinomio? ¿Y a un binomio?

Figura 4



En resumen

La **factorización** es un procedimiento que permite expresar un polinomio como un producto de factores simples de tal manera que al multiplicarlos entre sí, se obtenga el mismo polinomio. A continuación se muestran los 6 tipos de factorizaciones:

Factor común $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$.

Diferencia de cuadrados $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Trinomio cuadrado perfecto $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.

Trinomio de la forma $x^2 + px + q$ $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$.

Suma y diferencia de cubos $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

Cubo de binomio $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$.

Repaso

1. Calcula las sumas por diferencias.

a) $(x - 2)(x + 2)$

b) $(3a + 1)(3a - 1)$

c) $(m^5 - 10n^3)(m^5 + 10n^3)$

d) $(9a^3 + 7b^2c)(9a^3 - 7b^2c)$

e) $(2t^3 - t^4)(2t^3 + t^4)$

f) $(p^n + q^m)(p^n - q^m)$

2. Calcula los cuadrados de binomios.

a) $(x + 5)^2$

d) $(a + bc^2)^2$

b) $(x - 2)^2$

e) $(5a^2b + c^3)^2$

c) $(3x^4 + 5y^2)^2$

f) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

3. Calcula los binomios con término común.

a) $(x + 4)(x - 6)$

d) $(7a^2 + b)(b - 6a^2)$

b) $(2a - 5)(2a - 6)$

e) $(a^2 - 0,2b^3)(a^2 + 12b^2c)$

c) $(15x - mn)(15x - m^2)$

f) $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right)$

4. Calcula los cubos de binomios.

a) $(x + 5)(x + 5)(x + 5)$

c) $(u^2 + 2v)^3$

b) $(1 - 4y)^3$

d) $(pq^2 - r^3)^3$

Práctica guiada

5. Factoriza las siguientes expresiones identificando el factor común en cada una de ellas.

$$5xy + 25x^2z - 5xz = 5x(y + 5xz - z)$$

a) $9a + 9b + 2ab + a^2b$

b) $3xy - 6xz + 27x$

c) $a^9 + a^{10} + a^{11}$

d) $3xy + 2x^2 - 7x^3y$

e) $4a^2x^7 - 7b^3x^4 - 5a^3x^9 + x^3$

f) $0,5x + 0,25x^2 + x^3$

g) $2a^2b^2c^2 + 4ab^2c^2 - 5a^3b^3c^3$

h) $9xy^2 + 3x^2y + 90x^2y^2$

i) $9a^4 - 6a^6b^4 + 12a^5b^{12} - 15a^8b^9$

6. Factoriza los trinomios cuadrados perfectos.

$$x^2 - 12x + 36 = (x - 6)^2$$

a) $x^2 - 4x + 4$

e) $36a^2b^2 - 12abc + c^2$

b) $p^2 - 8p + 16$

f) $m^8 - 16m^4n^2 + 64n^4$

c) $4k^2 + 28k + 49$

g) $9 - 12k + 4k^2$

d) $z^4 - 10z^2w + 25w^2$

h) $16x^4 + 24x^2y + 9y^2$

7. Factoriza el trinomio identificando el término común.

$$z^2 - 13z + 42 = (z - 7)(z - 6)$$

- | | |
|---------------------|---------------------------------------|
| a) $a^2 - 12a + 20$ | g) $s^2 - 5s - 84$ |
| b) $y^2 + 8y - 20$ | h) $r^2 + 16r + 60$ |
| c) $x^2 - 13x + 42$ | i) $z^2 + 2z - 63$ |
| d) $m^2 + m - 12$ | j) $x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}$ |
| e) $x^2 - x - 6$ | k) $b^2 + \frac{4}{3}b - \frac{5}{9}$ |
| f) $a^2 - 5a - 6$ | l) $x^2 - 0,7x + 0,12$ |

8. Factoriza el trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$.

$$\begin{aligned} 2x^2 + 7x + 6 &= 2x^2 + 7x + 6 \cdot \frac{2}{2} \\ &= \frac{4x^2 + 14x + 12}{2} \\ &= \frac{(2x + 4)(2x + 3)}{2} \\ &= \frac{2(x + 2)(2x + 3)}{2} \\ &= (x + 2)(2x + 3) \end{aligned}$$

- | | |
|---------------------|----------------------------|
| a) $6z^2 + 13z - 5$ | d) $6x^4 + 11x^2 - 2$ |
| b) $3m^2 + 8m - 3$ | e) $24a^2 + 43a - 56$ |
| c) $5x^2 + 3x - 2$ | f) $100m^4 - 1396m^2 - 56$ |

9. Factoriza las diferencias de cuadrados.

$$y^2 - 4 = (y - 2)(y + 2)$$

- | | |
|------------------------|-------------------------------|
| a) $25 - k^2$ | f) $225x^4y^2 - 36z^6$ |
| b) $4m^2 - 16n^2$ | g) $169a^6b^4 - 256c^2d^{10}$ |
| c) $a^2b^2 - 81b^4$ | h) $m^2n^2 - n^8$ |
| d) $64p^4 - 100q^6$ | i) $x^4 - 0,16y^2z^8$ |
| e) $49u^2v^4 - 144t^8$ | j) $0,25x^2y^4 - 0,36z^6$ |

10. Factoriza las sumas y diferencias de cubos.

$$\begin{aligned} 8m^3 - 216n^6 &= (3m - 6n^2)((3m)^2 + 3m \cdot 6n^2 + (6n^2)^2) \\ &= (3m - 6n^2)(9m^2 + 18mn^2 + 36n^4) \end{aligned}$$

- | | |
|-------------------------------|--------------------------------|
| a) $64 - k^3$ | g) $a^3 + 27$ |
| b) $8m^3 - 125n^3$ | h) $x^3 + 1.000$ |
| c) $a^3b^3 - 27c^6$ | i) $27a^3 + 125b^3$ |
| d) $p^9 - 343q^6$ | j) $125x^9y^6 + 512z^9$ |
| e) $27^6u^6v^9 - 1.000t^{12}$ | k) $(x + 4)^3 + 8$ |
| f) $x^6 - 0,125y^3z^9$ | l) $(3a + 2b)^3 + (2a + 2b)^3$ |

11. Factoriza las siguientes expresiones como un cubo de binomio.

$$\begin{aligned} 27x^3 - 27x^2y + 9xy^2 - y^3 &= 27x^3 - 27x^2y + 9xy^2 - y^3 \\ &= (3x)^3 - 3 \cdot (3x)^2 \cdot (y) + 3 \cdot (3x)(y)^2 - (y)^3 \\ &= (3x - y)^3 \end{aligned}$$

- | |
|---|
| a) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ |
| b) $8 - 12y + 6y^2 - y^3$ |
| c) $8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$ |
| d) $m^6 - 15m^4n^2 + 75m^2n^4 - 125n^6$ |

12. Factoriza las siguientes expresiones realizando una doble factorización.

$$\begin{aligned} 8ax - 5by + 9az + 9bz - 5ay + 8bx &= \\ &= 8x(a + b) - 5y(a + b) + 9z(a + b) \\ &= (a + b)(8x - 5y + 9z) \end{aligned}$$

- | |
|---|
| a) $6y - 4x - 3xy + 2x^2$ |
| b) $3a^3 - 1 - a^2 + 3a$ |
| c) $x + x^2 - xy^2 - y^2$ |
| d) $4a^3x - 4a^2b + 3bm - 3amx$ |
| e) $-3ax - 3y - 7bx - 7by$ |
| f) $4mnx - 6mny + 10px - 15py$ |
| g) $-10a + 10 + 8aq - 8q$ |
| h) $3a^4 - 27a - 5a^4t + 45at$ |
| i) $x^7y^8z - x^8y^8 - z + x + 0,5x - 0,5z$ |

13. Representa cada expresión algebraica como producto de dos factores.

$$x^2 + 10xy + 25y^2 = (x + 5y)(x + 5y)$$

- $x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{25}$
- $y^2 - 144$
- $x^2y^2 - \frac{1}{9}z^2$
- $x^3 + 3x^2b + 3xb^2 + b^3$
- $\frac{1}{4}a^4b^6 - \frac{9}{16}c^2$
- $y^2 - 1$
- $4x^2 + 12xy - 27y^2$
- $x^2 + 12x + 35$
- $x^2z^2 - \frac{1}{625}z^2$
- $49x^2y^2 - 64x^2$
- $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
- $16x^2y^4 - 4xy^2z + \frac{z^2}{4}$
- $4a^2 + 12a + 9$
- $25z^{18} - 169$

14. Relaciona cada expresión algebraica con su respectiva factorización.

$$6m^2n^4 + 3m^2n^6$$

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| a) $8a^2 - 12ab$ | e) $a^2(a^2 - ab - b^2)$ |
| b) $abc + abc^2$ | f) $5a^2(3a + 4b^2)$ |
| c) $15a^3 + 20a^2b^2$ | g) $4a(2a - 3b)$ |
| d) $a^4 - a^3b - a^2b^2$ | h) $abc(1 + c)$ |

$$3m^2n^4(2 + n^2)$$

15. Verifica si las siguientes igualdades son verdaderas.

$$\begin{aligned} 3a^2b^2c^3 - 15ab^3c^2 + 9ab^2c &= 3ab^2c(ac^2 - 5bc + 3) \\ &= 3ab^2c \cdot ac^2 - 3ab^2c \cdot 5bc + 3ab^2c \cdot 3 \\ &= 3a^2b^2c^3 - 15ab^3c^2 + 9ab^2c \end{aligned}$$

Verdadera

- $16xy^2z^2 + 8xy^2z - 4x^2y^4z = 4xy^2z(4z + 2 - xy^2)$
- $6x^2y^3 + 12x^2z - 36x^3w^2 = 6x^2(y^3 - 2z + 6xw^2)$

Aplico

16. Analiza las siguientes situaciones.

- Si $P = a^2 - 2ab + b^2$ y $Q = a - b$, ¿cuál es el valor de **P** si $Q = 9$?
- ¿Cuál es el valor de $4a^2 + 4ab + b^2$ si se sabe que $2a + b = 15$?
- Calcula el valor de $x^3y + 2x^2y^2 + xy^3$ si se sabe que $xy = 12$ y $x + y = 50$.
- Si $a + b = 25$ y $x - y = 30$, calcula el valor de la expresión $ax - ay + bx - by$.
- ¿Qué binomio debe ser sumado al polinomio $x^2 + 2xy + 5$, para transformarlo en un cuadrado perfecto?
- ¿Qué binomio debe ser elevado al cuadrado para obtener como resultado la expresión $x^8 - 10x^4y^3 + 25y^6$?
- Francisca realiza el siguiente procedimiento para calcular $89^2 - 70^2$:
 $89^2 - 70^2 = (89 - 70)(89 + 70) = (19)(159) = 3021$
 ¿Cuál es la ventaja de realizar este tipo de procedimiento?
- Aplicando el procedimiento de Francisca, calcula $45^2 - 44^2$, $51^2 - 45^2$ y $101^2 - 121^2$.
- Oscar asegura que la suma de dos múltiplos de **a** distintos entre sí, es también un múltiplo de **a**.
 - ¿Es correcta dicha proposición?
 - ¿Ocurrirá lo mismo con la diferencia? Justifica.
 - ¿Ocurrirá lo mismo con la suma de más de dos múltiplos de **a**? Justifica.
- Patricia no está segura de que el binomio $-a^2 - b^2$ sea una diferencia de cuadrados. ¿Cómo puede comprobarlo?
- Estefanía y Carlos quieren demostrar que la diferencia de cuadrados entre dos números consecutivos es un número impar y que la diferencia de cuadrados entre dos números pares consecutivos es siempre un número par. Ellos saben que un número cualquiera se representa por **x** y su consecutivo por $x + 1$, además, saben que un número par se representa como $2x$ y su consecutivo par como $2x + 2$, sin embargo, no saben cómo continuar. Ayúdalos a hacerlo para que demuestren sus premisas.

l) Eduardo sabe que para factorizar el binomio $a^{6x} - b^{6x}$, debe utilizar primero la factorización de diferencia de cuadrados y luego la suma o diferencia de cubos. ¿Qué resultado obtiene al aplicar esos pasos?

m) Carmen y Gabriel comentan acerca de la factorización de la expresión $ac + bc + ad + bd$. Gabriel asegura que es imposible factorizar dicha expresión, ya que no tiene un factor común y no es un trinomio, sin embargo, Carmen dice que sí se puede factorizar si se agrupan algunos términos. ¿A qué se refiere Carmen? Describe un procedimiento para factorizar la expresión.

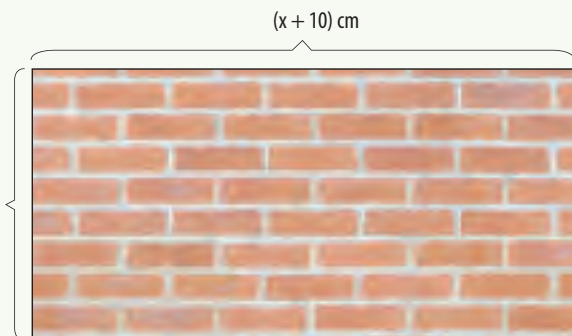
n) Aplica el procedimiento descubierto en la pregunta anterior y factoriza.

$$ax - 2ay + 3a + bx - 2by + 3b.$$

17. Resuelve los siguientes problemas.

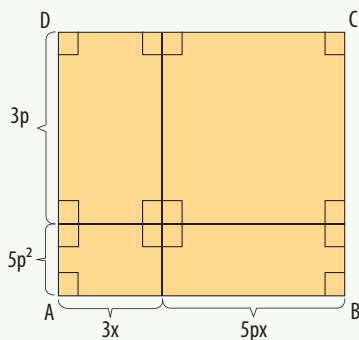
a) La figura representa una pared rectangular y la medida de su superficie se expresa de la siguiente manera: $A = (x^2 + 2x - 80) \text{ cm}^2$.

- ¿Qué expresión representa la altura de la pared?



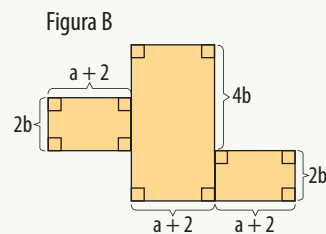
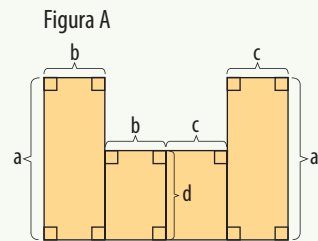
- ¿Qué procedimiento empleaste para obtener la altura de la pared?
- ¿Cómo se llama dicho procedimiento?

b) Expresa la medida del área del siguiente rectángulo como producto de dos factores:



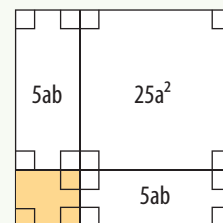
- ¿Qué procedimiento empleaste para obtener dos factores?

c) Andrés quiere dibujar un rectángulo que tenga la misma área de la figura A y otro que tenga el área de la figura B.



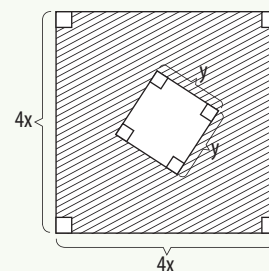
- ¿Cuáles son las dimensiones de los rectángulos que puede dibujar Andrés?
- ¿Cuál es el perímetro y el área de cada uno de los rectángulos?

d) Omar no recuerda las dimensiones de su mesa cuadrada, pero recuerda las siguientes áreas parciales:



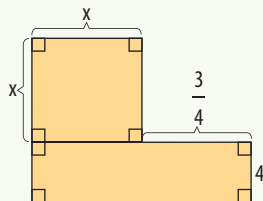
- ¿Cuál es la expresión que representa el área de la mesa cuadrada?
- ¿Cuál es la medida del lado de la mesa?

e) ¿Cuáles son las dimensiones de un rectángulo que tiene la misma área que la parte achurada de la figura?



f) Respecto a un trío pitagórico a, b y c , donde se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$, prueba que si a y b son números pares, entonces c^2 es un número par.

- g) Lorena quiere dibujar un rectángulo que tenga el área de la figura que se muestra a continuación:



- ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo que desea dibujar Lorena?
- h) **a** y **b** son las medidas de un rectángulo de área 50 cm^2 y perímetro 20 cm . ¿A cuánto equivale la expresión $5a^2b + 5ab^2$?
- i) ¿Cuál es el perímetro de un cuadrado de área $x^4 - 5x^2 - 50$?
- j) ¿Cuál es el perímetro de un rectángulo de área $125a^9 - 125b^6$?
- k) ¿Cuál es el lado de un cuadrado de área $9x^2 + 30xy + 25y^2$?
- l) ¿Cuál es la medida del largo de un rectángulo si su ancho mide $(x - 1)$ y su área es $3x^2 - x - 2$?
- m) Valentina quiere construir dos rectángulos de distintas dimensiones, los cuales deben tener un área de $2a^2 + 4a + 10a^3$. ¿Cuáles son los posibles rectángulos que puede construir Valentina?
- Calcula el perímetro de cada uno de ellos si $a = 10 \text{ cm}$.
- n) ¿Cuál es la medida de la arista de un cubo si su volumen es $8y^3 - 12y^2 + 6y - 1$?
- o) Calcula las dimensiones de los paralelepípedo de volumen $2a^4 + 6a^3 + 6a^2 + 4a$ y $a^4 - b^4$ respectivamente.
- p) ¿Cuál es el área total de un paralelepípedos de volumen $8x^3 + 8$?
- 18. Conecta.** Los fractales son figuras geométricas cuya principal cualidad es la autosimilitud, es decir, se crean a partir de la repetición de un patrón geométrico. Considera el siguiente fractal el cual se construye como se muestra a continuación:

Figura 1



Figura 2

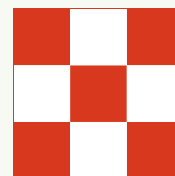
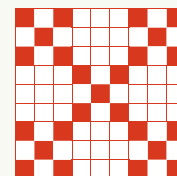


Figura 3



- a) Describe la forma en la que se construye el fractal.
- b) ¿Cuál es la cantidad de cuadraditos rojos para un cuadrado de lado n ? Exprésalo.
- c) ¿Cuál es la cantidad de cuadraditos blancos para un cuadrado de lado m ?
- 19. Describe el procedimiento.** Describe el procedimiento para factorizar los siguientes trinomios.
- a) $144a^8b^2 - 120a^4bc^8 + 25c^{16}$
- b) $16x^4 + 12cx^2 - 40c^2$
- c) $9m^6 - 67m^3n - 40n^2$
- 20. Descubre el error.** ¿Cuál es el error cometido por Camila al factorizar el trinomio $6x^2 - 13x - 5$?

$$\begin{aligned}
 6x^2 - 13x - 5 &= 6x^2 - 13x - 5 \cdot \frac{6}{6} \\
 &= \frac{(6x)^2 - 13 \cdot (6x) - 30}{6} \\
 &= \frac{(6x + 15)(6x - 2)}{6} \\
 &= \frac{3(2x + 5) \cdot 2(3x - 1)}{6} \\
 &= (2x + 5)(3x - 1)
 \end{aligned}$$

- 21. Desafío.** Muestra que la suma de dos números impares es siempre un número par, para esto considera los números impares $2x + 1$ y $2y + 1$.
- 22. Investiga.** Investiga sobre el matemático indio Srinivasa Ramanujan y la anécdota que le ocurrió con el número 1729. ¿Qué relación tiene dicha anécdota con los productos notables y la factorización?

Reflexiono

- ¿Cuál es la relación que existe entre los productos notables y la factorización?
- ¿Por qué es posible factorizar una suma de cubos y no es posible factorizar una suma de cuadrados? Explica y da ejemplos.

Refuerzo

1. ¿Cuál es el perímetro de un cuadrado de área $36x^2 + 24xy + 4y^2$?
2. ¿Cuál es el valor del trinomio $4x^2 + a^2 + 4ax$, si $2x + a = 29$?
3. Factoriza $a^2 - x^2$.



Multiplicar expresiones algebraicas utilizando productos notables y otras regularidades (lecciones 13, 14, 15 y 16).

1 Calcula los siguientes productos.

- | | |
|--|---|
| a. $(3x + 2)^2$ | n. $(a^3 + b^2)(a^3 - b^2)$ |
| b. $(2a + 1)^2$ | o. $\left(\frac{r}{4} + 5s\right)\left(\frac{r}{4} - 5s\right)$ |
| c. $(m^2 + 1)^2$ | p. $\left(\frac{m^3}{7} + 3\right)\left(\frac{m^3}{7} - 3\right)$ |
| d. $(3x + 2y)^2$ | q. $(a + 1)^3$ |
| e. $(2a^3 + b)^2$ | r. $(1 - a)^3$ |
| f. $(m - 2n^3)^2$ | s. $(2m + 3)^3$ |
| g. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ | t. $(3m - 5)^3$ |
| h. $\left(4r - \frac{s}{2}\right)^2$ | u. $(-rs - 2)^3$ |
| i. $\left(\frac{2r}{5} - \frac{s}{2}\right)^2$ | v. $\left(\frac{1}{3}z - 2\right)^3$ |
| j. $(m - n)(m + n)$ | w. $(z + 1)(z + 3)$ |
| k. $(2v + 2)(2v - 2)$ | x. $(2p - 5)(2p - 8)$ |
| l. $(3x^2 - y)(y + 3x^2)$ | y. $(1 - 9u^2)(9u^2 + 10)$ |
| m. $(4a^2 + 6)(4a^2 - 6)$ | z. $(2a^4 + b)(2a^4 - 3b)$ |

2 Aplica productos notables y reduce las siguientes expresiones.

- a. $(3x + 1)^2 + 8$
- b. $(2a + 1)^2 - (3a + 2b)^2$
- c. $(2p + 1)^3 - 6p(2p + 1)$
- d. $(2m + 1)^3 - 3mn(2m + 1)$
- e. $(a - b)^3 - 3ab(a - b)$
- f. $(r + 3s)^3 - (5r + 2s)^2 - 4r$

- g. $4(2t + 1)^3 - 2(3t + 2)^3$
- h. $(3x^2 - 5y^3) - (x^2 - y^2)^2$
- i. $\left(\frac{a}{2} + \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{a}{5} - 2\right)\left(\frac{a}{5} + 2\right)$

3 Relaciona las columnas A y B según corresponda.

Columna A

Columna B

$$x^2 - y^2$$

$$(x^2 + y^2)(x - y)(x + y)$$

$$(x^3 - y^3)^2$$

$$(x + y)^3$$

$$x^4 - y^4$$

$$x^6 - 2x^3y^3 + y^6$$

$$(x - y)^2 + (x - y)^2$$

$$2(x - y)^2$$

$$(y + x)^2(x + y)$$

$$(x + y)(x - y)$$

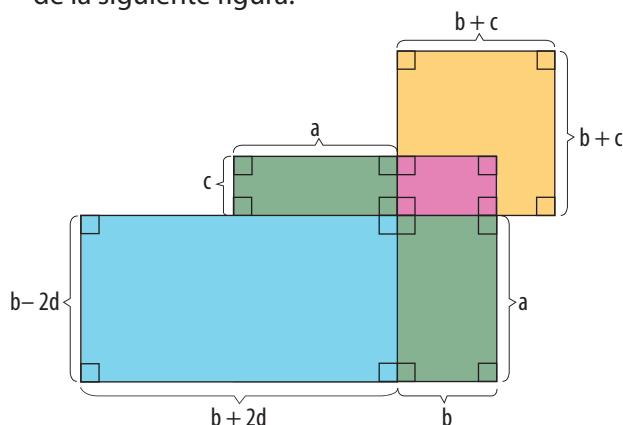
4 Identifica el término que falta en las siguientes expresiones.

- a. $(a + 5)^2 = a^2 + \underline{\hspace{1cm}} + 25$
- b. $(\underline{\hspace{1cm}} + b^2)^2 = 16 + 8b^2 + \underline{\hspace{1cm}}$
- c. $\left(3m + \frac{1}{2}\right)^2 = \underline{\hspace{1cm}} + 3m + \underline{\hspace{1cm}}$
- d. $(n - 4)^2 = \underline{\hspace{1cm}} - 8n + 16$
- e. $(r - \sqrt{2})^2 = r^2 - \underline{\hspace{1cm}} + 2$
- f. $\left(\frac{2}{3} - s\right)^2 = \underline{\hspace{1cm}} - \frac{4}{3}s + \underline{\hspace{1cm}}$
- g. $(2 - t)(2 + t) = \underline{\hspace{1cm}} - t^2$
- h. $(5u - v^4)(5u + v^4) = 25u^2 - \underline{\hspace{1cm}}$
- i. $(\underline{\hspace{1cm}} + 2)^3 = z^3 + \underline{\hspace{1cm}} + 12z + \underline{\hspace{1cm}}$
- j. $(2x + \underline{\hspace{1cm}})^3 = \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} + 6xy^2 + \underline{\hspace{1cm}}$

5 Resuelve los siguientes problemas.

- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área de un cuadrado de lado l aumentada en 2 unidades?
- ¿Qué binomio se debe sumar a $-\frac{3x^2}{4} - x^6$, para obtener el cubo de $\frac{1}{2} - x^2$?
- Si $x + y = 4$ y además $x^2 - y^2 = 80$, entonces calcula $x - y$.
- Si $(m + n)^2 = 81$ y $m^2 + n^2 = 53$, calcula el valor de $-5mn$.
- Si la suma entre dos números es 15 y su resta es 6, ¿cuál es la diferencia entre los cuadrados de cada uno?

6 Aplica productos notables para calcular el área de la siguiente figura.



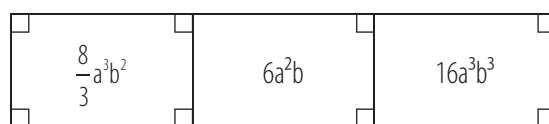
Factorizar expresiones algebraicas utilizando las regularidades establecidas en la multiplicación de expresiones algebraicas (lección 17).

7 Factoriza las siguientes expresiones.

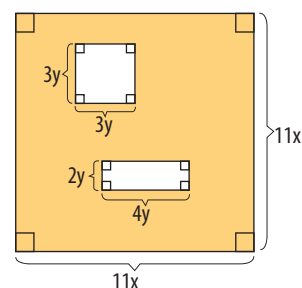
- | | |
|--|-------------------------------------|
| a. $14c^2d + 42cd^3$ | i. $\frac{a^2}{100} - \frac{1}{49}$ |
| b. $15p^3 - 100p^2$ | j. $a^2b^2 - \frac{1}{9}$ |
| c. $\frac{a^2}{2} - \frac{5a}{6}$ | k. $25 - (m + n)^2$ |
| d. $10k^3 - 15k^2 + 20k$ | l. $9c^2 - (d - 5)^2$ |
| e. $\frac{c}{2} + \frac{c^2}{4} - \frac{c^3}{6}$ | m. $12x^3 - 3xy^2$ |
| f. $ax - bx + 2a - 2b$ | n. $u^2v - u^3$ |
| g. $xy + 2x - 3y - 6$ | o. $y^3 - 9y$ |
| h. $6a^2 + 6ac - ab - bc$ | p. $\frac{1}{216} + 216x^9$ |

8 Resuelve los siguientes problemas.

- ¿Cuántos factores irreducibles tiene la expresión $16a^4 - b^8$?
- Si $a^2 + b^2 = 23$ y $ab = 12$, ¿cuál es el valor de $(a - b)^2$?
- ¿Cuál es el valor de $x^2 + y^2$ si $(x + y)^2 = 80$ y $xy = 20$?
- ¿Cuál es el valor de mn si $m^2 + n^2 = 45$ y $(m + n)^2 = 98$?
- ¿Cuál es el perímetro del cuadrado de área $64a^2 - 16a + 1$?
- ¿Cuál es el perímetro del rectángulo de área $27x^3 + 8y^3$?
- Calcula el perímetro de la siguiente figura según las áreas dadas.



- Dibuja el rectángulo que tenga el área de la zona pintada de la siguiente figura



- ¿Cuáles son las posibles dimensiones del terreno plantado si se sabe que la superficie cubierta por plantas es $7x^2 + 17x + 6$?



Palabras clave

- ➔ Ecuaciones lineales de primer grado con una incógnita con coeficientes racionales.

Repasa**Resolución de ecuación lineal con coeficientes enteros**

$$3x + 8 = 5(1 - x)$$

$$3x + 8 = 5 - 5x / +5x$$

$$3x + 5x + 8 = 5 - 5x + 5x$$

$$8x + 8 = 5 / -8$$

$$8x + 8 - 8 = 5 - 8$$

$$8x = -3 / \div 8$$

$$x = -\frac{3}{8}$$

Relaciona

- En el paso 1, ¿por qué se resta 7920?
- En el paso 2, ¿por qué se divide en 3?

¿Cómo plantear y resolver ecuaciones lineales con una incógnita con coeficientes racionales?

- En cursos anteriores has resuelto ecuaciones lineales de primer grado con una incógnita con coeficientes enteros. ¿Se utilizarán las mismas estrategias para ecuaciones con coeficientes racionales?

Ejemplo 1: Ecuaciones con coeficientes enteros

En la lección 14 se planteó la igualdad $4b + 3c = 10\,890$ para representar que el costo total de las blusas sumado al costo total de los calcetines es igual al monto pagado por el papá de Isidora. Supongamos que el precio de cada blusa es \$1980. ¿Cómo podríamos determinar el precio de los calcetines?

Esta situación se puede resolver mediante una **ecuación lineal con coeficientes enteros**. Observa los pasos.

Paso 1 ➔ Plantear la ecuación.

Al reemplazar el precio de la blusa, la igualdad quedaría
 $4 \cdot 1980 + 3c = 10\,890$.

Paso 2 ➔ Resolver la ecuación.

$$4 \cdot 1980 + 3c = 10\,890 \rightarrow 7920 + 3c - 7920 = 10\,890 - 7920 / -7920$$

$$3c = 2970$$

$$3c = 2970 / \div 3$$

$$\frac{3c}{3} = \frac{2970}{3}$$

$$c = 990$$

Sumar o restar el término libre que acompaña a la incógnita.

Multiplicar o dividir el coeficiente numérico que acompaña a la incógnita.

Paso 3 ➔ Verificar la solución encontrada.

$$7920 + 3c = 10\,890 \rightarrow 7920 + 3 \cdot 990 = 10\,890$$

$$7920 + 2970 = 10\,890$$

$$10\,890 = 10\,890$$

Se reemplaza la ecuación considerando $c = 990$.

Se llega a una igualdad, por lo tanto, la solución es correcta.

Paso 4 ➔ Interpretar la solución encontrada.

El precio de cada par de calcetines es \$990.

En resumen

Una **ecuación lineal** con una incógnita es una igualdad cuya variable o valor desconocido es de exponente 1. Cuando este tipo de ecuación es verdadera solo para un determinado valor de la incógnita, dicho valor es llamado **solución**.

Ejemplo 2: Ecuaciones con coeficientes racionales

La mamá de Luis tiene un kiosco en la intersección de las calles principales de Curicó. Ella compra los productos que vende al por mayor y debe agregar el IVA al precio establecido. Un día fue a comprar cajas de leche y el precio de las de chocolate estaba con un descuento del 10%. Si pagó \$771 por el pack de cajas de leche con chocolate, incluyendo el IVA y el descuento, ¿cuál era el precio establecido?

Esta situación se puede resolver mediante una ecuación lineal con coeficientes racionales. Observa los pasos.

Paso 1 ▶ Plantear la ecuación traduciendo el lenguaje natural al algebraico.

Precio establecido: p

Precio incluyendo el IVA: $p + \frac{19}{100}p = p + 19\%p$.

Precio con IVA y con el descuento: $p + \frac{19}{100}p - \frac{10}{100}(p + \frac{19}{100}p)$

Por lo tanto, la ecuación a plantear es $p + \frac{19}{100}p - \frac{10}{100}(p + \frac{19}{100}p) = 771$.

Paso 2 ▶ Resolver la ecuación.

$$p + \frac{19}{100}p - \frac{10}{100}(p + \frac{19}{100}p) = 771$$

$$p + \frac{19}{100}p - \frac{10}{100}p - \frac{190}{10\,000}p = 771$$

$$p + \frac{19}{100}p - \frac{1}{10}p - \frac{19}{1000}p = 771 / \cdot 1000$$

$$1000p + 190p - 100p - 19p = 771\,000$$

$$1071p = 771\,000 / \div 1071$$

$$p = 719,88 \approx 720$$

Aplicar la propiedad distributiva

Simplificar y multiplicar por el mínimo común múltiplo entre los denominadores.

Reducir términos semejantes.

Despejar la incógnita.

Observa

$$\frac{1}{3}x + \frac{5}{4} = 1 - \frac{5}{6}x / \cdot 12 \text{ m.c.m.}(3, 4, 6) = 12$$

$$\frac{1}{3}x \cdot 12 + \frac{5}{4} \cdot 12 = 1 \cdot 12 - \frac{5}{6}x \cdot 12$$

$$4x + 15 = 12 - 10x$$

$$4x + 10x = 12 - 15$$

$$14x = -3$$

$$x = \frac{-3}{14} = -\frac{3}{14}$$

Paso 3 ▶ Verificar la solución encontrada.

$$p + \frac{19}{100}p - \frac{10}{100}(p + \frac{19}{100}p) = 771 \rightarrow 720 + \frac{19}{100} \cdot 720 - \frac{10}{100}(720 + \frac{19}{100} \cdot 720) = 771$$

$$720 + 136,8 - 0,1(720 + 136,8) = 771$$

$$771,12 \approx 771$$

En este caso, como se aproximó la solución, también se debe aproximar la igualdad.

Paso 4 ▶ Interpretar la solución encontrada.

El precio establecido del pack de cajas de chocolate es \$720.

En resumen

Una **ecuación de primer grado con una incógnita con coeficientes racionales** se puede resolver amplificando sus miembros por el m.c.m. de los denominadores con el objeto de convertir la ecuación original en una ecuación equivalente que contenga solo coeficientes enteros.

Razona

y comenta

- En las ecuaciones con coeficientes racionales, ¿para qué se multiplica por el m.c.m. de los denominadores?
- Si una ecuación lineal tuviera dos incógnitas, ¿podrías encontrar la solución? ¿Por qué?



Repaso

1. Calcula el valor de la incógnita en cada ecuación.

- a) $3x + 2 = 8$ f) $26 - 8d = -21$
 b) $7a - 1 = 6$ g) $9m + 7 = 1 - 5m$
 c) $8 - z = -6$ h) $-8 - 3r = 17 + r$
 d) $5x - 2 = x$ i) $-10c + 10 = -90 + 140c$
 e) $14 + 13x = 19$ j) $-30 - 50x = 42x + 5$

2. Plantea las ecuaciones a partir de los enunciados y luego resuélvelas.

- a) Si el resultado de la multiplicación entre un número y 1 es disminuido en 9 unidades, se obtiene el cuádruplo del mismo número aumentado en 55 unidades, ¿cuál es el doble del número?
 b) El área de un hexágono regular es 87 cm^2 . Si la apotema mide 5 cm, ¿cuánto mide el lado?
 c) La edad de Patricio es el doble de la de Gabriela y juntas suman 36 años. Si Gabriela tiene 12 años, ¿cuál será la suma de sus edades en 5 años más?

Práctica guiada

3. Calcula el valor de la incógnita en cada ecuación.

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}x - 2 &= \frac{5}{3} - x & / \cdot \text{m.c.m}(6, 3) = 6 \\ x - 12 &= 10 - 6x & / +12 \\ x &= 22 - 6x & / +6x \\ 7x &= 22 & / \cdot \frac{1}{7} \\ x &= \frac{22}{7} \end{aligned}$$

- a) $a + 5 = 2a + 3$
 b) $\frac{5}{8}d - \frac{1}{9} = \frac{13}{2}d - \frac{6}{5}$
 c) $\frac{7}{3}x - \frac{1}{5}x = \frac{2}{15}x + 5\frac{2}{3} - 1\frac{1}{5}$
 d) $\frac{3z}{2} + \frac{2z}{3} = \frac{z}{2} - \frac{2z}{4}$
 e) $\frac{3x-4}{4} = x+6$
 f) $\frac{2x+6}{8} = x+16$
 g) $\frac{-y-3}{3} = 6(y-6)$
 h) $0,5(1-x) + 0,2(1+x) = x$

4. Comprueba si los siguientes valores son soluciones de las ecuaciones planteadas.

$$\frac{x}{4} + 1 = 2; x=4 \quad \frac{4}{4} + 1 = 2 \quad 1+1=2 \quad 2=2$$

- a) $\frac{2p+6}{3} = p-8; p=8$
 b) $\frac{7q+5}{3} = \frac{3q+7}{2}; q=\frac{11}{5}$
 c) $0,25z + 4 = \frac{5}{6}(z-3); z=13$
 d) $\frac{-(x+3x)}{2} = \frac{2}{3}(x-2); x=-\frac{1}{2}$

Aplico

5. Plantea las ecuaciones a partir de los enunciados y luego resuélvelas.

- a) La suma de dos números es 5,5. El primero es un tercio del segundo. ¿Cuáles son los números?
 b) Si al doble de un número le restamos cinco unidades obtenemos su mitad. ¿Cuál es ese número?
 c) El largo de un rectángulo mide 3 centímetros más que el ancho. Además, se sabe que la mitad del ancho es la tercera parte del largo. ¿Cuál es el área del rectángulo?
 d) Actualmente mi edad es un cuarto de la edad de mi padre, y hace 10 años la suma de nuestras edades era 30. ¿Cuántos años tenemos cada uno?

6. Resuelve los siguientes problemas.

- a) Una pirámide de base cuadrada tiene un área basal de 2304 m^2 . Si el volumen de la pirámide es de 7680 m^3 , ¿cuál es la medida de la mitad de su altura?
 b) Un depósito tiene forma de cono y su radio basal es de 30 m de longitud. Si contiene líquido hasta el 60% de su capacidad, que corresponde a 48600 m^3 de agua, ¿cuál es la altura del depósito? Considera $\pi = 3$.

7. Interpreta la solución de los siguientes problemas.

- a) Si una sala de clases tiene una altura de 3 m y se desean apilar verticalmente cajas de útiles escolares cuyas alturas son de 35 cm cada una, ¿cuántas de estas cajas se pueden apilar como máximo?
 b) Un padre reparte entre sus tres hijos \$28000. El menor recibe la mitad de lo que recibe el segundo, y este, la tercera parte de lo que recibe el mayor. ¿Cuánto dinero recibe cada uno?

8. Resuelve los siguientes problemas.

- En un partido de fútbol, Carmen anotó una cierta cantidad de goles, pero Gloria, del equipo contrario, convirtió 2 goles más que Carmen. Si entre ambas anotaron 10 goles, ¿cuántos anotó cada una?
- En una pastelería venden pasteles de chocolate, de canela y de manjar. El de canela cuesta \$100 más que el de chocolate, y el de manjar, \$130 más que el de canela. ¿Cuánto cuesta cada pastel si el precio de los tres es de \$3000?
- Carlos no tiene instrumento para medir los lados de su mesa de centro rectangular, pero sí sabe que una cinta que rodea la mesa mide 125 cm, y que el largo es el doble del ancho más 10 cm. ¿Cuál es el largo y el ancho de la mesa?
- La señora Juanita vende completos. Ella quiere duplicar el precio de los completos y agregarle otros \$150 más. Si ahora cobra \$500 por cada completo, ¿cuál sería el nuevo precio?
- El monto total a pagar por un pantalón, una camisa y unos zapatos en una tienda es de \$44 000. El precio de la camisa es cuatro veces el del pantalón menos \$1500 y, a su vez, el de los zapatos es cinco veces el del pantalón más \$500. ¿Cuál es el precio de cada uno de los artículos?
- La tercera parte de un huerto se ocupa para el cultivo de lechugas y la mitad, para zanahorias. El resto, de 80 m², aún está sin cultivar. ¿Cuál es la superficie del huerto?
- Un artesano vende en tres meses la mitad de sus productos y en los siguientes tres meses vende un tercio de los productos que le quedan. ¿Cuántos productos tenía el artesano al principio del año si aún le quedan por vender 90?

- El curso de Angélica participará en una feria gastronómica, por lo que deciden gastar un cuarto de los ahorros del curso en insumos básicos de cocina, \$10 000 en una cocinilla y \$2000 en afiches publicitarios. ¿Cuál era la cantidad que tenían ahorrada si al final les queda la sexta parte de ella?
- Un albañil debe realizar una mezcla de 15 kg para construir una pared, el precio de cada kilogramo de arena es de \$150 y el de arena y ripio es de \$30. El albañil gasta \$115 por kilogramo de mezcla. ¿Cuánta cantidad de cada uno debe utilizar en la mezcla?

9. **Conecta.** Para medir la temperatura se pueden utilizar diferentes escalas, por ejemplo, los grados Celsius y Fahrenheit. La relación entre una escala y otra está dada por la ecuación $^{\circ}\text{C} = \frac{5\text{F} - 160}{9}$. Estima la temperatura en estos momentos en grados Celsius y exprésala como grados Fahrenheit.
10. **Describe el procedimiento.** Describe paso a paso el procedimiento para resolver la ecuación.

$$\frac{(x+2)}{3} = \frac{(5-x)}{2}$$

11. **Descubre el error.** ¿Cuál es el error en la siguiente resolución?

$$\begin{aligned} x - 2 &= \frac{x}{3} + 1 & 3(x - 2) &= x + 1 \\ & & 3x - 6 &= x + 1 \\ & & 3x - x &= 1 + 6 & x &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

12. **Argumenta.** ¿Cuál es la solución de la ecuación $x + 3 = x + 2$? Justifica tu respuesta.
13. **Crea.** Inventa dos situaciones distintas en las que se pueda plantear y resolver la ecuación:

$$3(x - 2) + \frac{x}{6} = 2x$$

Reflexiono

- ¿Por qué para comprobar si la solución de una ecuación es correcta se debe remplazar en la ecuación?
- ¿Qué relación tiene ese procedimiento con el concepto de identidad?
- Investiga cómo se llaman aquellas igualdades que son verdaderas para cualquier valor.

Refuerzo

- Resuelve la ecuación $\frac{2x+13}{5} = 0,7(x-10)$.
- Gustavo sale de su casa en auto a las 8:00 con una rapidez de 90 km/h. Una hora más tarde, su amiga Karen pasa por su casa a 100 km/h. Si los dos van al mismo lugar y viajan con rapidez constante, ¿a qué distancia Karen alcanzará a Gustavo?

Palabras clave

⇒ Ecuaciones literales.

¿Cómo plantear y resolver ecuaciones literales?

- Seguramente en Física has aprendido que la fórmula para la rapidez constante de un móvil es $v = \frac{d}{t}$. ¿Cómo podrías expresar el tiempo t en función de la distancia d y la velocidad v ?

En la lección 14 encontramos la igualdad $4b + 3c = 10\,890$, donde b representa el precio de cada blusa y c el precio de cada par de calcetines. ¿Cómo podríamos determinar una expresión para b en función de c ? ¿Y para c en función de b ?

La igualdad anterior se puede interpretar como una ecuación literal, ya que posee letras que, dependiendo de lo que se quiera averiguar, pueden ser consideradas como incógnitas o constantes. Observa:

Paso 1 ➤ A partir de lo que se desee averiguar identificar la incógnita.

En el caso de averiguar el precio de cada blusa la incógnita sería b .

En el caso de averiguar el precio de cada par de calcetines la incógnita sería c .

Paso 2 ➤ Buscar una expresión para la incógnita en función de las otras letras que se considerarían constantes.

Incógnita b	Incógnita c
$4b + 3c = 10\,890 \rightarrow -3c$	$4b + 3c = 10\,890 \rightarrow -4b$
$4b = 10\,890 - 3c \div 4$	$3c = 10\,890 - 4b \div 3$
$b = \frac{10\,890 - 3c}{4}$	$c = \frac{10\,890 - 4b}{3}$

Paso 3 ➤ Verificar que la expresión encontrada es correcta.

$$\begin{aligned}
 4b + 3c = 10\,890 &\rightarrow \cancel{4} \cdot \left(\frac{10\,890 - 3c}{\cancel{4}} \right) + 3c = 10\,890 \\
 &\rightarrow 10\,890 - 3c + 3c = 10\,890 \\
 &10\,890 = 10\,890
 \end{aligned}$$

En cada caso, no se obtiene una solución numérica sino una expresión para cada incógnita (a diferencia de la resolución de ecuaciones lineales en que es posible llegar a una solución numérica) que depende de otras letras. Así, conociendo el valor de estas, es posible obtener una solución numérica para el problema.

Razonen

y comenten

- Responde nuevamente la pregunta del inicio de la lección. ¿Cambió tu respuesta?
- ¿Qué significa que en una expresión, una variable esté en función de otras?
- ¿Qué otras estrategias puedes utilizar para despejar una variable en función de las otras? Por ejemplo, ¿cómo podrías despejar x en la ecuación literal $ax + 4a = 2b + bx$?

En resumen

Una **ecuación literal** es aquella que tiene más de un coeficiente literal que podría considerarse como incógnita, dependiendo de lo que interese averiguar. Cuando se identifica la incógnita, se despeja en función de las otras letras, que pasan a considerarse como constantes.

Relaciona

- ¿Cuál sería el precio de una blusa si $c = 930$?
- ¿Cuál sería el precio de un par de calcetines si $b = 2000$?

Repaso

1. **Calcula** el valor de la incógnita en cada ecuación.

a) $5x + \frac{1}{3} = 2$

d) $\frac{7p+8}{9} = 0,6(p+8)$

b) $\frac{3}{4}a + 1 = 2a$

e) $0,75(y+3y) = \frac{4}{5}$

c) $\frac{2}{3}c - \frac{3}{6} = \frac{1}{5} - 8c$

f) $\frac{w}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{3} + \frac{w+5}{2}$

2. **Factoriza** las siguientes expresiones algebraicas.

a) $9y^2 - \frac{11}{25}x^2$

e) $x^3 - 343$

b) $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$

f) $t^4 - \frac{1}{16}$

c) $\frac{x^2}{4} - x + 1$

g) $x^2 + 12x + 35$

d) $6x^2y - 9x^3y$

h) $a^2 + 12a + 36$

Práctica guiada

3. **Resuelve** las siguientes ecuaciones literales despejando la incógnita pedida.

$10y + a = 7y + 7a$
 $y = ?$

$10y + a = 7y + 7a \quad / -7y$
 $3y + a = 7a \quad / -a$
 $3y = 6a \quad / \cdot \frac{1}{3}$
 $y = 2a$

a) $6y + 5a = 4y + 9a$

$y = ?$

b) $8x - 5c + 7b = 5x - 2c + 10b$

$x = ?$

c) $17b + 7x = 29b + 4x$

$b = ?$

d) $17x + 14a - 19b = 14x + 23a - 13b$

$x = ?$

e) $x - 4ab = 28(x + b) - 3(ab + b)$

$a = ?$

f) $4x + 2a = 144 - 6(7b + x) - 2(x + y)$

$x = ?$

g) $7(a + x - b) - 8(a - x - b) = -(s - x)$

$b = ?$

h) $y - 3(a + p) = 5(y - 8a + p)$

$a = ?$

i) $-5(y + p) - (q - 7y) = -(y + 8b)$

$y = ?$

j) $-2(y - 3bp) - 4ax = 12(8 - 7bp)$

$p = ?$

k) $6y + \frac{5}{2}a = 4y + \frac{9}{2}a$

$y = ?$

4. **Resuelve** las siguientes ecuaciones literales utilizando la factorización y despejando la incógnita pedida.

$9ab - 8b = 5ab + 4$

$b = ?$

$9ab - 8b = 5ab + 4 \quad / -5ab$

$4ab - 8b = 4$

$b(4a - 8) = 4$

$/ \cdot \frac{1}{4a-8}$

$b = \frac{4}{4a-8}$

$b = \frac{\cancel{4}(a-8)}{\cancel{4}(a-8)} = \frac{1}{a-8}$

a) $5ax - 2c = 2ax$

$x = ?$

b) $8x - 8a = x - a$

$x = ?$

c) $5abc - 3b = 7b - abc$

$c = ?$

d) $8zx + 4z = 8z + 1$

$z = ?$

e) $3rx - 2z + 1 = 5rx - 8$

$r = ?$

f) $x + xyz - 9x = -8xyz + 5zyx$

$z = ?$

g) $5ax - \frac{2}{3}c = \frac{2ax}{3}$

$x = ?$

h) $\frac{x}{5} - 8a = x - \frac{2}{5}a$

$x = ?$

5. **Resuelve** las ecuaciones según la incógnita indicada y verifica si coincide la solución que se da.

$ax - 2 = bx - 4$ Solución: $x = \frac{-2}{a-b}$

$ax - 2 = bx - 4 \quad / -bx$

$ax - bx - 2 = -4 \quad / +2$

$ax - bx = -4 + 2$

$x(a - b) = -2 \quad / \cdot \frac{1}{a-b}$

$x = \frac{-2}{a-b}$

Por lo tanto, la solución coincide.

a) $3a(x + 4) - a(x + b) = a(x + 7)$

Solución: $x = \frac{7-12a-ab}{a}; a \neq 0$

b) $7x(a + p) + x(p - a) = p(x + 8)$

Solución: $a = \frac{7xp-8p}{6x}; x \neq 0$

c) $7x(p - q) + px - qx = 2(px - 4)$

Solución: $p = \frac{8qx-8}{6x}; x \neq 0$

6. **Analiza** las siguientes fórmulas. Luego despeja la variable indicada.

$$E_c = \frac{m \cdot v^2}{2}, \text{ despeja } m.$$

$$E_c = \frac{m \cdot v^2}{2} \quad / \cdot 2$$

$$E_c \cdot 2 = m \cdot v^2 \quad / \cdot \frac{1}{v^2}$$

$$\frac{E_c \cdot 2}{v^2} = m$$

a) $F = \frac{k \cdot q_1 \cdot q_2}{d^2}$, despeja d^2 .

b) $S = S_0 + v \cdot t$, despeja t .

c) $y_t = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$, despeja v_0 .

d) $F = K(L - L_0)$, despeja L .

7. **Evalúa** en cada fórmula las magnitudes asociadas a cada variable. Luego, responde las preguntas.

$$v = \frac{d}{t} \quad \text{v: rapidez} \quad \text{d: distancia} \quad \text{t: tiempo}$$

Si $d = 180$ m, ¿cómo se expresa v en función de t ?

$$v = \frac{180}{t}$$

a) Si $d = 25$ m, ¿cómo se expresa v en función de t ?

b) Si $t = 30$ s, ¿cómo se expresa d en función de v ?

c) Si $v = 45 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, ¿cómo se expresa t en función de d ?

$$F = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

F: fuerza.

M: masa.

Δv : variación de la velocidad

Δt : variación del tiempo

d) Si $m = 72$ kg, ¿cómo se expresa F en función de Δv y Δt ?

e) Si $\Delta v = 4$ m/s, ¿cómo se expresa Δt en función de m y F ?

Aplico

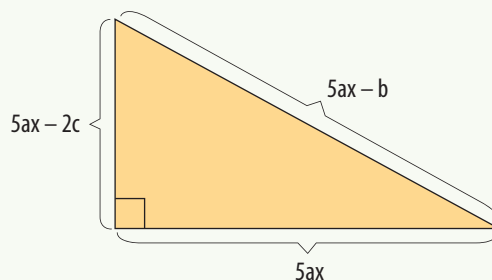
8. **Analiza** la siguiente información. Luego, responde.

En un problema que involucre la distancia, se cumple la siguiente ecuación de movimiento: $x = x_0 + v \cdot t$, que relaciona la posición inicial (x_0), la rapidez (v) y el tiempo (t).

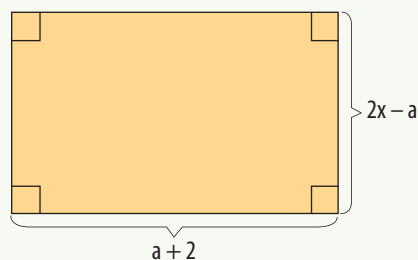
- a) Determina las fórmulas asociadas para las variables v , t y x_0 por separado.
- b) Calcula la rapidez de una partícula si la posición inicial es de 10 m, el tiempo transcurrido fue de 20 s y se produce un avance de 30 m.

9. **Resuelve** los siguientes problemas despejando x en cada caso.

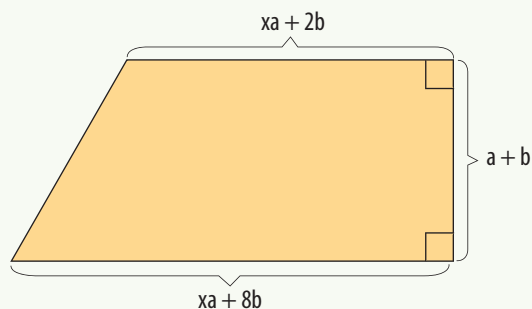
- a) Triángulo rectángulo de perímetro 100 cm.



- b) Rectángulo de área 20 cm^2 .

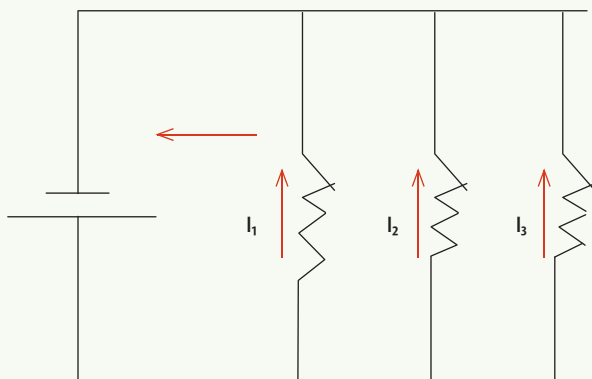


- c) El área del trapecio es de 120 cm^2 .



10. Resuelve los siguientes problemas.

- Si el perímetro de un rectángulo es $(8x + 4p)$ cm y su ancho mide $(3x + p)$ cm, ¿cuál es la medida de su largo?
- Si el perímetro de un triángulo isósceles es de $(7x + 2(p + q))$ cm, y su base mide $(3x + 2p)$ cm, ¿cuál es la medida de sus otros dos lados?
- Angélica estudia la dilatación lineal de una varilla mediante la expresión $L = L_i + aL_i \Delta T$, donde ΔT es la variación de temperatura (en $^{\circ}\text{C}$), L es la longitud final de la varilla (en cm), L_i es la longitud inicial de la varilla (en cm) y a es el coeficiente de dilatación térmica del aluminio que en este caso es $3,9 \times 10^{-3}$ (en $1/^{\circ}\text{C}$). Despeja la variación de temperatura y calcula su valor si la longitud final es de 12 cm y la inicial de 11 cm.
- La corriente eléctrica total I (ampere) del siguiente circuito está dada por la suma de corrientes de sus ramas, tal como se muestra en la figura.



Donde $I = I_1 + I_2 + I_3$

¿Cuál es la corriente que pasa por I_1 , si la corriente total es de 10 Amperes y las corrientes de las ramas restantes es igual a $x + 1$ amperes?

- 11. Conecta.** La ecuación de Harris Benedict permite calcular la energía mínima que requieren hombres y mujeres para vivir, llamado metabolismo basal (MB), que se calcula como:

Hombres:

$$MB = 66,4730 + (13,7516 \cdot P) + (5,0033 \cdot A) - (6,7550 \cdot E)$$

Mujeres:

$$MB = 655,0955 + (9,5634 \cdot P) + (1,8496 \cdot A) - (4,6756 \cdot E)$$

donde P es la masa (en kg), A es la estatura (en cm) y E es la edad (en años). Calcula tu MB y compáralos con los de tus compañeros y compañeras. Luego, despeja P , varía las otras variables (A y E) restantes menos tu MB. ¿Qué sucede?

- 12. Descubre el error.** Determina el error en el siguiente procedimiento que utilizó Juan para despejar a .

$$ax + ay + 3 = 3b$$

$$ax + ay = 3 - 3b$$

$$a(x + y) = 3 - 3b$$

$$a = 3 - 3b - x - y$$

- 13. Describe el procedimiento.** Describe paso a paso el procedimiento para despejar x en la ecuación $ax - 2 = bx - 4$.
- 14. Investiga.** Realiza una investigación sobre ecuaciones que se utilicen en nutrición y calcula los parámetros correspondientes para ti, despeja una a una las variables involucradas y varía aquellas que se consideran constantes en cada caso.
- 15. Crea.** Inventa tres problemas que involucren la fórmula de la rapidez ($v = \frac{d}{t}$), donde en cada uno de ellos se tenga que despejar cada variable en función de las otras.

Reflexiono

- ¿Qué significa que una variable está "en función de"?
- ¿Cuál es la diferencia entre expresión algebraica, ecuación literal y fórmula?

Refuerzo

Resuelve las siguientes ecuaciones literales, despejando x .

a) $2xa + 3a = 3b - a$

b) $ax - ad + b = bd + 3c$

c) $2ax + d - b = 4ax - 4b$

Palabras clave

- Ecuaciones literales.
- Restricciones de la solución de una ecuación literal.

Repasa

Despejar una variable en función de otra

$$\blacksquare xa - 3x + 1 = 3a - 2x$$

$$xa - 3x + 2x = 3a - 1$$

$$xa - x = 3a - 1$$

$$x(a - 1) = 3a - 1$$

$$x = \frac{3a - 1}{a - 1}$$

$$\blacksquare A_T = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$h = \frac{2A_T}{b}$$

$$b = \frac{2A_T}{h}$$

¿Cuáles son las restricciones en la solución de una ecuación literal?

- Cuando expresas el perímetro de un rectángulo de lados a y $(a - b)$, ¿qué condiciones o restricciones deben existir para que el rectángulo realmente se pueda dibujar?

Carmen y su grupo scout deben reunir \$50 000 para poder comprar juguetes para un jardín infantil y deciden vender galletitas caseras. Desconocen cuánto dinero cuesta hacer cada galleta y el precio en que deben venderlas, por lo que Carmen decide representar el precio de venta de cada galleta como **P** y el costo de cada galleta como **C**. ¿Cómo puede relacionar la cantidad de galletas que se van a vender con el precio de venta **P**, el costo **C** y los \$50 000 de ganancia?



Paso 1 ➤ Identificar la incógnita y las variables que serán consideradas como constantes en la ecuación.

Variables (constantes)	Variable (incógnita)	Término libre
P: Precio de venta de cada galleta.	x: Cantidad de galletas preparadas.	\$50 000
C: Costo de elaboración de cada galleta.		

Paso 2 ➤ Plantear la ecuación relacionando los datos anteriores.

Ganancia es igual al **Precio de venta** por **cada galleta** menos el **Costo** por **cada galleta**:

$$50\,000 = P \cdot x - C \cdot x$$

Luego, la ecuación literal que representa la situación planteada es $50\,000 = Px - Cx$.

¿Cuántas galletas debe vender el grupo scout de Camila?

Para determinar la cantidad de galletas que se deben vender, se despeja x en la ecuación literal $50\,000 = P \cdot x - C \cdot x$

Paso 3 ▶ Buscar una expresión para x .

$$50\,000 = P \cdot x - C \cdot x$$

Se factoriza x en la expresión de la derecha de la igualdad.

$$50\,000 = x(P - C)$$

$$50\,000 \cdot \frac{1}{P-C} = x \cancel{(P-C)} \cdot \frac{1}{\cancel{P-C}}$$

Despeja x multiplicando por $\frac{1}{P-C}$ y se reduce.

$$\frac{50\,000}{P-C} = x$$

Por lo tanto, la cantidad de galletas que se deben vender queda expresada por:

$$x = \frac{50\,000}{P-C}$$

¿Cuáles pueden ser los posibles valores de P y C ?

Se pueden analizar los valores de P y C siguiendo los pasos:

Paso 4 ▶ Identificar las restricciones que deben cumplir las variables de las que depende la incógnita, para que la expresión tenga sentido en términos matemáticos.

Si $P = C$ se tiene que $\frac{50\,000}{P-C} \Rightarrow \frac{50\,000}{0}$, y la fracción se indefiniría, por lo cual $P \neq C$.

Paso 5 ▶ Establecer las condiciones que deben cumplir las variables para que las soluciones de la incógnita sean pertinentes al contexto.

Si $P < C$ se tiene que $\frac{50\,000}{P-C} < 0$.

Es decir, si $P = 100$ y $C = 150$ entonces $x = -1000$, lo cual no es pertinente al contexto.

Si $P > C$ se tiene que $\frac{50\,000}{P-C} > 0$, por lo que esta opción es válida para este caso.

De esta forma se restringe la solución de la ecuación $50\,000 = P \cdot x - C \cdot x$, como:

$$x = \frac{50\,000}{P-C}, P > C.$$

En resumen

Al resolver una ecuación literal, se debe **restringir** la relación entre los términos literales de la solución, para que tenga sentido matemático y la solución encontrada sea pertinente al contexto del problema.

Observa

- En una fracción se tiene que:

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

- Si el numerador de una fracción es igual a cero la fracción es igual a cero.
- El denominador de una fracción no puede ser cero, ya que la fracción se indefiniría.

Razona y comenta

- Si la ecuación $50\,000 = P \cdot x - C \cdot x$ no respondiera a esta situación problema, ¿cuáles serían las nuevas restricciones para la solución? Explica.
- Si en una ecuación literal la incógnita queda en función de variables que están en el denominador de una fracción, ¿la restricción sería la misma encontrada en el paso 4? ¿Por qué? ¿En qué casos no sería así?

Repaso

1. **Resuelve** las siguientes ecuaciones literales, despejando x .

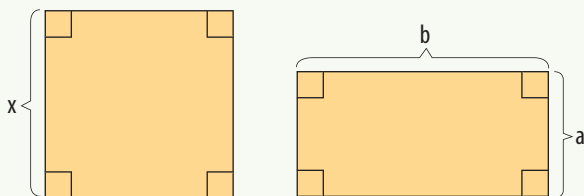
a) $4x - a = x + 4a$ g) $5x + 3a = 3x + 6a$
 b) $2x + 3a = x$ h) $4x = 2a - 2b$
 c) $-23x + a = 10$ i) $2(x + 3a) - 3(x - b) = 3c - 4x$
 d) $2x - 3a = 3a$ j) $x(2 - b) - 1 = x(1 - b) - b^2$
 e) $2x - a = b + 6a$ k) $2(3x - a) - 2(x - a) = 3(x + a)$
 f) $3x - a = x - 5b$ l) $\frac{a+x}{3} - a = \frac{2a-x}{2}$

2. **Analiza** la siguiente información y responde.

La ecuación de Euler de poliedros relaciona el número de caras C , el número de vértices V y la cantidad de aristas A de un poliedro convexo mediante la ecuación $C + V = A + 2$.

- a) Prueba la relación de Euler para el cubo.
 b) Despeja A .
 c) ¿Cuál es el número de caras de un cuerpo con 6 aristas y 4 vértices?
 d) ¿Cuál es la cantidad de vértices de un cuerpo con 12 aristas y 6 caras?
 e) ¿Cuál es la cantidad de caras de un cuerpo que tiene 30 aristas y 12 vértices?
 f) ¿Cuáles son los poliedros convexos que tienen 12 aristas?
 g) ¿Cuáles son los poliedros convexos que tienen 30 aristas?

3. **Analiza** el siguiente cuadrado y rectángulo de igual perímetro y responde.



- a) ¿Cuál es la medida del lado del cuadrado si $a + b = 30$ cm?
 b) ¿Cuál es el área del rectángulo si $a = 5$ cm y el perímetro del cuadrado es igual a 40 cm?

Práctica guiada

4. **Resuelve** las siguientes ecuaciones para x , identificando las restricciones de las otras variables.

$$ax + b = 2a - bx \rightarrow x = \frac{2a-b}{a+b}, a + b \neq 0 \text{ y } a \neq -b$$

- a) $x(a - 1) + 2 = 3a$
 b) $a(x + b) + x(b + a) = 2b$
 c) $3ax - ad + b - 3d = bd$
 d) $(x + a)(1 - a) - a(x - b) = 2x$
 e) $ax - 2(3 - 3ax) - 4ax = 0$
 f) $\frac{a-1}{a} - \frac{3a-2x}{a} = 0$
 g) $\frac{ax+b}{3} - \frac{x-3}{3} = \frac{2(b-x)}{2}$

5. **Analiza** cada caso despejando x en la ecuación y restringiendo la solución de acuerdo a lo pedido. Considera a como un número entero.

$$2x - a = -1, \text{ para que } x \text{ sea impar positivo.}$$

$$x = \frac{-1+a}{2} \text{ para que sea positivo } a > 1 \text{ y para que sea impar } a = 7, 11, 15, 19, \dots, 7 + 4n.$$

- a) $2x - a = -1$, para que x sea:
 • Un número entero entre -6 y 4 .
 • Un número entero par entre 1 y 10 .
 b) $6x + 4a = ax$, para que x sea:
 • Un número entero negativo entre -1 y -10 .
 • Un número entero par entre -10 y 20 .
 c) $xa - 5x = 10$, para que x sea:
 • Un número entero par entre 0 y 10 .
 • Un número entero impar entre -1 y -10 .
 • Un número entero impar entre 3 y 15 .
 • Cualquier número positivo mayor que 10 .
 d) $5x - 10 = 3ax + 20$, para que x sea:
 • Un número entero par entre 0 y 10 .
 • Un número entero impar entre -1 y -10 .
 • Un número entero impar entre 3 y 15 .
 • Cualquier número positivo mayor que 10 .

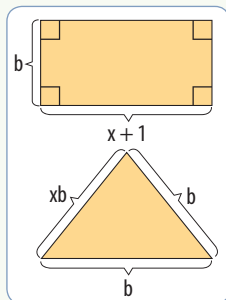
Aplico

6. Resuelve los siguientes problemas.

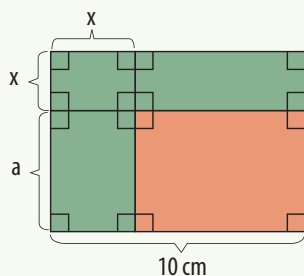
- a) El costo **C** en pesos de fabricación de una mesa está dado por la ecuación $C = xb - 100$, donde **x** es la cantidad de pulgadas de espesor de la mesa, **b** es el costo variable por pulgada y 100 el costo fijo por cada mesa.
- Encuentra una ecuación literal para **x**.
 - ¿Cuál es la restricción que existe en la solución? Explica.

b) Observa las figuras.

- Si los perímetros de las figuras son iguales, ¿cuánto miden los lados del triángulo en función de **b**?
- ¿Cuál es el área y perímetro del rectángulo en función de **b**?
- ¿Cuál es la restricción en ambos casos para **b**?



c) Observa el siguiente rectángulo.



Si los sectores verde y rojo tienen la misma área:

- ¿Cuál es el perímetro del sector rojo en función de **a**?
- ¿Cuál es el perímetro del sector verde en función de **a**?
- ¿Cuál es el valor de **x** en función de **a**?
- ¿Cuál es el valor de **a** en función de **x**?
- ¿Cuáles son las restricciones de las soluciones de cada una de las ecuaciones literales anteriores?

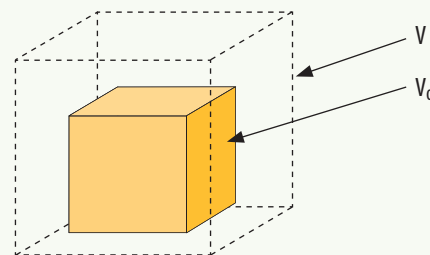
Reflexiono

- ¿Por qué es necesario restringir la solución de una ecuación literal?
- ¿En todas las ecuaciones literales es necesario hacerlo? Ejemplifica.
- ¿Qué relación existe entre las restricciones de la solución de una ecuación literal y la pertinencia de la solución de una ecuación lineal de primer grado con una incógnita?

- d) Pamela y Carlos están juntando láminas para un álbum. Pamela tiene 100 láminas y Carlos 54. Para tener la misma cantidad de láminas Carlos compra **C** paquetes y Pamela **P** paquetes de láminas.

- ¿Qué expresión representa la relación entre las cantidades de láminas de Pamela y Carlos y la cantidad de paquetes que compran?
- ¿Cuál es la expresión que representa la cantidad de láminas que tiene cada paquete?
- ¿Qué restricciones tienen **C** y **P**?

7. **Conecta.** El cambio de volumen que sufre un material sólido, líquido o gaseoso, debido al cambio de temperatura, está dado por la ecuación: $V_0 b T_i - V_0 b T_f = V_0 - V$, donde **V₀** es el volumen inicial del objeto a temperatura **T_i**, **V** es el volumen final del objeto a temperatura **T_f** y **b** es el coeficiente de dilatación volumétrica.



- a) ¿Cuál es el coeficiente de dilatación volumétrica en función de las demás variables?
- b) ¿Qué sucede con el coeficiente de dilatación volumétrica si no existe cambio de temperatura en un cuerpo? ¿Qué significa?

8. **Descubre el error.** ¿Cuál es el error en el siguiente desarrollo?

$$\begin{aligned}
 2(b-x) + 3ax &= 10 & 2b - 2x + 3ax &= 10 \\
 2b - x(2+3a) &= 10 & -x(2+3a) &= 10 - 2b \\
 x &= -\frac{10-2b}{2+3a}, \text{ donde } a \neq -\frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

Refuerzo

Despeja **x** en las siguientes ecuaciones y restringe las soluciones.

- a) $a^3 - xa = 2ax$
- b) $xa - 2(1-x) = a$
- c) $x(a+b) - 3 - a(a-2) = 2(x-1) - x(a-b)$
- d) $(x+a)^3 - 12a^3 = -(x-a)^3 + 2x^3$



Resolver ecuaciones lineales de primer grado en el ámbito de los números racionales (lección 18).

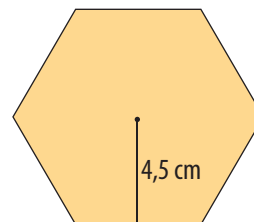
1 Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba tus resultados.

- a. $x + 5 = 6$
- b. $x - 13 = -12$
- c. $2x + 14 = 12$
- d. $-3x + 15 = 10$
- e. $3x + 5 = 171 + 2x$
- f. $9x - 4 = 7 + 5x$
- g. $2x + 3 = -9 - 5x$
- h. $3 - (3x + 2) = 15$
- i. $-(13 - 9x) = -9x$
- j. $\frac{3x}{5} - \frac{3}{4} = x - \frac{2}{5}$
- k. $\frac{x}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2x}{3} - 1$
- l. $\frac{3x}{2} - 2 = \frac{5}{4} - 3x$
- m. $\frac{3x}{5} - \frac{4}{5} = \frac{5}{3} - 2x$
- n. $\frac{7}{2} - \frac{2(x-2)}{4} = x - 0,25$
- o. $3 - \frac{2x+3}{2} = 5 - \frac{x+1}{2}$
- p. $3x - x(x-2) = 3 - x^2$

2 Analiza las siguientes situaciones y responde.

- a. El triple de la suma de un número y 5 es 60. ¿Cuál es el número?
- b. El largo de un rectángulo mide 12 cm y su área es 180 cm². ¿Cuánto mide el ancho?
- c. ¿Cuáles son las medidas de los lados de un triángulo si corresponden a números consecutivos y el perímetro es 21 cm?

- d. La cuarta parte de la diferencia de un número y 5 unidades es igual a ese número menos 95 unidades. ¿Cuál es el número?
- e. Si la longitud de los lados de un cuadrado aumentara 5 cm, su área aumentaría 50 cm². ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?
- f. Si ordenamos según su medida los cinco ángulos interiores de un pentágono se observa que el menor mide 20° menos que el segundo, el segundo 20° menos que el tercero, y así sucesivamente. ¿Cuánto mide cada ángulo?
- g. El lado de distinta medida de un triángulo isósceles es 12 cm más pequeño que los otros dos. Además, se sabe que su perímetro es de 40,5 cm, ¿cuánto miden los lados del triángulo?
- h. El entrenador de fútbol femenino de un colegio realizó una prueba para seleccionar a las mejores quince jugadoras. En el primer entrenamiento se eliminó a ocho jugadoras, en el segundo, se eliminó las dos tercias partes de las jugadoras que quedaban y en el tercer entrenamiento se eliminó a la mitad de las jugadoras que quedaban, ¿cuántas personas postularon al equipo?
- i. La edad de Mariela es igual a la mitad de la de Camilo, además, la edad de Paulina es el triple que la de Mariela. Si la edad de Eugenio es el doble de la de Paulina y las cuatro edades suman 132 años, ¿qué edad tiene cada persona?
- j. El total cancelado por un trozo de queso, una mantequilla y un kilogramo de pan es de \$1800. El queso cuesta $\frac{1}{4}$ menos que la mantequilla, y el kilogramo de pan cuesta $\frac{1}{4}$ más que esta. ¿Cuánto cuesta cada producto?
- k. El área de un hexágono regular es 87,5 cm². Si la apotema mide 4,5 cm, ¿cuánto mide el lado?



- l. Un carpintero tiene que cortar en dos partes un listón de 2 metros de largo. Necesita dividirlo de tal forma que la medida de un lado sea un tercio de la medida del otro. ¿Cuánto mide cada trozo de madera?

Resolver ecuaciones literales y analizar las restricciones de las soluciones (lecciones 19 y 20).

3 Resuelve las siguientes ecuaciones para x .

- a. $ax = 1 + bx$ f. $-2ax - 6a = 2ax + 2b$
- b. $bx = 1 - bx$ g. $\frac{ax}{2} - 4a^2 = x$
- c. $3ax - x = 3a^2 - a$ h. $\frac{2ax}{3} = 2a - \frac{1}{3}$
- d. $15x - 10a = cx - c$ i. $\frac{bx}{5} + 5x = \frac{4}{5}a$
- e. $2a(x - 2) = 3a + 15$ j. $\frac{ab}{2}x - bx = \frac{2ab}{3}$

4 Resuelve las siguientes ecuaciones para x y establece las restricciones en cada solución.

- a. $bx - 2 = 4 + 2cx$
- b. $abx - bx = 2ab$
- c. $6b - 6 = b(2x - 3)$
- d. $3a(2x - 6) = 4b(x + 2)$
- e. $4ax - 4a = 3ax + 3$
- f. $x^2 + 2xa + a^2 - 1 = x(x - a)$
- g. $3ab + 3a(a + b) = 2xa - 2xb$
- h. $\frac{a}{3} + 2bx = 6a - \frac{3}{2}x$

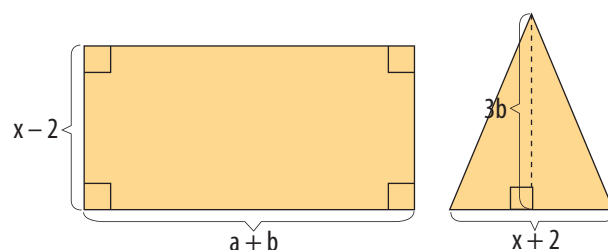
5 Identifica los valores que faltan en el cuadrado mágico considerando que la suma de la diagonal, la horizontal y la vertical tiene resultado igual a 0.

$3x$	$2x$	
	xa	$5x + b$
	$2x$	$-b$

6 Resuelve los siguientes problemas.

- a. El múltiplo de un número por a , menos el número es igual a 50. ¿Cuál es el número en función de a ? Si a es un número natural, ¿cuáles son las restricciones para la expresión encontrada en la pregunta anterior?
- b. El producto entre un número racional distinto de cero por a menos $\frac{5}{4}$ es igual a $\frac{3}{2}$. ¿Cuál es el número expresado en función de a ? ¿Cuáles son las restricciones de la expresión encontrada?

- c. Las siguientes figuras tienen la misma área. Determina una ecuación literal para x .

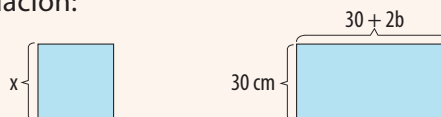


Si las medidas de los lados son enteras, ¿cuáles son las restricciones para la solución de la ecuación encontrada?

- d. El área total de las caras de un ortoedro de aristas a , b y c es igual a $2(ab + ac + bc)$. ¿Cuál es la medida de a en función de c y b ? ¿Qué restricciones tiene la expresión encontrada?
- e. La señora Fabiola vende jugos en la feria a \$200. Si v es la cantidad de jugos que vende el fin de semana y el costo por cada jugo es igual a C , ¿cuál es la ganancia total G en función de v y C ? Si la ganancia del fin de semana es igual a \$20 000, ¿cuál es la cantidad de jugos que vendió? ¿Qué restricciones puedes observar?
- f. A partir del teorema de Torricelli se puede determinar la velocidad de salida de un líquido mediante la expresión: $V^2 = 2gh$, donde V es la velocidad teórica del líquido a la salida del orificio, h la distancia desde la superficie del líquido al centro del orificio y g la aceleración de gravedad. ¿Qué sucede con la velocidad y altura en gravedad cero, es decir, si $g = 0$ m/s?

Problema

Andrés quiere embaldosar dos mesas cuyas superficies tienen forma rectangular y cuadrada. Las baldosas que utilizará tienen forma cuadrada de 1 cm de lado. Las dimensiones de las superficies de las mesas se muestran a continuación:



Si los perímetros de las superficies cuadrada y rectangular deben ser los mismos, ¿cuántas baldosas de deben utilizar para embaldosar cada una de las mesas?

Paso 1 **Comprendo.** ¿Qué entendiste del problema?

Se debe determinar cuántas baldosas de 1 cm de lado se utilizarán para cubrir cada mesa.

Paso 2 **Planifico.** ¿Qué harías para resolver el problema?

- Determinar las expresiones algebraicas para los perímetros del cuadrado y del rectángulo e igualarlas.
- Despejar la variable **x** en función de las otras variables.
- Dado que la medida de las baldosas cuadradas es de 1 cm, la cantidad de baldosas que cubre la superficie de las mesitas es equivalente al área de estas, por lo tanto, utilizando una lista de valores enteros para la variable **b**, se determina la medida de **x**, y se calcula la superficie de ambas mesas.

Paso 3 **Resuelvo.** ¿Cómo ejecutarías la estrategia?

El perímetro del cuadrado es $4x$ y el del rectángulo es $120 + 4b$, entonces se tiene que: $4x = 120 + 4b$

Al despejar **x** en función de **b** se tiene:

$$4x = 120 + 4b \div \frac{1}{4} \rightarrow 4x \cdot \frac{1}{4} = (120 + 4b) \cdot \frac{1}{4} \rightarrow x = \frac{120}{4} + \frac{4b}{4} \rightarrow x = 30 + b$$

Se construye la tabla de valores y se reemplaza **b** con números del 1 al 10.

b	$x = 30 + b$	Área cuadrado: x^2	Área rectángulo: $30 \cdot (30 + 2b)$
1	31	961	960
2	32	1024	1020
3	33	1089	1080
4	34	1156	1140
5	35	1225	1200
6	36	1296	1260
7	37	1369	1320
8	38	1444	1380
9	39	1521	1440
10	40	1600	1500



El matemático francés François Viète o Vieta (1540-1603), fue el primer matemático en utilizar variables en una ecuación, por ejemplo, la expresión $x^3 + 6x = 10$, la escribía como $x^3 + px = q$. De esta forma Viète fue capaz de relacionar los términos de una ecuación como variables y no como un número único, al tiempo que le permite dar a la exposición y a los cálculos una mayor ligereza y a los resultados una generalidad antes desconocida.

Paso 4 Reviso. ¿Cómo saber que es correcto el resultado?

Se calculan los perímetros del cuadrado y del rectángulo, y se comprueba que son iguales.

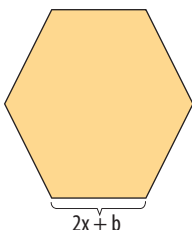
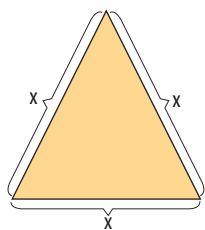
b	x	Perímetro cuadrado: $4x$	Perímetro rectángulo: $120 + 4b$
1	31	124	124
2	32	128	128
3	33	132	132
4	34	136	136
5	35	140	140
6	36	144	144
7	37	148	148
8	38	152	152
9	39	156	156
10	40	160	160

Paso 5 Comunico. ¿Cómo interpretas el resultado obtenido?

Por ejemplo: si $b = 5$ se necesitan 1225 baldosas para la mesa de superficie cuadrada y 1200 baldosas para la mesa de superficie rectangular.

Resuelve los siguientes problemas.

1. Pedro debe construir mesas triangulares y hexagonales regulares que tengan las siguientes medidas:



- a) ¿Cuáles son los posibles valores del área del triángulo y del hexágono, si los valores de x y b son números naturales? Utiliza la calculadora.
2. Camila está juntando plata en un chanchito de greda. Sin embargo, decidió colocar solamente monedas de \$100 y \$500. Si Camila necesita juntar \$10 000, ¿cuántas monedas de \$100 y \$500 puede juntar?

3. Un carpintero debe cortar un listón en tres partes como se muestran en la figura.



Además, debe considerar que cada listón se cubrirá con huinchas de 1 cm de ancho y 15 cm de largo.

- a) ¿Cuáles pueden ser las posibles dimensiones de los cortes del listón?
4. La señora Marta recorrió un trayecto recto en bicicleta a una rapidez de a m/s durante un tiempo de t segundos. En ese instante se dio cuenta de que se le había caído la billetera, por lo que se devolvió a buscarla a una rapidez de b m/s. Si al devolverse se demoró t segundos en encontrar la billetera, recorriendo 500 m, ¿cuáles son los posibles valores de t en minutos?

Reflexiona

- ¿Cuáles son las restricciones de las variables del problema que se desarrolló? ¿De qué dependen dichas restricciones?
- ¿Qué piensas sobre la estrategia "hacer una tabla" para resolver este tipo de problemas? ¿Por qué?
- ¿Cómo resolverías este tipo de problemas utilizando otro tipo de estrategia?

Palabras clave

- ➔ Función.
- ➔ Representación de una función.

Repasa

- En una relación de correspondencia entre dos variables se llama variable dependiente a aquella cuyos valores dependen de otra variable que usualmente se conoce como independiente. Por ejemplo, la nota (variable dependiente) depende del puntaje que se obtuvo en la prueba (variable independiente).
- Se llama **preimagen** a los valores que puede tomar la variable independiente.
- Se llama **imagen** a los valores que puede tomar la variable dependiente.

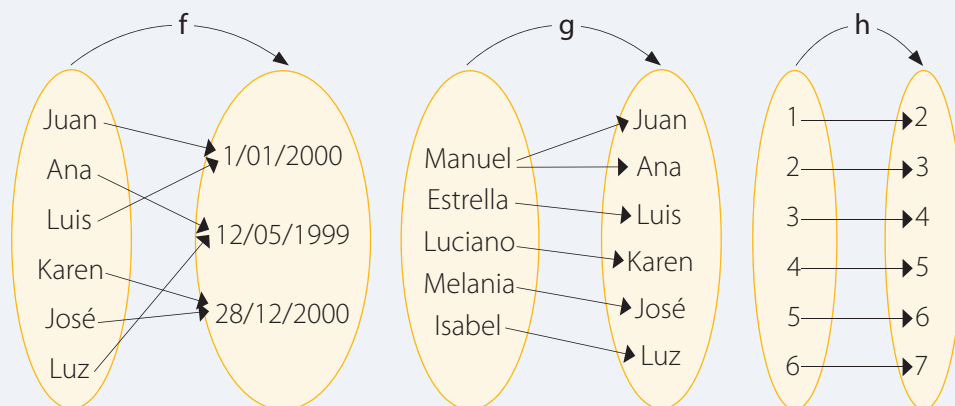
¿Qué es una función?

- ¿Cómo explicarías lo que es una relación a tus compañeros y compañeras? Da un ejemplo.
- ¿Qué relación existe entre el perímetro de un cuadrado y la medida de su lado? ¿Qué función modela dicha relación?

Taller

Reúnanse en parejas, lean la situación y respondan las preguntas.

Antonieta se dio cuenta de que podía establecer distintas relaciones que involucraban contextos escolares, por ejemplo, que a cada compañero le correspondía un día de cumpleaños (f), que a cada apoderado le corresponde un estudiante (g), o que cada nota depende del puntaje obtenido en la prueba (h). Pero, ¿todas estas relaciones serán funciones? Observa las representaciones de cada relación:



Razona

y comenta

- ¿Cuáles son las variables dependientes e independientes en f , g y h ?
- ¿Cuál es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente en f ?
- En las relaciones f , g y h , ¿todas las preimágenes tienen una única imagen? ¿Por qué?
- Si una función se define como una relación en que a toda preimagen le corresponde una única imagen, ¿cuál o cuáles de estas relaciones serían una función?

Por lo tanto, las relaciones que son funciones son f y h , ya que a cada estudiante le corresponde una única fecha de cumpleaños y a cada puntaje una única nota. En cambio, en la relación g Manuel es apoderado de dos estudiantes.

En resumen

Una **función** definida de A en B es una relación tal que a todo elemento x (preimagen) de A le corresponde un único elemento y (imagen) de B . Se denota $y = f(x)$. En general, a la variable x se le llama independiente y a la variable y , dependiente. El **dominio** (Dom) de una función es el conjunto formado por las preimágenes o valores de la variable independiente. El **recorrido** (Rec) de una función es el conjunto formado por las imágenes o valores de la variable dependiente.

¿Cómo representar una función?

Antonia camina todos los días cierta distancia, a una rapidez de dos metros por segundo, manteniendo el ritmo constante. ¿Cómo se podría modelar esta situación como una función? ¿Cómo se representaría gráficamente esta función?

Para resolver esta situación puedes seguir los pasos:

Paso 1 ▶ Identificar la relación de dependencia (variable dependiente e independiente) y verificar que sea una función.

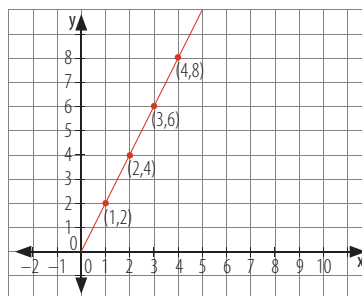
La distancia que recorre Antonia depende del tiempo empleado en caminarlo, por lo tanto, estas corresponden a las variables dependiente e independiente, respectivamente. Esta relación es una función, ya que a cierto tiempo empleado en caminar le corresponde una única distancia recorrida.

Paso 2 ▶ Completar la tabla para asociar los valores de la variable dependiente e independiente.

Valores de la variable independiente	Valores de la variable dependiente
Tiempo (seg)	Distancia recorrida (m)
1	2
2	4
3	6
4	8

Paso 3 ▶ Establecer los pares ordenados y graficarlos en el plano cartesiano a partir de los valores de la tabla anterior.

		Par ordenado
x	y	(x, y)
1	2	(1, 2)
2	4	(2, 4)
3	6	(3, 6)
4	8	(4, 8)



Por lo tanto, en el plano se muestra la representación gráfica de la función de la distancia recorrida por Antonia en sus caminatas. .

Paso 4 ▶ Modelar la situación con lenguaje algebraico y expresarla como función.

y = f(x): metros de distancia recorridos.

x: tiempo empleado

Los **metros de distancia** recorridos están en función del **tiempo empleado**, por lo que la función que modela esta situación es:

$$y = 2x \rightarrow f(x) = 2x$$

En resumen

Una **función** se puede representar a través de un **diagrama sagital**; una **tabla** de valores, por medio de un **gráfico** o con una **expresión algebraica**.

En el **eje X** se grafican los valores de la variable independiente y en el **eje Y** los valores de la variable dependiente. En un par ordenado **(x, y)** la coordenada **x** se llama **abscisa** y la coordenada **y** **ordenada**.

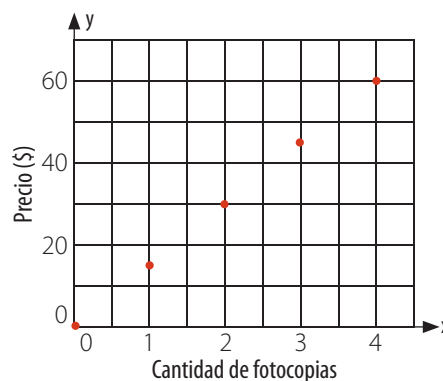
Razona y comenta

- ¿Qué estrategias utilizarías para comprobar en el plano cartesiano si la gráfica representa una función?
- Al unir los puntos de la función, ¿qué gráfica se forma?
- ¿Qué otras estrategias utilizarías para determinar la forma algebraica de una función a partir de la gráfica y de la tabla?

¿Cómo determinar la función a partir de un gráfico o de una tabla?

Observa el gráfico que representa el monto que se debe pagar por cierta cantidad de fotocopias. ¿Qué función modela la situación? ¿Cuál es su expresión algebraica?

Para determinar lo pedido puedes seguir los siguientes pasos:



Paso 1 Extraer los pares ordenados representados en la gráfica.

x	y	Par ordenado
0	0	(0, 0)
1	15	(1, 15)
2	30	(2, 30)
3	45	(3, 45)
4	60	(4, 60)

Paso 2 Identificar el patrón que se produce en la tabla.

$$15 = 1 \cdot 15$$

$$30 = 2 \cdot 15$$

$$45 = 3 \cdot 15$$

$$60 = 4 \cdot 15$$

$$y = x \cdot 15 \rightarrow f(x) = 15x$$

Por lo tanto, la función que modela el monto a pagar por las fotocopias es $f(x) = 15x$.

Links

Para profundizar en el concepto de función visita:

<http://goo.gl/zmkQh>



Repaso

1. Resuelve el siguiente problema.

- a) Sofía creó un software computacional que permite obtener, resaltada de color rojo, la variable dependiente, y de color azul la variable independiente en una situación que describe una función. Sofía prueba su software con las siguientes frases:

El **volumen** de una esfera y su **radio**.

La **longitud** del lado de un cuadrado y su **perímetro**.

El **costo** del recibo de luz y el **consumo** de consumo.

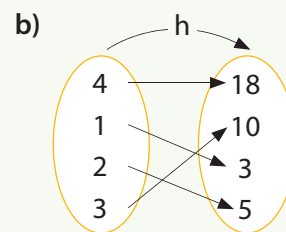
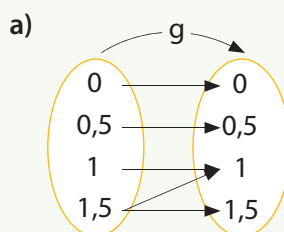
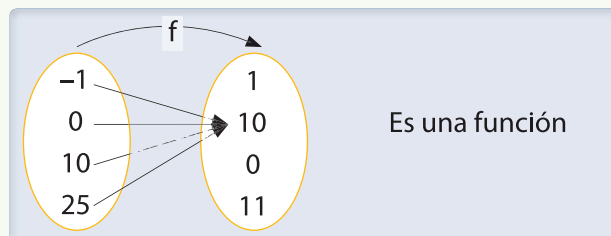
El **número de diagonales** de un polígono y el **número**

La **longitud** del lado de un cuadrado y su **área**.

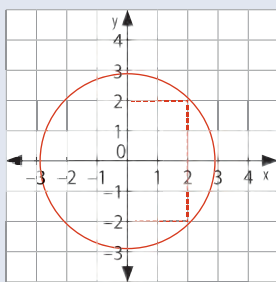
El programa de Sofía, ¿funciona correctamente? Argumenta tu respuesta.

Práctica guiada

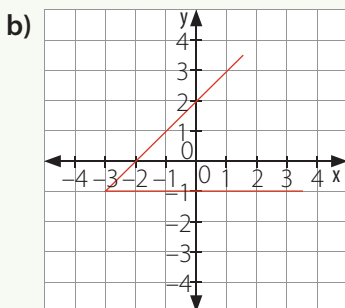
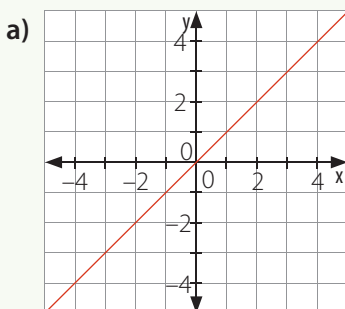
2. Identifica en cuál de los siguientes diagramas sagitales se representa una función o una relación.



3. **Identifica** cuál de las siguientes gráficas corresponde a una función.



No es una función porque para un mismo valor de x se tienen distintos valores de y . Por ejemplo, para $x = -2$, $y = 2$ e $y = -2$.



4. **Calcula** la imagen pedida en cada función.

$$f(z) = 3z^2 - 5z + 1 \rightarrow f(6) = 3 \cdot 6^2 - 5 \cdot 6 + 1 \rightarrow f(6) = 79$$

- a) $f(x) = 6x$ $f(-2) = ?$
 b) $g(t) = -1 - t$ $g(2,5) = ?$
 c) $c(d) = d^3 - d^2 + d$ $c(-1) = ?$
 d) $g(a) = \frac{a}{8} - 9$ $g(-4) = ?$

5. **Completa** la tabla de valores asociada a la función dada e identifica el conjunto de imágenes y de preimágenes según la tabla.

$$g(x) = 2x \rightarrow$$

x	0	3	-1	-8
$g(x)$	0	6	-2	-16

a) $f(x) = -3x \rightarrow$

x	2		5	
$f(x)$		6		9

b) $g(l) = 1 - 5l \rightarrow$

l	2			-1
$g(l)$		26	1	

c) $h(t) = \frac{1}{4}t + 2 \rightarrow$

t		-4	4	
$h(t)$	2			$\frac{5}{2}$

6. **Identifica** la forma algebraica de las funciones representadas en cada tabla.

x	1	3	-4	-6
$f(x)$	2	6	-8	-12

 $\rightarrow f(x) = 2x$

a)

x	1	2	3	4
$g(x)$	5	10	15	20

b)

x	2	-1	8	-9
$h(x)$	1	-2	7	-10

c)

x	3	-5	-1	7
$i(x)$	9	25	1	49

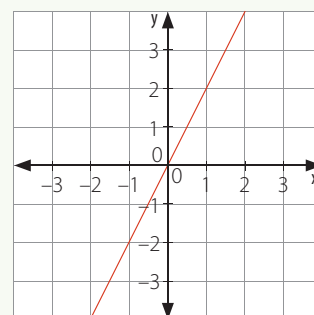
d)

x	-1	0	-2	6
$j(x)$	-1	0	-8	216

7. **Relaciona** la tabla con el gráfico correspondiente.

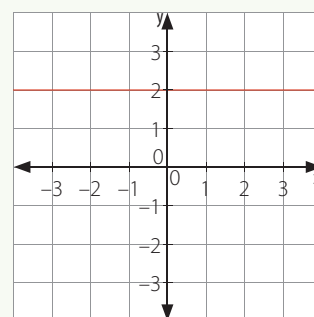
a)

x	$g(x)$
1	4
-1	0
2	6
-2	-2



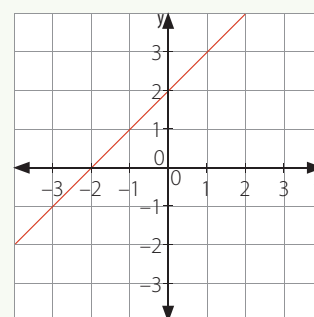
b)

t	$f(t)$
-3	2
0	2
1	2
3	2

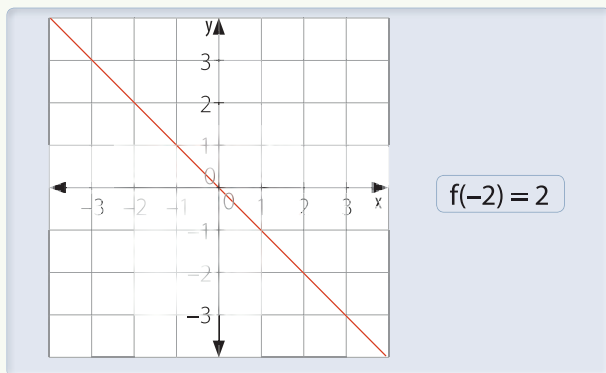


c)

i	$h(i)$
1	2
2	4
-1	-2
-2	-4

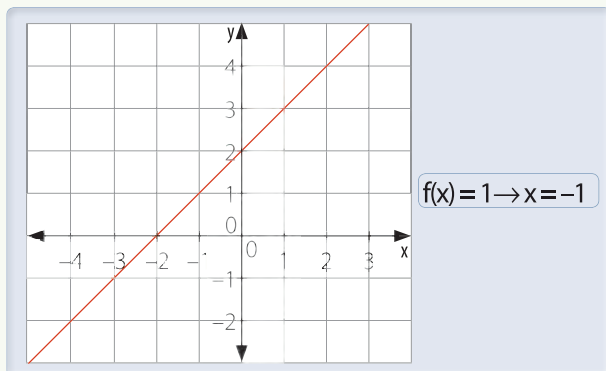


8. **Calcular** el valor de las imágenes a partir del siguiente gráfico.



- | | |
|------------|--------------------------------------|
| a) $f(0)$ | e) $f(3)$ |
| b) $f(-1)$ | f) $f(-3)$ |
| c) $f(1)$ | g) $f(0) - \{f(-2) - f(3)\}$ |
| d) $f(2)$ | h) $\{f(-3) - f(2) + f(0)\} - f(-1)$ |

9. **Calcular** el valor de las preimágenes a partir del siguiente gráfico.



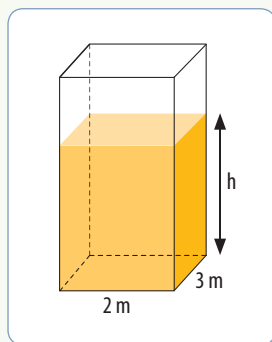
- | |
|--------------------------------------|
| a) $f(x) = 2 \rightarrow x = ?$ |
| b) $f(x) = -1 \rightarrow x = ?$ |
| c) $f(x) = 0 \rightarrow x = ?$ |
| d) $f(x) = 3 \rightarrow x = ?$ |
| e) $f(x) = 4 \rightarrow x = ?$ |
| f) $f(x) = -2 \rightarrow x = ?$ |
| g) $f(x + 1) = 2 \rightarrow x = ?$ |
| h) $f(1 - x) = -1 \rightarrow x = ?$ |

Aplico

10. Resuelve los siguientes problemas.

- El bebé de Carmen se encuentra enfermo y el pediatra le recomienda tomarle la temperatura cada 20 minutos. Si al cabo de dos horas la temperatura no "tiende a disminuir" debe llevarlo a urgencias.
 - ¿Cuáles son las variables involucradas en la situación?
 - ¿Corresponde a una función?
- En un triángulo equilátero de lado x cm, su altura mide h cm.
 - ¿Cuál es la expresión que permite relacionar la medida de uno de sus lados con el área y la medida de la altura? ¿Es una función?
 - Construye una tabla de valores para la relación anterior si $h = 3$ cm.
 - Determina los pares ordenados pertenecientes a la función y grafícalos en el plano cartesiano.
- Un alambre que tiene una longitud de 5 m se debe cortar en dos trozos para que con uno, de longitud x cm, se pueda construir un cuadrado, y con el otro, un círculo.
 - Expresa en términos de x el área (A) de cada figura ¿Cuál de estas relaciones corresponde a una función?
 - Construye una tabla de valores para cada relación anterior.
 - Determina los pares ordenados pertenecientes a la función y grafícalos en el plano cartesiano.
- Una persona pagará \$15 por fotocopiar cada página de un libro. Si además por el anillado le cobran \$500, ¿cuál es la función D que permite calcular el dinero que pagará por fotocopiar y anillar un libro de n páginas?
 - Construye una tabla de valores que muestre la relación anterior.
 - Determina los pares ordenados pertenecientes a la función y grafícalos en el plano cartesiano.
- Franco y Catalina construyeron un depósito de agua lluvia para el riego de hortalizas como el que se muestra en la figura, donde h es la altura que alcanza el agua.

- ¿Cuál es la relación entre el volumen del depósito y la altura que alcanza el agua? Exprésala algebraicamente.



- Realiza una tabla de valores para la función encontrada en el punto anterior.
- Si por cada 100 cc Franco y Catalina deben colocar una pastilla purificante en el depósito, ¿cuántas pastillas deben colocar si el agua llega a una altura de 1,5 m?

- f) La temperatura de ebullición del agua al nivel del mar es de 100° C. A medida que la altura varía, la temperatura de ebullición varía. Un equipo que se prepara a subir la montaña considera la siguiente tabla.

Altura (m)	0	500	1000	1500	2000
Temperatura de ebullición (°C)	100	99,5	99	98	97,5

- Realiza el gráfico con los datos de la tabla.
- Uno de los excursionistas afirma que las variables involucradas son directamente proporcionales ¿Está en lo cierto?
- ¿Qué sucede a medida que la altura aumenta?
- Los excursionistas pretenden llegar a 4 000 m de altura. En tal caso, ¿cuál sería la temperatura estimada de la ebullición del agua?

11. **Investiga.** Averigua las otras definiciones de función, como por ejemplo, las que se utilizan en sociología y psicología ¿Qué diferencias y similitudes existen con el concepto de función utilizado en matemática?
12. **Crea.** Inventa dos funciones distintas que relacionen dos variables de las que aparecen a continuación:

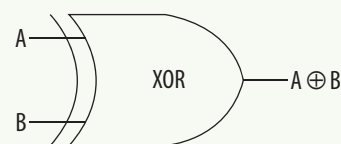
Masa - Altura - Energía

Reflexiono

- ¿Puedes aplicar el concepto de función a tus relaciones sociales?
- ¿Qué variables están involucradas en dicho caso?

13. **Conexión.** Las operaciones elementales con bits las efectúan componentes básicos llamados «puertas lógicas». Una de las puertas lógicas llamada XOR se utiliza para diseñar circuitos digitales, se define por la siguiente tabla y se representa por el símbolo que aparece más abajo:

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Es decir, si $A = 0$ y $B = 0$ el resultado es igual a 0. Las operaciones con bits ¿corresponden a una función? Explica.

14. **Desafío.** Abdel es un famoso arqueólogo árabe, que realizó un descubrimiento "fabuloso", según Abdel en la siguiente escritura cuneiforme se encuentra explícito el principio de función:



¿Puedes descubrir las variables involucradas y la función que descubrió Abdel?

Refuerzo

El volumen V de una esfera de radio r se calcula según la fórmula $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Si se considera $\pi = 3,14$, ¿cuál es el volumen de una esfera si su radio mide 7 cm? Redondea a la unidad.

Palabras clave

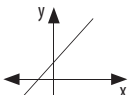
➔ Pendiente de la recta.

Repasa

En el punto $M(x, y)$, el valor de la abscisa está representado por x y el valor de la ordenada está representado por y .

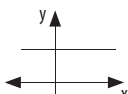
Observa

Si $m > 0$

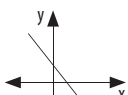


Si $m = 0$

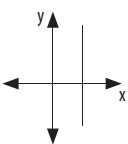
Horizontal



Si $m < 0$



Si m es indefinida
Vertical



Observa

En la fórmula del cálculo de la pendiente de una recta que contiene los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, también puede considerarse:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Razona

y comenta

- ¿Qué sucede si la diferencia entre las ordenadas es 0? ¿y si la diferencia de abscisas es cero?
- ¿Qué relación existe entre el valor de la pendiente y la representación gráfica de la función?

¿Qué es la pendiente de una recta? ¿Cómo se calcula?

- ¿Cuál es la pendiente de la recta asociada a la gráfica de la función $f(x) = 2x$? ¿Qué significa este valor?
- ¿Qué relación tiene el valor de la pendiente de una recta con la recta que la representa?

Observa el gráfico que representa la función $f(x) = \frac{3}{2}x$.

La recta contiene los puntos $A(2, 3)$, $B(4, 6)$ y $C(6, 9)$. Si consideramos dos puntos de estos y calculamos la razón entre la diferencia de sus ordenadas y la diferencia de sus abscisas, se obtiene:

Entre $A(2, 3)$ y $B(4, 6)$

$$\text{Razón} = \frac{6-3}{4-2} = \frac{3}{2}$$

Entre $B(4, 6)$ y $C(6, 9)$

$$\text{Razón} = \frac{9-6}{6-4} = \frac{3}{2}$$

Entre $A(2, 3)$ y $C(6, 9)$

$$\text{Razón} = \frac{9-3}{6-2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Como observaste, la razón es constante para los tres casos. Este valor corresponde a la pendiente de la recta y este determina su inclinación respecto al eje x . En la función $f(x) = \frac{3}{2}x$, la pendiente es positiva y tiene el valor $\frac{3}{2}$.

Observa los pasos para calcular la pendiente de una recta que contiene los puntos $A(-5, 6)$ y $B(1, 3)$:

Paso 1 Calcular la diferencia de las ordenadas de los puntos.

$$3 - 6 = -3$$

Paso 2 Calcular la diferencia de las abscisas de los puntos.

$$1 - (-5) = 1 + 5 = 6$$

Paso 3 Calcular la razón entre lo obtenido en el Paso 1 y lo obtenido en el Paso 2 y simplificar si es posible.

$$m_{\overline{AB}} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Luego, la pendiente de la recta que contiene a los puntos $A(-5, 6)$ y $B(1, 3)$ es negativa, y tiene el valor de $-\frac{1}{2}$.

En resumen

La **pendiente (m)** de una recta corresponde a la razón entre la diferencia de las ordenadas y la diferencia de las abscisas, y su valor determina la inclinación de la recta con respecto al

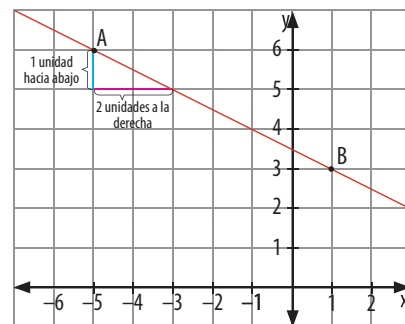
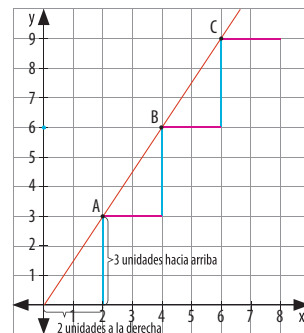
eje x . La recta que contiene los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, se calcula como: $m_{\overline{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Se dice que la pendiente es positiva cuando $m > 0$.

Se dice que la pendiente es negativa cuando $m < 0$.

Se dice que la pendiente es horizontal cuando $m = 0$.

Se dice que la pendiente es vertical cuando la pendiente no está definida.



Repaso

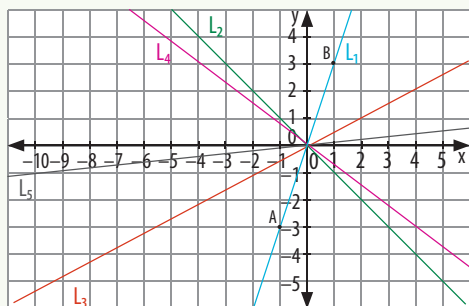
1. **Identifica** el valor de la abscisa y la ordenada de los siguientes puntos.
- a) M(0, 1) c) O(1, -3) e) Q(-6, 2) g) S(-9, 15)
- b) N(4, 8) d) P(-7, -6) f) R(0, 0) h) T(-21, -36)

Práctica guiada

2. **Calcula** la pendiente de la recta que contienen los pares de puntos dados.

$$A(2, 3) \text{ y } B(5, 6) \rightarrow m_{AB} = \frac{6-3}{5-2} = \frac{3}{3} = 1$$

- a) A(5, 8) y B(2, -6) e) I(-1, -2) y J(10, -2)
- b) C(8, -3) y D(-4, -7) f) K(0, -15) y L(1, 0)
- c) E(-12, -3) y F(-5, -7) g) M(8, 6) y N(-3, -11)
- d) G(-1, 0) y H(8, -3) h) O(-6, 0) y P(0, -3)
3. **Calcula** las pendientes de las rectas graficadas y luego responde.



La recta L, contiene los puntos A(-1, -3) y B(1, 3).

$$\text{Luego, } m_{AB} = \frac{3 - (-3)}{1 - (-1)} = \frac{3+3}{1+1} = \frac{6}{2} = 3$$

- a) ¿Cuál de las rectas tiene pendiente positiva?
- b) ¿Cuál de las rectas tiene pendiente negativa?
- c) ¿Cuál es la recta que tiene mayor pendiente?
- d) ¿Cuál es la recta que tiene menor pendiente?

Reflexiono

- Si una recta contiene los puntos A(x₁, y₁) y B(x₂, y₂), ¿Qué restricción debe tener los valores de las abscisas para que la pendiente no sea indefinida?
- Si una recta contiene los puntos A(x₁, y₁) y B(x₂, y₂), ¿Qué restricción debe tener los valores de las ordenadas para que la pendiente sea 0?

4. **Analiza** si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Para ello, escribe V o F según corresponda. Justica las falsas.

- a) ____ La pendiente de la recta que contiene a los puntos A(x, 0) y B(y, 0) es siempre 0.
- b) ____ Una recta que tiene pendiente m = 0 siempre contiene al origen O(0, 0).
- c) ____ La pendiente de la recta que contiene a los puntos A(x, 0) y B(0, y) es siempre negativa.

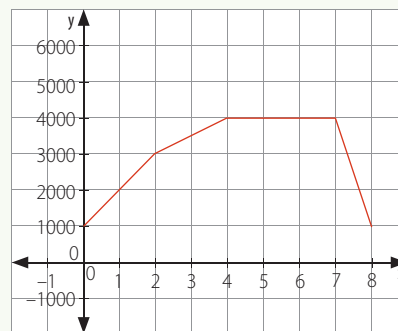
Aplico

5. **Resuelve** los siguientes problemas.

- a) Dibuja en un plano cartesiano las rectas AB, AC, DA, BC, EB y AE a partir de los puntos dados, y clasifícalas en oblicuas, verticales u horizontales. Calcula su pendiente.

A(-1, 1), B(0, 3), C(1, 1), D(1, -1) y E(0, 0)

- b) El siguiente gráfico muestra el precio de un producto en el tiempo. El eje Y representa el precio y el eje X los meses de venta:



¿En qué periodo creció más rápidamente el precio?, ¿en qué periodo decreció con mayor rapidez? Justifica.

- c) El costo en pasajes de buses interurbanos se presenta en la siguiente tabla:

Nº de pasajes	1	2	3
Precio total	2000	4000	6000

Representa los datos en un gráfico y calcula la pendiente de la recta que contiene a los puntos. ¿Qué relación existe entre la pendiente y el valor por pasaje?

Refuerzo

1. Calcula la pendiente que contiene los puntos C(-4, 9) y D(0, 6)
2. Clasifica la recta que contiene los puntos M(-9, -8) y N(0, 6) e identifica el tipo de pendiente que está asociada a la recta.

Palabras clave

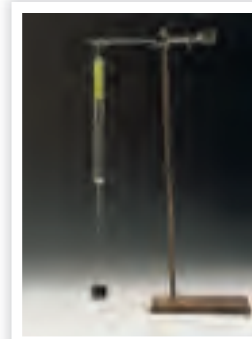
➔ Función lineal.

¿Cuándo una función es lineal?

- Cuando dos variables son directamente proporcionales, ¿cómo es el gráfico de esta relación?
- Un empleado recibe \$1500 por cada hora trabajada. ¿Qué expresión determina el sueldo del empleado si trabaja x horas en un mes?

Marta y Samuel están realizando un experimento para aplicar la ley de Hooke, suspendiendo masas distintas en un resorte de un material determinado y registrando la fuerza ejercida por este y el estiramiento que se produce en él. A continuación se muestran los resultados.

Fuerza (N)	Estiramiento(cm)
6	1,0
9	1,5
12	2,0
15	2,5
18	3,0



¿Con qué función se puede modelar la Ley de Hooke?

Paso 1 Identificar la relación de dependencia.

La fuerza necesaria para estirar un resorte es proporcional a la longitud de su estiramiento (deformación). Por ende, la deformación depende de la fuerza ejercida para provocar el estiramiento.

Paso 2 Modelar la situación con lenguaje algebraico y expresarla como función.

Primero calcularemos la constante de proporcionalidad que corresponde al cociente entre los correspondientes valores de la deformación y la fuerza.

Fuerza (N)	Estiramiento (cm)	Cociente
6	1,0	$\frac{1,0}{6} = \frac{1}{6}$
9	1,5	$\frac{1,5}{9} = \frac{\frac{3}{2}}{9} = \frac{1}{6}$
12	2,0	$\frac{2,0}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$
15	2,5	$\frac{2,5}{15} = \frac{\frac{5}{2}}{15} = \frac{1}{6}$

x: Fuerza necesaria para estirar un resorte.

y: Longitud del estiramiento (deformación).

La **longitud del estiramiento** se obtiene multiplicando la **fuerza** por la constante determinada en el paso 2, es decir, $y = \frac{1}{6}x \rightarrow f(x) = \frac{1}{6}x$.

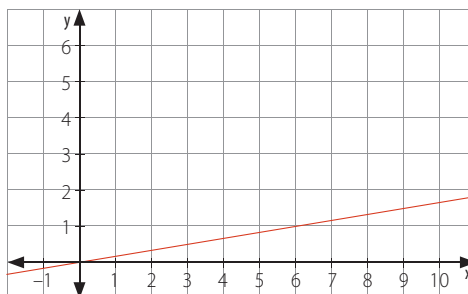
Paso 3 Construir una tabla evaluando la expresión algebraica encontrada.

Como ya conocemos algunos valores, calcularemos otros.

x	$f(x) = \frac{1}{6}x$	y
3	$f(3) = \frac{1}{6} \cdot 3$	$\frac{1}{2} = 0,5$
18	$f(18) = \frac{1}{6} \cdot 18$	3,0

Paso 4 Establecer los pares ordenados y graficarlos en el plano cartesiano.

x	y	(x, y)
6	1,0	(6; 1,0)
9	1,5	(9; 1,5)
12	2,0	(12; 2,0)
15	2,5	(15; 2,5)
18	3,0	(18; 3,0)



En este caso, la ley de Hooke se puede modelar con la función lineal $f(x) = \frac{1}{6}x$.

Razona**y comenta**

- Calcula el cociente entre los valores de las variables ¿Qué relación tiene con la constante de proporcionalidad calculada en el paso 2? ¿Por qué ocurre esto?
- Si aumentara la constante de proporcionalidad, por ejemplo, $f(x) = 0,5x$, ¿cómo sería la gráfica de la función? Construye una tabla de valores y grafica los pares ordenados en el plano.
- Si una función lineal fuese $g(x) = -0,5x$, ¿cómo sería su gráfica? Construye una tabla de valores y grafica los pares ordenados en el plano.

En resumen

Una **función lineal** $y = f(x) = mx$ relaciona dos variables **x** y **y** directamente proporcionales, con constante de proporcionalidad **m**. Al graficarla en el plano y unir los puntos, se obtiene una recta que pasa por el **origen (0, 0)** y la constante de proporcionalidad recibe el nombre de **pendiente**.

Repaso**1. Analiza** las siguientes situaciones.

En el transporte público el precio del pasaje adulto es de \$650.

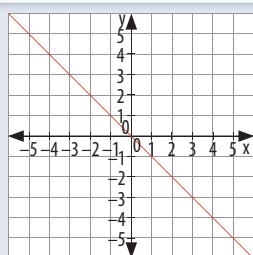
- Construye una tabla que muestre el valor que se debe pagar por 1, 2, 3 y 4 pasajes de adulto.
- ¿La relación anterior corresponde a una proporcionalidad directa? ¿Por qué?
- Calcula la constante de proporcionalidad entre las variables involucradas.

Práctica guiada**2. Construye** una tabla de valores y calcula la constante de proporcionalidad. Luego identifica cuál de las expresiones corresponde a una función lineal.

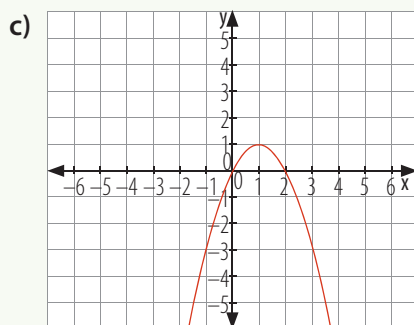
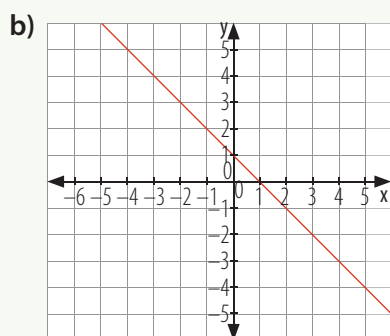
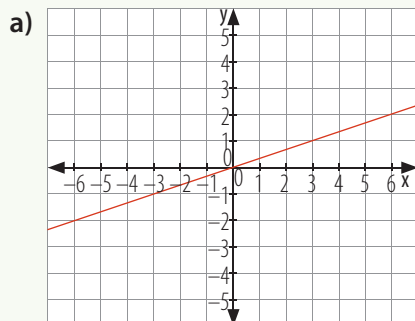
$f(x) = \frac{-x}{2}$	<table><tr><td>x</td><td>2</td><td>4</td><td>-2</td><td>-4</td></tr><tr><td>f(x)</td><td>-1</td><td>-2</td><td>1</td><td>2</td></tr></table>	x	2	4	-2	-4	f(x)	-1	-2	1	2
	x	2	4	-2	-4						
	f(x)	-1	-2	1	2						
	<table><tr><td></td><td>↓</td><td>↓</td><td>↓</td><td>↓</td></tr></table>		↓	↓	↓	↓					
	↓	↓	↓	↓							
<table><tr><td>$\frac{f(x)}{x} = k$</td><td>$-\frac{1}{2}$</td><td>$-\frac{1}{2}$</td><td>$-\frac{1}{2}$</td><td>$-\frac{1}{2}$</td></tr></table>	$\frac{f(x)}{x} = k$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$						
$\frac{f(x)}{x} = k$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$							
	<table><tr><td>x</td><td>2</td><td>4</td><td>-2</td><td>-4</td></tr></table>	x	2	4	-2	-4					
x	2	4	-2	-4							

- | | |
|---------------------|----------------------------|
| a) $f(x) = 4x$ | d) $h(x) = \frac{2}{5}x$ |
| b) $g(x) = 0$ | e) $j(z) = \frac{3z-3}{5}$ |
| c) $d(x) = -3x + 7$ | f) $c(p) = p - 100$ |

3. **Identifica** cuál de las siguientes gráficas corresponde a la representación de una función lineal.



Sí, ya que es una recta que pasa por el origen, por lo tanto, corresponde a la representación gráfica de una función lineal.

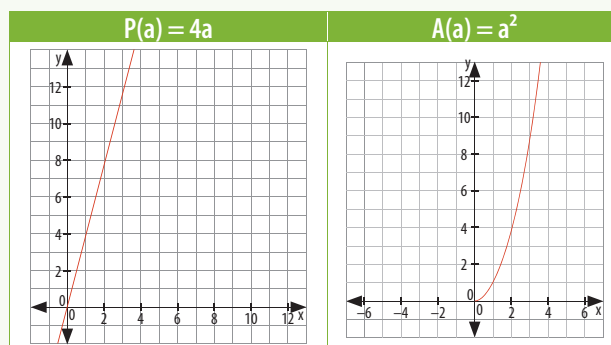


Aplico

4. **Analiza** la siguiente situación.

a) El perímetro y el área de un cuadrado se pueden modelar a través de las funciones $P(a) = 4a$ y $A(a) = a^2$ respectivamente, donde **a** corresponde a la medida del lado del cuadrado.

- Construye una tabla con distintas medidas para el lado del cuadrado, su perímetro y su área.
- Calcula las constantes de proporcionalidad en cada caso, y luego observa los gráficos asociados a cada tabla.



- ¿Qué puedes concluir acerca de los valores encontrados en el punto anterior para cada expresión y las gráficas mostradas?
- ¿Puedes identificar cuál es la gráfica que representa una función lineal?
- ¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función lineal identificada?

5. **Representa** en el plano las siguientes funciones y calcula la pendiente de la recta en cada caso. Luego responde las preguntas.

- | | |
|----------------|-----------------|
| a) $f(x) = x$ | d) $g(x) = 4x$ |
| b) $f(x) = -x$ | e) $h(x) = -3x$ |
| c) $g(x) = 2x$ | f) $h(x) = -7x$ |

- ¿Qué puedes concluir con respecto a la variación de la pendiente en las gráficas de **a)** y **b)**?
- ¿Qué variación se produce entre las gráficas de **c)** y **d)**? ¿Y entre **e)** y **f)**?

6. **Resuelve** los siguientes problemas.

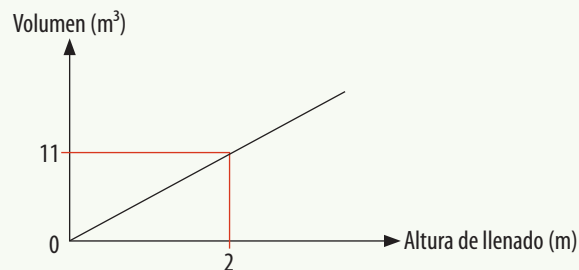
- a) Un automóvil recorre, con una rapidez constante, 70 km en una hora.
- Construye una tabla que muestra la distancia recorrida por el automóvil en un intervalo de 1 hora a 5 horas.

- ¿Cuál es la constante de proporcionalidad entre las variables?
 - Construye un gráfico utilizando los valores de la tabla.
 - Determina la función que represente la distancia que recorrerá en n horas si mantiene la rapidez.
- b) María está programando un pequeño robot que se mueve por el contorno de una habitación cuadrada, por lo que, necesita indicarle al robot la distancia que debe recorrer.
- ¿Cuál es la función que representa la distancia que debe recorrer el robot en función del ancho de la habitación?
 - La función anterior, ¿es lineal?
 - ¿Cuál es la distancia que recorre el robot en una habitación cuadrada de ancho 5 m?
- c) Jacinto sube a la cima de un cerro en bicicleta a una rapidez de 250 m/min, y baja el mismo cerro a 500 m/min.
- ¿Cuál es la distancia total que recorre Jacinto, si se demora 20 minutos en subir y 10 minutos en bajar?
 - ¿Cuáles son las funciones que expresan la distancia en relación con el tiempo, considerando la rapidez de subida y la rapidez de bajada respectivamente?
 - ¿Cómo son las graficas a medida que la rapidez aumenta?
- d) Los trabajadores de una empresa consiguen que se les entregue un bono anual a cada uno de ellos, correspondiente al 5% de las ganancias anuales.
- ¿Cuál es la función que representa el bono en relación de la ganancia?
 - Si las ganancias en el 2013 fueron de \$12 000 000, ¿cuánto dinero le corresponde a los trabajadores?

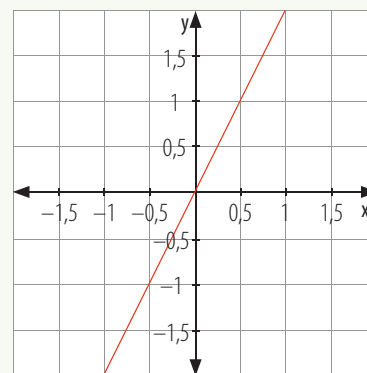
Reflexiono

- ¿Qué características tiene una función lineal?
- Si $f(x) = ax$ es una función lineal con $a > 0$, ¿qué sucede con la gráfica de la función si a aumenta? ¿Y si a es negativo?

- e) Lorena es bombero y compró una copa de agua cilíndrica para un sistema de apagado de incendios. En las instrucciones venía el siguiente gráfico:



- ¿Qué función está representada en el gráfico?
 - ¿Cuál es la pendiente de la recta?
 - ¿Cuál es el volumen si la altura de llenado es de 5 metros?
7. **Conecta.** La fuerza y el movimiento son dos eventos físicos que están ligados. Sin embargo, la fuerza puede manifestarse sin que exista cambio de movimiento o de velocidad, pero existe fuerza de acción y reacción, por lo tanto no está sola. Esta se puede calcular para una masa constante m , como $f(a) = a \cdot m$, donde a es la aceleración ejercida en el cuerpo.
- ¿Cómo se comporta la fuerza a medida que la aceleración aumenta?
 - Si la fuerza se mantiene constante, y la aceleración aumenta, ¿qué sucede con la masa del cuerpo?
8. **Descubre el error.** Considera la función $f(x) = 2x$. ¿Cuál es el error en el gráfico que la representa?



Refuerzo

1. Grafica la función $f(x) = 0,24x$. ¿Cuál es el dominio y recorrido de esta función?
2. Dos autos viajan a una velocidad de 60 km/h y 30 km/h respectivamente. ¿En cuánto tiempo recorre cada uno una distancia de 100 km?



Comprender y caracterizar el concepto de función.

1 Reconoce cuál(es) de la(s) siguiente(s) situación(es) representa una función, y en aquella(s) que lo sea(n), identifica la variable dependiente e independiente.

- La recaudación de un fin de semana en un cine a partir de la cantidad en entradas vendidas.
- La cantidad de libros que leen diez personas.
- La edad y la estatura de cada alumno de primer medio.
- El número de vértices que tiene un polígono respecto a la cantidad de lados.
- La cantidad de combustible que gasta un automóvil con respecto a los kilómetros recorridos.
- La estatura que tienen los integrantes de un club deportivo.

2 Verifica si las siguientes representaciones corresponden a una función.

a.	x	1	2	3	4	5	6
	f(x)	2	3	4	1	2	5

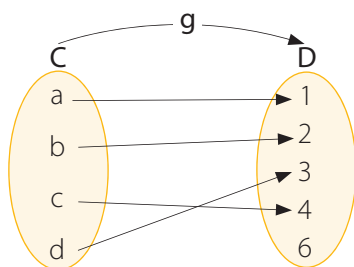
b.	x	a	b	c	d	e
	g(x)	1	2	3	4	5

c.	x	1	2	3	4	5	6
	h(x)	a	a	a	a	a	a

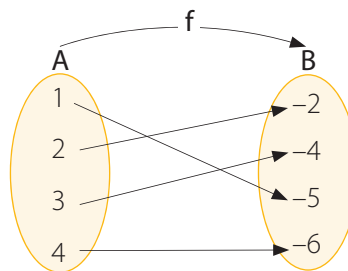
d.	x	a	a	a	a	a	a
	k(x)	a	a	a	a	a	a

3 Identifica el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.

a. Se define la función **g**, tal que:



b. Se define la función **f**, tal que:

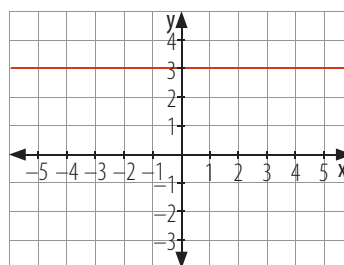


c. Se define la función **h**, tal que:

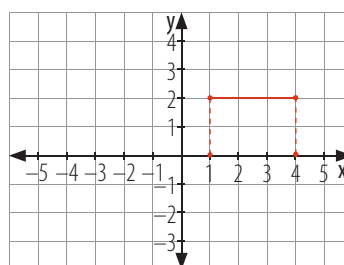
$$h(x) = \{(1, 2), (-1, 3), (5, -2)\}$$

d. Se define la función **i** como el perímetro de un cuadrado de lado **a**.

e. Sea la función **f** representada por:



f. Sea la función **g** representada por:



4 Calcula la imagen o preimagen pedida en cada caso.

a. $f(x) = 3x \rightarrow f(-1) = ?$

b. $g(b) = 9b \rightarrow g(8) = ?$

c. $h(i) = x^2 - 1 \rightarrow h(2) = ?$

d. $f(x) = \frac{3x}{8} \rightarrow f(x) = -\frac{15}{8}$

e. $p(t) = \frac{2-t}{3} \rightarrow p(t) = \frac{8}{15}$

f. $w(v) = \frac{8+v}{-v+3v} \rightarrow w(v) = -19,5$

5 Calcula en cada caso el valor de k para que se cumpla la condición.

a. Si $f(x) = 2kx$, entonces $f(1) = 3$.

b. Si $g(x) = 1 - 2x$, entonces $g(3) = k$.

Reconocer una función lineal y representarla gráficamente.

6 Identifica aquellas funciones que corresponden a una función lineal y grafícalas.

a. $f(k) = 2k$

d. $m(n) = \frac{n-3}{2}$

b. $g(t) = 2t - 2$

e. $f(b) = \frac{(5+4)b}{3}$

c. $i(x) = \frac{x}{2}$

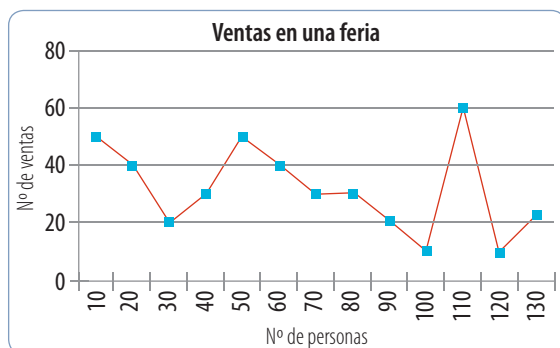
f. $r(s) = 7$

7 Analiza las siguientes situaciones y responde.

a. Una empresa recicladora paga \$10 por cada lata de bebida que obtiene.

- Si se obtienen 30 latas de bebida, ¿cuánto dinero paga la empresa?
- ¿Cuál es la función que representa la situación?
- La función, ¿es lineal?
- ¿Cuál es el dominio y el recorrido de dicha función?
- ¿Cuántas latas de bebida debe obtener la empresa recicladora para pagar \$2220?

b. Carmen insiste en que las ventas que hace una feria no dependen de la cantidad de personas que asisten a ella. Para demostrarlo presenta el siguiente gráfico de la función f .

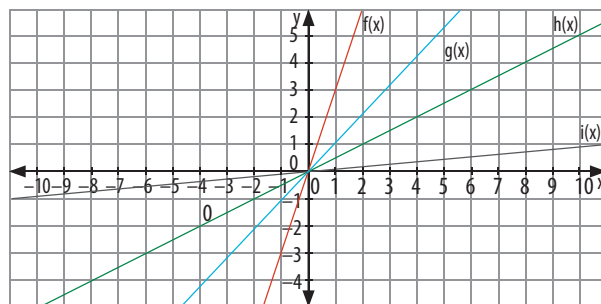


- ¿Cuáles son las variables involucradas?
- ¿Cuál es el dominio y recorrido de la función f ?
- ¿Es lineal esta función? ¿Es correcto lo que afirma Carmen?

c. A Raúl le interesa conocer la relación que existe entre el número de vértices y el número de aristas de una pirámide.

- ¿Dicha relación es una función? Si es así, ¿qué tipo de función es?
- Si se consideran el número de vértices como números que se encuentran entre 3 y 10, ¿cuál sería el dominio y recorrido de dicha función? Gráfica los resultados obtenidos.
- Raúl decide escribir una expresión que relaciona el número de vértices y el número de aristas que tiene una pirámide. ¿Cuál es dicha expresión? ¿Cuál es el dominio y recorrido de dicha función?

8 Identifica y escribe las funciones que representan los siguientes gráficos y realiza las actividades que se indican.



a. Escribe la función correspondiente a cada una de las gráficas.

b. Construye una tabla de valores para las funciones f , g , h e i .

c. ¿Cuál es la diferencia entre cada una de las funciones?

d. Si las funciones del gráfico corresponden al tipo $f(x) = ax$, ¿cómo se comporta la gráfica a medida que a aumenta?

9 Crea una función que represente las siguientes situaciones, identificando su dominio y recorrido:

- La función que representa el doble del número x .
- El precio total que se paga por comprar m kilogramos de manzanas.

Palabras clave

➔ Función afín.

¿Cuándo es afín una función?

- ¿Qué significa para ti la palabra afín?
- ¿Qué otro tipo de funciones se representarán gráficamente con una recta?

La señora Pascal es mecánica y su marido le regaló un celular para que pudiera atender a sus clientes particulares. Ella tiene la duda de si dejarlo prepago o contratar un plan. En la primera situación, cada minuto cuesta \$250, mientras que un plan tiene un costo fijo de \$3480 y cada minuto cuesta \$150. ¿Qué funciones modelan la situación anterior? ¿Qué tipo de contrato le conviene a la señora Pascal?



Paso 1 Identificar las variables involucradas y la dependencia entre ellas.

En cada caso el total de la cuenta del celular (variable dependiente) dependerá de los minutos hablados (variable independiente).

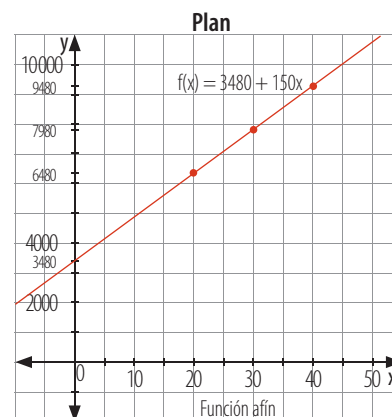
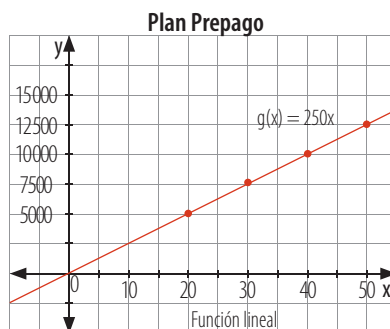
Paso 2 Modelar la situación con lenguaje algebraico y expresarla como función.

Plan Prepago (función g)	Plan (función f)
x: cantidad de minutos hablados.	x: cantidad de minutos hablados.
y: monto total que se debe pagar.	y: monto total que se debe pagar.
250: costo de cada minuto.	150: costo de cada minuto.
	3480: costo fijo del plan.
El monto a pagar se obtiene multiplicando el costo de cada minuto por la cantidad de minutos hablados : $y = g(x) = 250x$.	El monto a pagar se obtiene multiplicando el costo de cada minuto por la cantidad de minutos hablados y sumándole el costo fijo : $y = f(x) = 3480 + 150x$.

Paso 3 Construir una tabla valorizando las expresiones algebraicas encontradas.

x	$g(x) = 250x$	y
20	$g(20) = 250 \cdot 20$	5000
30	$g(30) = 250 \cdot 30$	7500
40	$g(40) = 250 \cdot 40$	10 000

x	$f(x) = 3480 + 150x$	y
20	$f(20) = 3480 + 150 \cdot 20$	6480
30	$f(30) = 3480 + 150 \cdot 30$	7980
40	$f(40) = 3480 + 150 \cdot 40$	9480



En resumen

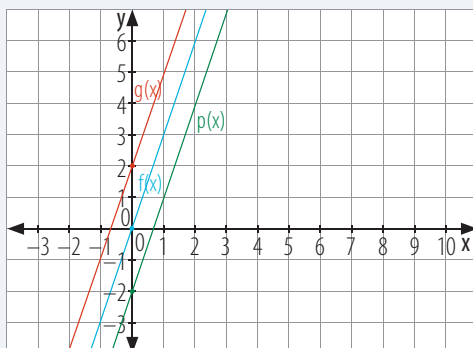
Una función de la forma $f(x) = mx + n$ ($m, n \neq 0$) recibe el nombre de **función afín**.

En el caso del prepago la situación se modela a través de la función lineal $g(x) = 250x$, en cambio, el plan está modelado por la función afín $f(x) = 3480 + 150x$. De acuerdo con la tabla de valores, se puede observar que si la señora Pascal habla más de 40 minutos al mes, le conviene el plan. En caso contrario, le conviene más el prepago.

Taller

Reúnanse en parejas y realicen las actividades.

1. Observen los gráficos de las rectas que representan las funciones $f(x) = 3x$, $g(x) = 3x + 2$ y $h(x) = 3x - 2$.

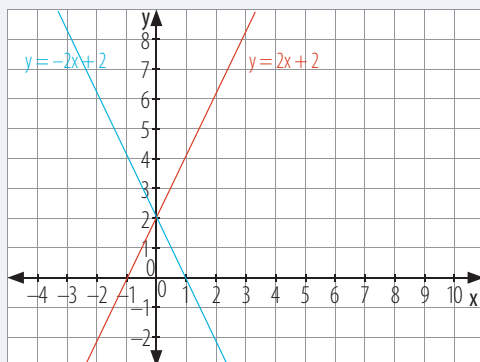


Razonen

y comenten

- ¿Qué rectas representan una función lineal o afín?
- ¿Qué similitudes y diferencias hay entre la gráfica de estas funciones?
- En cada caso, ¿cuál es el punto de intersección entre la recta y el eje Y?
- ¿Qué relación hay entre las pendientes de las rectas? ¿En qué influye la posición relativa de estas?

2. Observen los gráficos de las rectas que representan las funciones $f(x) = 2x + 2$, $g(x) = -2x + 2$.



Razonen

y comenten

- ¿Qué similitudes y diferencias tienen las rectas?
- ¿Qué sucede con la gráfica si la pendiente cambia de signo?

En resumen

El **gráfico** de una función afín es una recta que intersecta al eje Y en el punto $(0, n)$. El coeficiente m corresponde a la pendiente de la recta y n se denomina coeficiente de posición. La recta $y = mx + n$, es una traslación vertical de la recta $y = mx$, n unidades hacia arriba si $n > 0$ o hacia abajo si $n < 0$. Nótese que la recta $y = mx$ tiene coeficiente de posición $n = 0$.

Razona

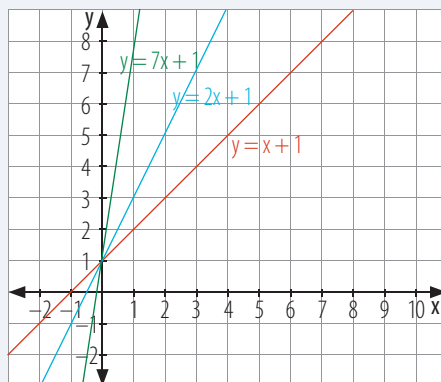
y comenta

- En el caso de la función afín que modela el plan de celular, ¿qué pasaría si no se hubiese sumado el cargo fijo? ¿Qué tipo de función sería entonces?
- ¿Qué diferencias hay entre una función afín y una lineal? Comenta acerca de su expresión algebraica.

Relaciona

¿Cuál es el dominio y recorrido de las funciones $g(x)$ y $f(x)$?

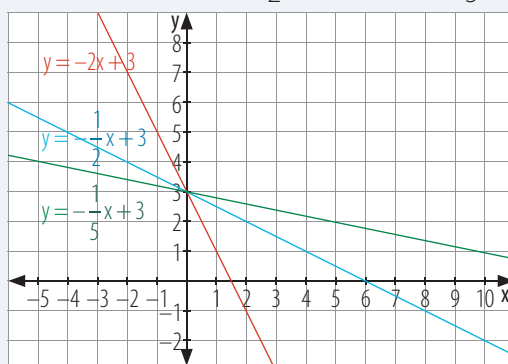
3. Observen los gráficos de las rectas que representan las funciones $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x + 1$ y $h(x) = 7x + 1$.



Razonen y comenten

- ¿Qué similitudes y diferencias tienen las rectas?
- ¿Cuál es el punto de intersección entre las rectas y el eje Y?
- ¿Qué sucede con la gráfica a medida que la pendiente aumenta? ¿Y si la pendiente disminuye?

4. Observen los gráficos de las rectas que representan las funciones $f(x) = -2x + 3$, $g(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ y $h(x) = -\frac{1}{5}x + 3$.



Razonen y comenten

- ¿Qué similitudes y diferencias tienen las rectas?
- ¿Cuál es el punto de intersección entre las rectas y el eje Y?
- ¿Qué sucede con la gráfica a medida que la pendiente cambia?
- ¿En qué influye el valor absoluto de la pendiente?

Repaso

1. Un automóvil recorre cierta distancia entre dos ciudades a una rapidez promedio de 60 km/h.

a) Completa la siguiente tabla y grafica los datos.

Distancia Recorrida en cierto tiempo	
Tiempo (h)	Distancia Recorrida (Km)
0,5	
1	
1,2	
2	

- b) Representa algebraicamente una función **V** que modele la situación.
- c) Si la distancia recorrida por el automóvil es de 480 km, ¿cuánto tiempo se demoró en lograr esta distancia?

2. Dos personas empujan un auto que pesa 1000 kg. La aceleración del automóvil va en aumento a medida que las dos personas ejercen una mayor fuerza.

a) A partir de la tabla, grafica los datos.

Fuerza ejercida (N)	Aceleración del auto (m/s^2)
600	0,6
700	0,7
800	0,8

- b) Representa algebraicamente una función **F** que modele la situación.
- c) Si la aceleración que alcanzó el automóvil al ser empujado fue de $1,9 m/s^2$, ¿cuál es la fuerza aplicada por las dos personas?

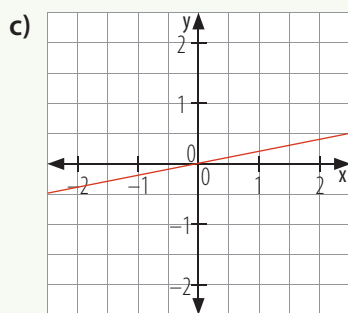
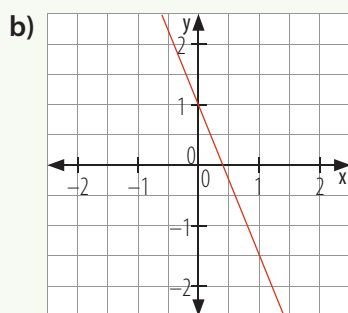
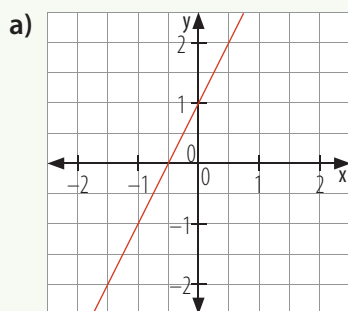
Práctica guiada

3. **Identifica** aquellas funciones que sean lineales o afines.

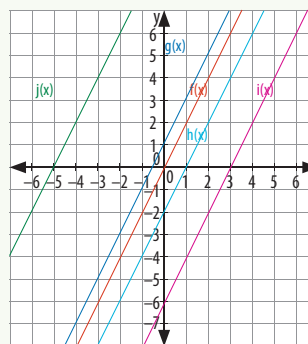
$f(x) = \frac{3x+5}{5}$ es función afín, porque $m = \frac{3}{5}$ y $n = 1$.

- a) $f(x) = 3x$ d) $f(x) = \frac{3x+5}{2}$
 b) $g(x) = 2x + 5$ e) $g(x) = \frac{2-x}{3}$
 c) $h(x) = \frac{x}{4} - 1$ f) $h(x) = \frac{2x}{7}$

4. **Identifica** cuál representación corresponde a una función lineal o a una afín. Luego determina si la pendiente es positiva o negativa.



5. **Analiza** la gráfica de la función $f(x) = 2x$ y a partir de esta, determina las funciones afines a ella.



$$g(x) = 2x + 1$$

- a) $h(x) = ?$ b) $i(x) = ?$ c) $j(x) = ?$

6. **Analiza** la tabla y determina la expresión algebraica de cada función afín. Para esto sigue el ejemplo:

x	0	5	10	15
f(x)	2	0	-3	4

La recta que pasa por los puntos (5, 0) y (15, 4) tiene pendiente m:

$$m = \frac{4-0}{15-5} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Como la recta pasa por el punto (0, 2), entonces el coeficiente de posición es 2. Por lo tanto, $f(x) = \frac{2}{5}x + 2$.

a)

x	-3	0	6	9
f(x)	-10	-1	17	26

b)

x	$\frac{1}{3}$	-1	0	-4
f(x)	6	14	8	32

7. **Analiza** el procedimiento para graficar una función afín en Geogebra.

Paso 1: Revisa que en el programa aparezca la vista algebraica y la vista gráfica en la ventana. Si no es así, haz clic en "Vista" y luego en "Vista Algebraica".

Paso 2: Con la herramienta  ubica dos puntos en el plano cartesiano haciendo click donde quieras ubicarlos.

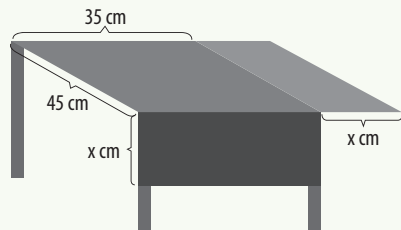
Paso 3: Con la herramienta  une los puntos haciendo click en uno y luego en el otro. Tendrás una recta que une estos puntos. Luego observa en la vista gráfica la función correspondiente a la recta.

8. **Representa** gráficamente una función afín a partir de los puntos que aparecen a continuación. Luego identifica la expresión algebraica de cada función.

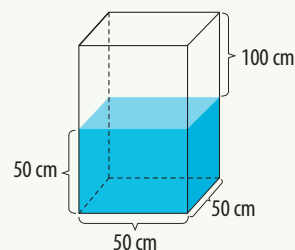
- a) (0, 2) y (2, 4) c) (5, 0) y (0, 5)
 b) (1, -2) y (-2, 7) d) (3, 7) y (6, 13)

9. Resuelve los siguientes problemas.

- a) A doña Sofía le encargan un conjunto de mesas que tienen la forma que se muestra a continuación, donde x es una longitud variable para el largo de una parte de la mesa que es plegable.



- ¿Cuál es la función que representa el área de la superficie de la mesa, incluidas sus partes plegables?
 - Si el alto de la mesa es de 45 cm, ¿cuál es el dominio y recorrido de esta función?
 - Si el área de la superficie de la mesa es de 8075 cm^2 , ¿cuál es la medida de la longitud x ?
 - Si $x = 30 \text{ cm}$, ¿cuál es el área de la superficie de la mesa?
- b) Esteban trabaja como vendedor en una tienda de ropa. Le pagan un sueldo base más una comisión por cada venta. El sueldo base mensual es de \$150 000 y por cada venta gana \$3000.
- ¿Cuál es la función que representa el sueldo mensual de Esteban de acuerdo con las ventas?
 - Aproximadamente, ¿cuántas ventas tiene que realizar Esteban para igualar su sueldo base?
 - Otra tienda le ofrece las mismas condiciones de trabajo, pero un sueldo base de \$145 000 con una comisión de \$4000 por venta. Si Esteban realiza mensualmente más de 100 ventas, ¿es conveniente que se cambie de trabajo? Argumenta tu respuesta.
- c) Don Patricio tiene una piscina de 20 m de largo, 15 m de ancho y 3 m de profundidad, más una capacidad de 200 m^3 y es llenada por una llave a razón de 5 m^3 por minuto.
- ¿Cuál es la función que modela el llenado de la piscina en relación al tiempo?
 - Si la piscina comienza a llenarse a las 8:00 de la mañana, ¿a qué hora terminará de llenarse?
- d) Gabriela tiene que diseñar un programa para que un sensor pueda determinar la altura del agua de un contenedor de forma rectangular, como se muestra en la imagen.



El contenedor tiene un desagüe que elimina $0,5 \text{ cm}^3$ de agua por minuto.

- ¿Cuál es la función que representa la altura del contenedor en función del tiempo de desagüe que tiene que programar Gabriela?
 - ¿En cuánto tiempo se desagua totalmente el contenedor?
 - El sensor también debe mostrar el gráfico de la altura del agua en el contenedor. ¿Qué forma tiene dicho gráfico?
- e) Una empresa telefónica ofrece dos tarifas para sus clientes, las cuales se muestran en la siguiente tabla:

Tarifa	Cargo fijo	Costo por llamada
A	16 000	100
B	18 000	70

- ¿Cuál es la función que modela el monto total a pagar para cada tarifa?
 - Si un cliente hace solamente 20 llamadas al mes ¿qué tarifa le conviene contratar? ¿Y si hace 80 llamadas?
 - ¿Para cuántas llamadas es conveniente una tarifa u otra? Grafica las rectas asociadas a las funciones.
- f) Un vendedor de consolas de videojuegos dice que la depreciación (pérdida del valor de un objeto a medida que se utiliza y pasa el tiempo) de una consola se puede expresar con una función afín. Para probar su afirmación presenta la siguiente tabla en la que se muestra el precio de una consola a medida que pasa el tiempo en 5 meses.

Meses	1	2	3	4	5
Precio(\$)	24 990	24 980	24 970	24 960	24 950

- ¿Está en lo correcto el vendedor? ¿Cuál es la función a la que se refiere?
- En teoría, ¿en cuántos meses la consola valdría \$0?

10. **Analiza** los parámetros de la función $f(x) = ax + b$ mediante el software Geogebra, y luego responde.

Paso 1: Coloca el parámetro **a** con el botón deslizador

. Aparecerá  por defecto el valor de $a = 1$.

Paso 2: Coloca el parámetro **b** con el botón deslizador

. Aparecerá  por defecto el valor de $b = 1$.

Paso 3: Grafica la función escribiendo en la **Entrada**

la expresión $y = a*x+b$, presiona enter y aparecerá la siguiente gráfica.



- Mueve el parámetro **a** desde 1 hacia 4. ¿Qué sucede con la gráfica de la función?
- ¿Qué sucede con la gráfica a medida que aumenta el valor de **a**?
- Mueve el parámetro **a** desde 1 hacia -4. ¿Qué sucede con la gráfica de la función?
- ¿Qué sucede con la gráfica a medida que disminuye el valor de **a**?
- Ahora mueve el parámetro **b**, manteniendo fijo $a = 1$. ¿Qué sucede con la gráfica de la función si $b = 4$?
- Mueve el parámetro **b** desde 1 hacia -4. ¿Qué sucede con la gráfica?
- ¿Qué representa el valor de **b** en la función?

Reflexiono

- Si en la función $f(x) = ax + b$, el valor de **b** es cero, ¿qué sucede? De ser así, ¿cómo sería su gráfica?
- ¿Cuál es la información que entrega la gráfica de una función respecto a su regla de formación y a la tabla de valores que se puede crear a partir de ella?

h) ¿Qué concluyes al respecto?

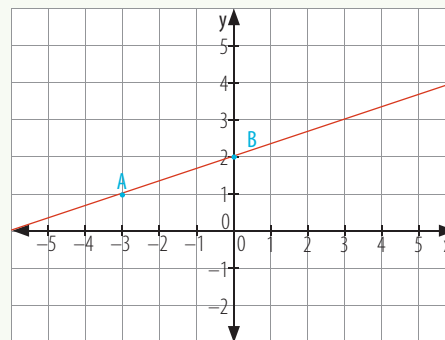
i) Al variar sus parámetros, ¿cambian el dominio y recorrido de la función?

11. **Conecta.** Cuando un cuerpo se mueve con velocidad constante, su desplazamiento respecto a un punto inicial está dado por la fórmula $s = s_0 + vt$, en la que **s** es la posición final al cabo del tiempo **t**, s_0 es la posición inicial y **v** es la rapidez del cuerpo.

a) Si un automóvil parte en el kilómetro 40 de una carretera con una rapidez constante de 90 km/h, ¿cuál es la función que describe su posición en un tiempo **t**?

b) ¿Cuánto tiempo se demora en ir del kilómetro 100 al kilómetro 145?

12. **Describe el procedimiento.** Describe paso a paso el procedimiento para determinar la función **f** que está representada en la siguiente gráfica.



13. **Argumenta.** Don Vittorio Corleone es un italiano residente en Antofagasta y cada vez que le nombran la Torre de Pisa, se enorgullece y dice: "la pendiente de la Torre de Pisa es muy baja. Debería ser mucho mayor para que estuviera de forma vertical" con lo que algunas personas quedan desconcertadas.

- ¿Es correcto lo que afirma Don Vittorio? ¿Por qué?
- ¿Por qué razón los que escuchan a don Vittorio quedan desconcertados?

Refuerzo

- Grafica las siguientes funciones y determina su dominio y recorrido.
 $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = -0,6x + 1$, $h(x) = 4x - 6$.
- ¿Cuál es la función cuya gráfica pasa por la ordenada 3 y por la abscisa 5?

Palabras clave

➔ Composición de funciones.

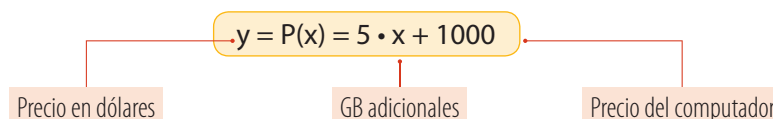
¿Qué es una composición de funciones?

- ¿Cómo podrías combinar dos o más funciones?
- ¿Será posible que la imagen de una función sea considerada como la preimagen de otra función?

Alicia es analista de sistemas y decide comprar por Internet un computador que tiene un precio en dólares. Considerando que su valor es de US\$1000 y se pagan US\$5 adicionales por cada GB de memoria que se le quiera agregar, ¿qué función determina el precio **P** en dólares de un computador? Si un dólar equivale a \$505, ¿qué función determina el precio **C** en pesos chilenos de un computador? ¿Cuál sería el precio en pesos de un computador con 10GB adicionales?



Paso 1 Expresar la función $P(x)$ que corresponde al precio en dólares del computador.



Relaciona

- ¿Qué tipo de funciones están involucradas en la situación?
- ¿Qué tipo de función es la composición de C y P ?

Paso 2 Expresar la función $C(y)$ que corresponde al precio en pesos del computador.

Para hacer la conversión a pesos del precio P del computador, considerando que 1 dólar equivale, aproximadamente, a \$505, se puede emplear la función:

$$C(y) = 505 \cdot P(x) = 505 \cdot y$$

Diagram showing the components of the function $C(y) = 505 \cdot P(x) = 505 \cdot y$:

- $505 \cdot y$ is associated with "Precio en pesos" (Price in pesos).
- y is associated with "Precio en dólares" (Price in dollars).

Paso 3 Expresar lo anterior en una sola función que corresponderá a la composición de las funciones C y P .

$$C(P(x)) = 505 \cdot (5x + 1000) = 2525x + 505\,000$$

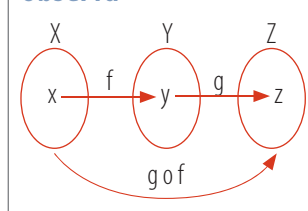
Paso 4 Evaluar la composición de funciones.

Para responder la última pregunta se necesita calcular $C(P(10))$, entonces:

$$C(P(10)) = 2525 \cdot 10 + 505\,000 = 530\,250$$

Por lo tanto, el precio en pesos chilenos del computador con 10GB adicionales es de \$530 250.

Observa



Razona

y comenta

- ¿Cuál es el dominio y recorrido de la función $P(x)$? ¿Y de la función $C(x)$?
- ¿Cuál es el dominio y recorrido de $C(P(x))$?
- La composición de funciones, ¿sigue siendo una función? ¿Por qué?
- ¿Tiene sentido calcular $P(C(y))$? ¿Por qué?

En resumen

Sean f y g dos funciones, tal que, $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$, entonces la **función compuesta** $g \circ f: A \rightarrow C$ se define como: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. También se puede leer "g compuesta con f".

Repaso

1. **Evalúa** las siguientes expresiones. Para ello considera que: $x = -1$, $y = 2$, $z = -3$, $w = 0$ y $f = 4$.

a) $xy - yz$

b) $x^y - f^z$

c) $x^f + z^w$

d) $(f + w)^z - (x + y)^2$

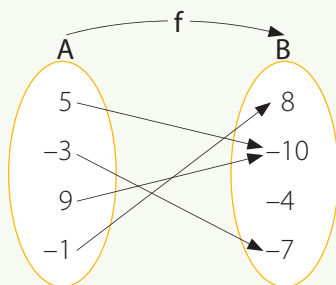
e) $\frac{z}{f} - \frac{x}{y}$

f) $y^f - \frac{wz}{f} + \frac{x+f}{zy}$

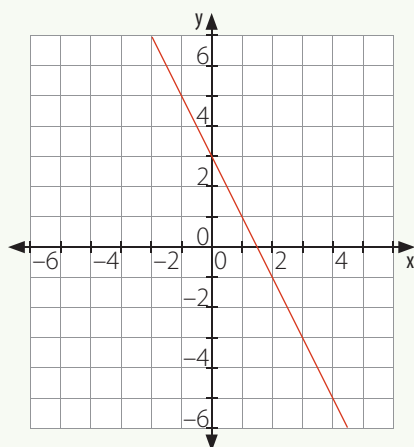
2. **Identifica** el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.

a) $f: A \rightarrow B: \{(-3, -11), (-1, -1), (0, 4), (2, 14)\}$

b)



c)



d) $f(x) = -3x$

Práctica guiada

3. **Expresa** mediante una sola función las siguientes composiciones de funciones, considerando que $f(x) = 2x$, $g(x) = -5x$, $h(x) = 4x - 1$ y $i(x) = x^2$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(-5x) = -10x$$

a) $(g \circ f)(x)$

b) $(g \circ g)(x)$

c) $(g \circ h)(x)$

d) $(f \circ h)(x)$

e) $(h \circ i)(x)$

f) $(i \circ g)(x)$

g) $(f \circ f)(x)$

h) $(f \circ i)(x)$

i) $(f \circ g \circ h)(x)$

j) $(g \circ h \circ f)(x)$

k) $(h \circ g \circ i)(x)$

l) $(f \circ h \circ g \circ i)(x)$

4. **Evalúa** las siguientes composiciones. Para ello considera que: $f(x) = 2x$, $g(x) = 1 - 6x$ y $h(x) = x^2 + 1$.

$$\begin{aligned} (f \circ g \circ g)(2) &= f \circ g(g(2)) = f \circ g(1 - 6 \cdot 2) \\ &= f \circ g(-11) \\ &= f(g(-11)) \\ &= f(1 - 6 \cdot -11) \\ &= f(67) \\ &= 2 \cdot 67 \\ &= 134 \end{aligned}$$

a) $(f \circ g)(-1)$

b) $(g \circ f)(8)$

c) $(f \circ h)(-3)$

d) $(h \circ g)(5)$

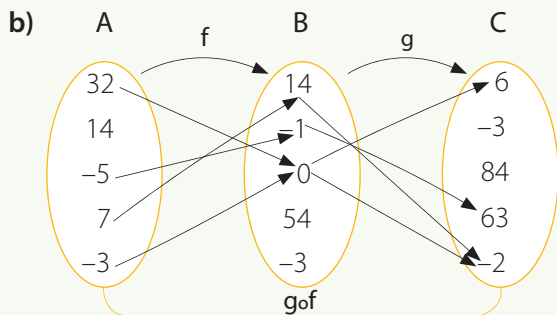
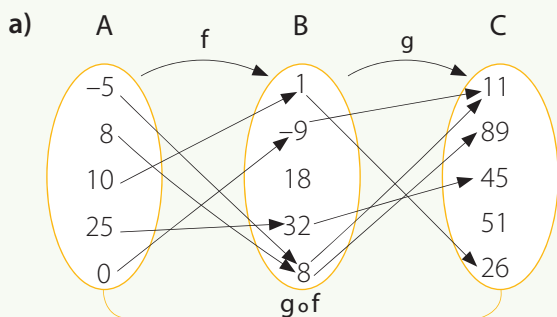
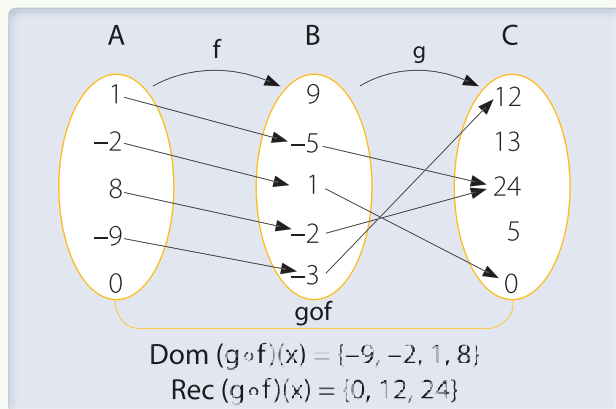
e) $(f \circ h \circ g)(-1)$

f) $(f \circ g \circ h)\left(\frac{1}{3}\right)$

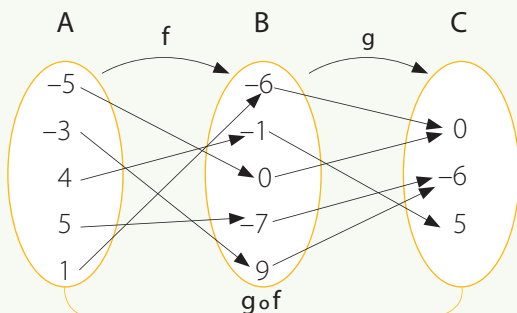
g) $(g \circ f \circ h)(0,6)$

h) $(h \circ h \circ f)(1, \bar{2})$

5. **Identifica** el dominio y recorrido de la composición de funciones expresadas en diagramas sagitales.



6. **Analiza** el siguiente diagrama sagital y determina lo pedido.



$$(g \circ f)(1) = 0$$

- a) $f(-3)$ d) $(g \circ f)(-5)$ g) Rec f
 b) $g(9)$ e) Dom f h) Rec g
 c) $(g \circ f)(1)$ f) Dom g i) Dom $(g \circ f)(x)$

7. **Identifica** el dominio y recorrido de la composición de funciones, cada una de ellas con dominios y recorridos definidos.

$$f(x) = 2x \text{ con Dom } f = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$g(x) = \frac{x}{4} \text{ con Dom } g = \{4, 8, 12, 16, 20\}$$

Entonces, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x}{4}\right) = 2 \cdot \frac{x}{4} = \frac{x}{2}$

Por lo tanto $(f \circ g)(x) = \frac{x}{2}$ con

$$\text{Dom } (f \circ g) = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$\text{Rec } (f \circ g) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

a) $f(x) = -3x$ con Dom $f = \{5, 8, 9, 12, 15\}$
 y $g(x) = \frac{x}{6}$ con Dom $g = \{-15, -24, -27, -36, -45\}$

b) $f(x) = x + 2$ con Dom $f = \{-5, -3, 0, 6, 7\}$
 y $g(x) = 1 - x$ con Dom $g = \{-3, -1, 2, 8, 9\}$

8. **Identifica** el dominio y recorrido de la composición de las funciones pedidas. Para esto considera:
 $f(x) = x$, $g(x) = 5 - 2x$ y $h(x) = \frac{x}{3} - 2$

$$g \circ g(x) = g(g(x)) = g(5 - 2x) = 5 - 2 \cdot (5 - 2x)$$

$$= 5 - 10 + 4x$$

$$g \circ g(x) = 4x - 5$$

$$\text{Dom}(g \circ g) = \mathbb{R} \text{ y Rec } (g \circ g) = \mathbb{R}$$

- a) $(f \circ g)(x)$ f) $(f \circ g \circ h)(x)$
 b) $(g \circ f)(x)$ g) $(g \circ f \circ h)(x)$
 c) $(g \circ h)(x)$ h) $(h \circ f \circ g)(x)$
 d) $(f \circ f)(x)$ i) $(h \circ g \circ f)(x)$
 e) $(h \circ h)(x)$ j) $(h \circ h \circ f)(x)$

9. **Identifica** la función a partir de su composición con otra función dada. Sigue el ejemplo:

Si $f(x) = 3x$ y $f \circ g(x) = 6x$ entonces $g(x) = ?$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = 6x$$

Luego sea $g(x) = u$, entonces $f(u) = 6x$.
 Como $f(u) = 3u$ y $f(u) = 6x$ entonces $3u = 6x$.
 Despejando, $u = 2x$. Luego, $g(x) = 2x$.

- a) $f(x) = 5x$ y $(f \circ g)(x) = 30x$ entonces $g(x) = ?$
 b) $g(x) = -x$ y $(f \circ g)(x) = 10x$ entonces $f(x) = ?$
 c) $f(x) = 2x + 1$ y $(f \circ g)(x) = 2x$ entonces $g(x) = ?$

Aplico

10. Resuelve los siguientes problemas.

- a) María quiere invertir en dos negocios distintos: una mueblería y una panadería, las cuales ofrecen una rentabilidad o ganancia según las siguientes funciones.

$$\text{Mueblería: } f(i) = 2i + 1000$$

$$\text{Panadería: } h(i) = 4i + 500$$

- ¿Cuánto dinero ganará María si invierte primero en la mueblería y con las ganancias obtenidas allí invierte en la panadería? ¿Qué función representa dicha situación?
 - ¿Cuánto dinero ganará María si invierte primero en la panadería y con las ganancias obtenidas allí invierte en la mueblería? ¿Qué función representa dicha situación?
 - De las composiciones de las funciones anteriores, ¿con cuál ganará más dinero María?
- b) Dentro de un proceso industrial se necesita agua purificada. Para este objetivo el agua pasa por dos máquinas, las cuales entregan un índice de pureza que va del 0 al 2, siendo 0 contaminación absoluta y 2 pureza absoluta. Las máquinas aseguran los siguientes niveles de pureza dependiendo de la pureza inicial x del agua:

$$\text{Máquina Matika: } f(x) = 1,03x$$

$$\text{Máquina Zuki: } g(x) = 2,03x^2$$

- ¿Cuáles son las composiciones de funciones para purificar el agua que representan las siguientes configuraciones?

Configuración A



Configuración B



- ¿Cuál configuración es más conveniente? Justifica tu respuesta.

Reflexiono

- Si se componen dos funciones lineales, la composición, ¿también es una función lineal?
- Si se componen dos funciones afines, la composición, ¿también es una función afín?

- c) La empresa del ejemplo anterior decide comprar otra máquina (Matzuko) para el proceso de purificación del agua. En la máquina Matzuko, la función para la purificación del agua es $h(x) = 5x^3$. ¿Qué configuración es la óptima para colocar las máquinas en serie como se hizo en el ejemplo anterior?

- d) Miyarai y Carlos compiten en un concurso de robótica en su escuela, para ello deben programar dos pequeños motores (que no pueden funcionar juntos) en un robot, de manera que estos aumenten la velocidad del robot en dos tiempos. Si la velocidad inicial del robot es de 20 cm/s, el primer motor genera una velocidad de $f(t) = v + 2t$ y el segundo motor genera una velocidad de $v(t) = v t^2$, ¿cuál motor se debe accionar primero para adquirir la mayor velocidad a los 120 segundos?

11. **Conecta.** Usualmente los médicos nos recetan dos medicamentos con 4, 8 y hasta 12 horas de diferencia, esto se debe a que un medicamento se debe disolver en el organismo antes de introducir uno nuevo. Supongamos que un medicamento A se disuelve (en mg) mediante la función $f(x) = 100 - 5x^2$, y un medicamento B se disuelve mediante la función $g(x) = 200 - 50x$, donde x es el tiempo desde que se ingirió el medicamento.

- a) ¿Cuál medicamento se disuelve más rápido?
- b) Si ambos medicamentos no se pueden tomar al mismo tiempo y son incompatibles, ¿cuál es la composición de las funciones que representa el menor tiempo de disolución de los mismos?

12. **Descubre el error.** Determina el error en el siguiente procedimiento:

Sea $f(x) = 2x - 4$ y $g(x) = x^2 - 3$. ¿Cuál es la función $(f \circ g)(x)$?

$$\begin{aligned}
 (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^2 - 3) \\
 &= 2(x^2 - 3) - 4(x^2 - 3) \\
 &= 2x^2 - 6 - 4x^2 + 12 \\
 &= -2x^2 + 6
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(f \circ g)(x) = -2x^2 + 6$.

Refuerzo

1. Determina $f \circ g$ si $f(x) = 2x^2 - 1$ y $g(x) = \sqrt{x+1}$.
2. Indica el dominio y recorrido de la composición anterior.

Palabras clave

➔ Propiedades de la composición de funciones.

¿Qué propiedades cumple la composición de funciones?

- Cuando realizas adiciones, sustracciones, multiplicaciones o divisiones con números racionales, ¿a qué conjunto numérico pertenecen los resultados?
- Existe algún número que sumado con **a** dé como resultado **a**? ¿Qué nombre recibe dicho número? ¿A qué propiedad se refiere?

Andrés afirma que al efectuar la composición de dos funciones afines el resultado no siempre es una función afín. Patricia, en cambio, insiste en lo contrario.

¿Quién tiene la razón? ¿Qué otras propiedades se cumplen en la composición de funciones?

Patricia supone que Andrés está equivocado y para argumentarlo realiza los siguientes pasos:

Paso 1 ➔ Definir dos funciones afines.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 2x + 3 \\ g(x) = x + 5 \end{array} \right\} \text{Donde el dominio y recorrido de ambas funciones es el conjunto de los números reales.}$$

Paso 2 ➔ Determinar las composiciones $f \circ g(x)$ y $g \circ f(x)$.

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = 2(x + 5) + 3 = 2x + 10 + 3 = 2x + 13$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = (2x + 3) + 5 = 2x + 8$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Por lo tanto, } f \circ g(x) = 2x + 13 \\ g \circ f(x) = 2x + 8 \end{array} \right\} \text{Ambas funciones son afines.}$$

Razona

y comenta

- ¿Tiene razón Patricia? Generaliza la propiedad utilizando $f(x) = ax + b$ y $g(x) = cx + d$.
- ¿Ocurrirá lo mismo con las funciones lineales? Verifícalo utilizando $f(x) = ax$ y $g(x) = bx$.
- Si hacemos una analogía con las propiedades de las operaciones en los números racionales, ¿cómo se llama esta propiedad?
- ¿Qué sucede con el dominio y recorrido de la función compuesta?
- Si observas las composiciones $f \circ g(x)$ y $g \circ f(x)$, ¿se obtienen las mismas funciones?
- ¿Qué propiedad no siempre se cumple al componer funciones afines?

En resumen

La composición de funciones cumple con la propiedad de **clausura**, es decir, si **f** y **g** son funciones afines, se tiene que: **f** $\circ$ **g** y **g** $\circ$ **f** también lo son. Lo mismo ocurre si **f** y **g** son funciones lineales.

Cabe destacar que la composición de funciones, generalmente no cumple con la propiedad conmutativa, es decir: $f \circ g \neq g \circ f$, para **f** y **g** funciones.

¿Qué otras propiedades se cumplen en la composición de funciones?

Convencido de los conocimientos de Patricia, Andrés le pregunta sobre otras propiedades de la composición de funciones, a lo cual la niña responde que la composición de funciones cumple con la propiedad **asociativa** y posee **elemento neutro**. Para probar esto, Patricia realiza los siguientes pasos:

Paso 1 Definir tres funciones afines cualquiera.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x + 1 \\ g(x) = -x + 1 \\ h(x) = 2x - 5 \end{array} \right\} \text{Donde el dominio y recorrido de las tres funciones es el conjunto de los números reales.}$$

Paso 2 Determinar las composiciones $f \circ (g \circ h)$ y $(f \circ g) \circ h$ y verificar si son iguales.

$$\begin{aligned} f \circ (g \circ h) &= (f \circ g) \circ h \rightarrow f \circ (-2x - 5) + 1 = ((-x + 1) + 1) \circ h \\ f \circ (-2x + 6) &= (-x + 2) \circ h \\ (-2x + 6) + 1 &= (-2x - 5) + 2 \\ -2x + 7 &= -2x + 7 \end{aligned}$$

Luego se obtienen expresiones iguales, por lo tanto, la composición de funciones es asociativa.

Paso 1 Definir una función $f(x)$ cualquiera y determinar una función $I(x)$ tal que $f \circ I(x) = f(x)$.

Sea $f(x) = -2x + 1$, entonces se tiene que:

$$\left. \begin{array}{l} f \circ I(x) = f(x) \rightarrow f(I(x)) = f(x) \\ -2(I(x)) + 1 = f(x) \\ -2(I(x)) + 1 = -2x + 1 \quad / -1 \\ -2(I(x)) = -2x + 1 - 1 \\ I(x) = \frac{-2x}{-2} = x \end{array} \right\} \text{Luego, el elemento neutro de } f(x) \text{ es } I(x) = x. \text{ Dicha función se conoce como función identidad.}$$

Paso 2 Verificar que $I \circ f(x) = f(x)$.

Para $f(x) = -2x + 1$ se tiene que:

$$\begin{aligned} I \circ f(x) &= f(x) \\ I(f(x)) &= -2x + 1 \\ -2x + 1 &= -2x + 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, para la función identidad $I(x)=x$ se cumple que $f \circ I(x) = I \circ f(x) = f(x)$.

En resumen

Para las funciones f , g y h , se cumple lo siguiente:

Asociatividad

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

Elemento neutro

$I(x) = x$, tal que $f \circ I(x) = I \circ f(x) = f(x)$, donde $I(x) = x$ recibe el nombre de **función identidad**.

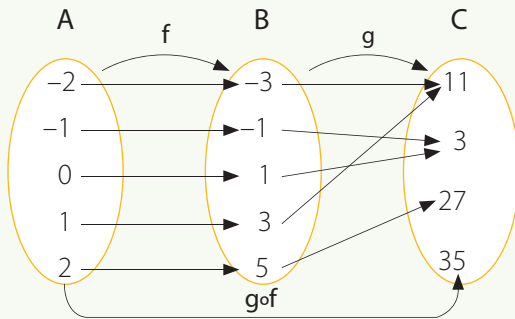
Razona

y comenta

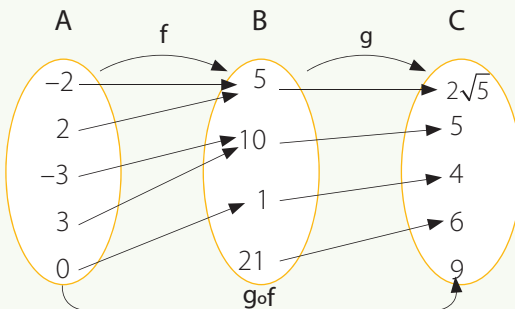
- ¿Tiene razón Patricia? Generaliza la propiedad utilizando $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$ y $h(x) = ex + f$.
- ¿Ocurrirá lo mismo con las funciones lineales? Verifícalo utilizando $f(x) = ax$, $g(x) = bx$ y $h(x) = cx$.

Repaso

1. Calcula a partir de las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = x - 3$.
- a) $g(2)$ b) $g \circ f(2)$ c) $f \circ g(2)$
2. Analiza el diagrama sagital y calcula lo que se pide.



- a) $f(-2)$ f) $\text{Dom } g$
 b) $g(3)$ g) $\text{Rec } f$
 c) $g \circ f(2)$ h) $\text{Rec } g$
 d) $g \circ f(-2)$ i) $\text{Dom } g \circ f$
 e) $\text{Dom } f$ j) $\text{Rec } g \circ f$
3. Analiza el diagrama sagital y calcula lo que se pide.



- a) $f(-3)$ g) $\text{Dom } f$
 b) $g(21)$ h) $\text{Dom } g$
 c) $g(10)$ i) $\text{Rec } f$
 d) $g \circ f(0)$ j) $\text{Rec } g$
 e) $g \circ f(-3)$ k) $\text{Dom } g \circ f$
 f) $g \circ f(2)$ l) $\text{Rec } g \circ f$

Práctica guiada

4. Calcula el valor de $g \circ (f \circ h)(x)$ en cada caso.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2; g(x) = 3x; h(x) = 2x + 1 \\ g \circ f \circ h(x) &= g \circ f(h(x)) = g \circ f(2x + 1) = g(f(2x + 1)) \\ &= g(2) \\ &= 3 \cdot 2 = 6 \end{aligned}$$

- a) $f(x) = x; g(x) = -x; h(x) = -x + 1$
 b) $f(x) = \frac{x}{2}; g(x) = \frac{x}{2} + 1; h(x) = -2x$
 c) $f(x) = -x - 4; g(x) = -x - 3; h(x) = -x - 7$
 d) $f(x) = x + b; g(x) = x; h(x) = ax$
 e) $f(x) = -x + b; g(x) = x + c; h(x) = x - 3$
5. Analiza la siguiente información y responde.
- Si $f(x) = 4, g(x) = 3x - 1, h(x) = 3x$ y $p(x) = x^2 + 1$, entonces:

$$\begin{aligned} \text{¿Cuál es el valor de } g \circ f(x)? \\ g \circ f(x) &= g(f(x)) = g(4) = 3 \cdot 4 - 1 \end{aligned}$$

- a) ¿Cuál es el valor de $h \circ f(x)$?
 b) ¿Cuál es el valor de $p \circ f(x)$?
 c) Si $f(x) = k$, siendo k cualquier número racional distinto de cero, ¿cuáles serán las funciones $g \circ f(x)$, $h \circ f(x)$ y $p \circ f(x)$?
 d) ¿Qué puedes concluir sobre la composición entre una función constante $f(x) = k$, y una función lineal o afín?
6. Analiza la siguiente información y responde.
- Si $f(x) = 2x, g(x) = 3 - x, h(x) = 5 - x$ y $p(x) = 0,5 - x$.

$$\begin{aligned} \text{¿Cuál es el valor de } g \left(f \left(\frac{3}{2} \right) \right)? \\ g \left(f \left(\frac{3}{2} \right) \right) &= g \left(2 \cdot \frac{3}{2} \right) = g(3) = 3 - 3 = 0 \end{aligned}$$

- a) ¿Cuál es el valor de $h \left(f \left(\frac{5}{2} \right) \right)$?
 b) ¿Cuál es el valor de $p \left(f \left(\frac{0,5}{2} \right) \right)$?
 c) ¿Qué puedes concluir respecto a las funciones anteriores? Explícalo.

Aplico

7. Calcula $g \circ f(x)$ y $f \circ g(x)$ si $f(x) = 2x$ y $g(x) = 5x$ y responde.

- Se obtiene la misma expresión al calcular $g \circ f(x)$ y $f \circ g(x)$?
- ¿Se cumple la conmutatividad de la composición de funciones si f y g son funciones lineales? Demuéstralo utilizando $f(x) = ax$ y $g(x) = bx$.

8. Resuelve los siguientes problemas.

- Una empresa frutícola recolecta cierta cantidad de frutas en kilogramos según la cantidad de personas que trabajan en un mes. Esta relación está dada por la función $U(n) = 20n$, donde n es la cantidad de personas que trabajan en la recolección. Los costos marginales C y total T de la empresa están dados por las funciones $C(U) = 5U + 100$ y $T(C) = 1,5C$.
 - ¿Cuál es la cantidad de kilogramos que producen 20 trabajadores?
 - ¿Cuál es el costo marginal para 20 trabajadores?
 - ¿Cuál es el costo total para 20 trabajadores?
 - ¿Cuál es la función que representa el costo marginal respecto a la cantidad de trabajadores?
 - ¿Cuál es el costo total de la empresa en función de la cantidad de trabajadores?
 - ¿Qué representa la función $T \circ (C \circ U(n))$? Explica.
- Un bus viaja una distancia $d(t) = 80t$ en kilómetros, donde t es el tiempo en horas. A partir de cierto momento t el bus comienza a viajar a una velocidad llamada "crucero" en la cual el gasto de combustible (litros) está dado por la función $g(d) = 50 - 0,06d$, donde g es la cantidad de combustible (litros) que queda en el estanque y d es la distancia recorrida a velocidad crucero.

- ¿Cuál es la cantidad de combustible que queda en el bus luego de entrar a velocidad crucero transcurridas 2 horas?
- ¿Cuál es la expresión que permite calcular la cantidad de combustible en el bus después de t horas de alcanzar la velocidad de crucero?

c) Diez carpinteros deciden hacer mesas cuadradas para vender en una tienda, por lo cual deciden dividir en partes iguales ganancias y costos. El costo de cada mesa está dado por la función $G(P) = 1000A$, donde A es el área de la superficie de la mesa en metros cuadrados. Por lo tanto, el costo para cada carpintero está representado por la función $C(G) = \frac{G}{10}$.

- ¿Cuál es la función A que representa el área de la superficie de una mesa de lado x ?
- ¿Qué representa la función $G \circ A(x)$?
- ¿Qué representa la función $C \circ G \circ A(x)$?
- ¿Cuál es el gasto aproximado para cada carpintero si deciden construir una mesa de lado 2 m?
- ¿Cuál es el gasto de cada carpintero si deben hacer 100 mesas de lado 1,5 m?

9. **Conecta.** Averigua en qué otras áreas se utiliza el concepto de composición de funciones y busca ejemplos.

10. **Argumenta.** ¿En qué casos al componer dos funciones de la forma $f \circ g$ es igual a la composición $g \circ f$? ¿Cuándo no se da esa conmutatividad? Ejemplifica cada respuesta.

11. **Investiga.** Supongamos que se quiere determinar algún valor para la función $h(y) = 4y$, pero y es una función tal que $y(u) = 3u + 1$, siendo a su vez $u(x) = 2x$. Es aquí donde la composición de funciones permite trabajar con una sola variable, en este caso x . ¿Cuál sería la función composición para este caso?

Reflexiono

- ¿Qué importancia piensas que tiene la composición de funciones?
- Explica por qué la conmutatividad se cumple en la composición de funciones lineales y no en la composición de funciones afín. Argumenta tu respuesta.

Refuerzo

Se definen las funciones $f(x) = 2x + b$, $g(x) = 3x$ y $h(x) = 4x - 1$. Determina b si:

- $f \circ g \circ h(x) = 24x - 6$
- $f \circ g \circ h(x) = 24x$
- $f \circ g \circ h(x) = \frac{48x - 3}{2}$

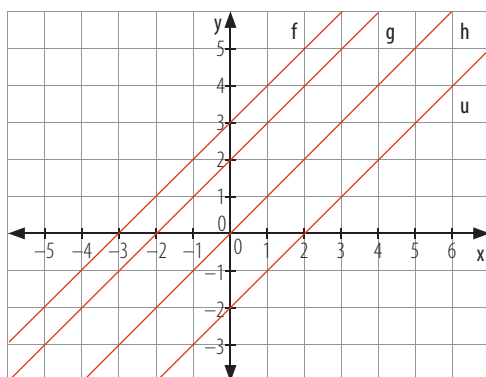


Reconocer una función afín y analizar los cambios que producen en la gráfica la variación de sus parámetros.

1 Identifica aquellas funciones que corresponden a una función afín y justifica tu respuesta.

- $f(x) = 3x^2 - 1$
- $g(x) = 3 - x$
- $h(x) = x - 5$
- $i(x) = -x - 5$
- $k(x) = -0,5x + 4$
- $j(x) = -\frac{1}{2}x - 4$
- $h(x) = \frac{1}{x} + 3$
- $i(x) = \sqrt{x} + 1$

2 Analiza las siguientes gráficas y responde.



- ¿Cuál es la expresión algebraica de las funciones f , g , h y u representadas en el gráfico?
- ¿Qué semejanzas y diferencias tienen las funciones anteriores?
- ¿Qué puedes concluir al respecto?

3 Representa en el plano cartesiano las funciones $f(x) = x + 3$, $g(x) = 2x + 3$, $h(x) = 3x + 3$ y $m(x) = 5x + 3$ y responde.

- ¿Qué semejanzas y diferencias tienen las funciones anteriores?
- ¿Qué puedes concluir al respecto?

4 Resuelve los siguientes problemas.

- En cierto experimento, la temperatura inicial de una sustancia era de 20°C , y luego aumentó en 3°C cada minuto. ¿Cuál es la función que representa la relación entre la temperatura y el tiempo?
- En un plan telefónico se pagan \$950 de cargo fijo y \$25 por minuto. Representa algebraicamente la función P que permite determinar el pago de una cuenta con respecto al total de minutos usados. Especifica el significado de cada variable que utilices.
- Una estación de peaje cobra \$2300 por cada automóvil que transita por ella. Expresa el dinero recaudado D en un día por el peaje si a este monto se descuentan \$100 000 por pago de impuestos.
- Si en el detalle de una cuenta de luz se tiene que el cargo fijo es de \$980, y por consumo de kWh se cobran \$13,8 aproximadamente, ¿qué función permite representar el pago P de una cuenta de luz dependiendo de los x kWh consumidos?
- En una panadería se gana \$45 por cada pan vendido. Además, en el lugar diariamente se estima una ganancia fija de \$100 000 por las ventas de otros productos. Expresa la ganancia G en un día con respecto a la venta de x panes.
- En una librería se vende un libro en \$15 500. Si debido a la poca demanda se baja su precio en un 20%, ¿qué función D permite calcular el dinero recibido por la venta de x libros luego de su rebaja?
- La cuenta de agua se calcula considerando \$566 de cargo fijo y \$550 por metro cúbico (m^3). Se cobra sobreconsumo cuando se gasta más de 40 m^3 y entonces el metro cúbico sube a \$650. ¿Qué funciones modelan la situación anterior?
- En una biblioteca, por cada libro que se presta se cobran \$1000, y \$900 diarios por retraso. Si Leonardo pidió 8 libros, ¿cómo expresarías la función que permite calcular el pago del muchacho en función de los días de retraso en su entrega?

i. Si el vendedor de una automotora tiene un sueldo base mensual de \$250 000, y de comisión por venta obtiene un 5% del precio del vehículo, ¿qué función permite calcular el sueldo S del vendedor con respecto a los automóviles vendidos? ¿Qué sueldo obtuvo el vendedor si durante el mes vendió 2 que tenían un precio de venta de \$5 490 000 cada uno?

j. Un hospital cuenta con 30 ambulancias y cada una de ellas recorre aproximadamente 200 km por día y gasta en promedio 1 litro de combustible por cada 12 km. Si el precio de un litro de combustible es de \$670 y se considera que todas las ambulancias salen a terreno diariamente, ¿qué función podría relacionar los datos para posteriormente calcular el dinero que se paga en combustible para las ambulancias en el hospital?

k. El costo mensual por la fabricación de sillas de mimbre de un artesano es igual a:

$$C(x) = \text{Costo fijo} + \text{costo variable.}$$

Mensualmente él paga \$10 000 por concepto de electricidad, arriendo y publicidad, y por cada silla que fabrica paga \$1000.

- ¿Cuál es la función que representa el costo mensual del artesano?
- ¿Cuál es el dominio y recorrido de la función anterior?
- ¿Cuál es el costo de fabricar 10, 15, 20, 30 y 50 sillas, respectivamente?
- ¿Cuántas sillas fabricó en un mes si su costo total fue de \$35 000?

5 Evalúa si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera (V) o falsa (F). Para ello, escribe V o F según corresponda.

- En una función, el “conjunto de partida” corresponde al conjunto de las imágenes. _____
- Si $a \in \text{Dom}(f)$, entonces existe $b \in \text{Rec}(f)$ tal que $f(a) = b$. _____
- Existe una función, tal que a todo elemento del dominio le corresponde la misma imagen. _____
- Si $f(x) = 2x$, entonces, $f(0) = f(k) - k$ para cualquier valor de k . _____

Realizar composiciones de funciones y analizar las propiedades que estas cumplen.

6 Calcula lo pedido a partir de las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 3x - 5$.

- $g \circ f(2)$
- $g \circ f(-1)$
- $f \circ g(2)$
- $f \circ g(-1)$
- $g \circ f(x)$
- $f \circ g(x)$

7 Calcula lo pedido a partir de las funciones $f(x) = x^2 + 5x$ y $g(x) = 3x + 1$.

- $f \circ f(1)$
- $f \circ g(-2)$
- $g \circ g(3)$
- $g \circ f(-1,5)$
- $f \circ f(x)$
- $f \circ g(x)$
- $g \circ g(x)$
- $g \circ f(x)$

8 Analiza la siguiente información y responde.

Considera los conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ y $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, tal que $f(x) = 2x$ está definida de $A \rightarrow B$ y $g(x) = x + 1$ está definida de $B \rightarrow C$.

- ¿Cuál es el conjunto que representa el recorrido de las funciones f y g ?
- ¿Qué valor tiene $g \circ f(1)$ y $g \circ f(2)$?
- ¿Cuál es la expresión que representa $g \circ f(x)$?
- ¿Cuál es el conjunto que representa el dominio y recorrido de la función $g \circ f(x)$?
- ¿Qué puedes concluir de lo anterior?

9 Evalúa si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.

- Si f y g son funciones lineales, entonces, $f \circ g(x) = g \circ f(x)$.
- Para todas las funciones f y g se cumple la conmutatividad.
- Solamente en las funciones lineales se cumple que $(f \circ g) \circ h(x) = f \circ (g \circ h(x))$.
- Si f es una función constante y g una función afín, se tiene que siempre $g \circ f(x)$ será una función afín.



Problema

Javier fabrica piezas para bicicletas. Él sabe que la demanda de fabricación de las piezas depende del tiempo que se le dedique a ello. La función que modela esta situación es $d(t) = 0,05t + 3$, donde $d(t)$ es la cantidad de piezas fabricadas y t es el tiempo (en años) dedicado a su fabricación. Además, el precio de venta que tiene cada pieza depende de la demanda que haya tenido. Esta situación se modela a través de la función $p(d) = 3000 + 0,7d$, donde $p(d)$ es el precio de cada pieza y d la demanda de fabricación de estas. ¿Cuál es el precio de venta en 3 años? ¿Cuál es la función que representa el precio de venta p en función del tiempo t ?

Paso 1 **Comprendo.** ¿Qué entendiste del problema?

Se debe determinar el precio de venta en 3 años y la función p en relación al tiempo.

Paso 2 **Planifico.** ¿Qué harías para resolver el problema?

- 1° Reemplazar $t = 3$ en la función $d(t)$.
- 2° Se reemplaza el valor de la demanda $d(3)$ en la función $p(d)$.
- 3° Se determina la composición entre las funciones d y p , es decir, $p \circ d(t)$.

Paso 3 **Resuelvo.** ¿Cómo ejecutarías la estrategia?

1° Al reemplazar $t = 3$ en la función d se tiene:

$$\begin{aligned} d(t) &= 0,05t + 3 \rightarrow d(3) = 0,05 \cdot 3 + 3 \\ d(3) &= 0,15 + 3 \\ d(3) &= 3,15 \end{aligned}$$

Por lo tanto, en 3 años la demanda debería aumentar en 3,15 unidades.

2° Se reemplaza $d(3) = 3,15$ en la función P .

$$\begin{aligned} p(d) &= 3000 + 0,7d \rightarrow p(3,15) = 3000 + 0,7 \cdot 3,15 \\ p(3,15) &= 3000 + 2,205 \\ p(3,15) &= 3002,205 \end{aligned}$$

Por lo tanto, en 3 años el precio de venta debería ser de $\$3002,205 \rightarrow \3002 .

3° Se calcula la función $pod(t)$.

$$\begin{aligned} p \circ d(t) &= p(d(t)) = 3000 + 0,7(0,05t + 3) \\ &= 3000 + 0,035t + 2,1 \\ &= 3002,1 + 0,035t \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función $p(t)$ es igual a $p(t) = 3002,1 + 0,035t$.



El matemático estadounidense John Forbes Nash ganó el premio Nobel de Economía en 1994 por sus pioneros puntos de vista en la "Teoría de Juegos". Dentro de su análisis sobre la teoría de juegos se encuentra la utilización de la composición de funciones, de esta manera Nash fue capaz de relacionar un conjunto de funciones para extraer sus conclusiones.

Paso 4 **Reviso.** ¿Cómo saber que es correcto el resultado?

Para comprobar si la composición de funciones $p \circ d(t)$ es correcta, evaluemos cada función por separado y la composición para distintos valores de $t = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ y 7 años.

t	$d(t) = 0,05t + 3$	$p(d) = 3\,000 + 0,7d$	$P(t) = 3002,1 + 0,035t$
1	3,05	3002,135	3002,135
2	3,1	3002,17	3002,17
3	3,15	3002,205	3002,205
4	3,2	3002,24	3002,24
5	3,25	3002,275	3002,275
7	3,35	3002,345	3002,345

Al obtener precios iguales se verifica que la función $p(t) = 3002,1 + 0,035t$ es correcta.

Paso 5 **Comunico.** ¿Cómo interpretas el resultado obtenido?

Transcurridos 3 años el precio de cada pieza bordea los \$3002, incrementándose en \$2,205 respecto del año anterior.

Resuelve los siguientes problemas.

- Bastían administra un fundo donde se cosechan uvas. La cantidad diaria recolectada (en kilogramos) está dada por la función $U(t) = 100t$, donde $U(t)$ es la cantidad de kilogramos de uva extraída y t la cantidad de horas que trabajan los recolectores del fundo. Como se paga por hora, el costo por recolectar U kilogramos de uvas está dado por la función $C(U) = 100U + 5000$.
 - ¿Cuántos kilogramos de uva se cosechan durante 6 horas de trabajo?
 - ¿Cuál es el costo si los trabajadores cosechan durante 6 horas?
 - ¿Cuál es la función del costo C en función del tiempo de cosecha?
- Un artesano construye piezas de madera para ventanas. El costo de las piezas fabricadas es de $C(u) = 10 + 1000u$, donde u es la cantidad de piezas. Lo que gasta el artesano en un mes está dado por la función $T(C) = 20\,000 + C$. ¿Cuál es el costo de fabricar 50 piezas?
 - ¿Cuál es el gasto mensual del artesano al fabricar 100 piezas de madera?
 - ¿Cuál es la función que relaciona el gasto del artesano con la cantidad de piezas u que fabrica?
- Mónica desea invertir en dos bancos, el banco A le ofrece una rentabilidad anual del 10% para su inversión inicial x (en miles de pesos), expresado en la función $A(x) = 1,1x$; el banco B, en cambio, le ofrece una rentabilidad anual de $B(x) = 0,5x + 10$.
 - ¿Cuál es la función que determina la rentabilidad en un año, si invierte en el banco A con las ganancias obtenidas al invertir en el banco B durante un año?
 - ¿Cuál es la función que determina la rentabilidad en un año, si invierte en el banco B con las ganancias obtenidas al invertir en el banco A durante un año?
 - ¿Cuál es la función que determina la rentabilidad en dos años, si invierte dos años seguidos en el banco A? ¿Y en el banco B?

Reflexiona

- ¿Piensas que mediante la composición de funciones se pueden relacionar cualquier tipo de funciones? ¿Cuáles son las limitaciones al respecto?
- ¿De qué manera puedes explicar la relación entre una variable que es función y una función cualquiera?



Reducción de expresiones algebraicas

¿Cuál de los siguientes procedimientos fue realizado correctamente? Guiándote por las flechas compara los procedimientos paso a paso.

Caso 1

$$\begin{array}{ccccccc} \boxed{-\{-(x+1) - 3y\} + 2y} & = & \boxed{-\{-x+1 - 3y\} + 2y} & = & \boxed{x-1+3y+2y} & = & \boxed{x-1+5y} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

Caso 2

$$\begin{array}{ccccccc} \boxed{-\{-(x+1) - 3y\} + 2y} & = & \boxed{-\{-x+1 - 3y\} + 2y} & = & \boxed{x+1+3y+2y} & = & \boxed{x+1+5y} \end{array}$$

Razona

y comenta

- ¿Cuál es el procedimiento correcto?
- En el procedimiento equivocado, ¿cuál es el paso que tiene error? ¿Por qué?
- ¿Influye en el resultado el error cometido en el procedimiento?

Toma nota

- Para resolver este tipo de ejercicio es recomendable comenzar desde los paréntesis internos a los más externos.
- Debes identificar qué tipo de operaciones se están trabajando, recuerda que existe prioridad entre estas.

1 Analiza cuál de los siguientes procedimientos es el correcto y en el caso incorrecto explica el error.

a.

Caso 1

$$\begin{array}{ccccccc} \boxed{-b(-(-a+b)) - a^2} & = & \boxed{-b(a-b) - a^2} & = & \boxed{-b(a-b) - a^2} & = & \boxed{-ab+2b-a^2} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

Caso 2

$$\begin{array}{ccccccc} \boxed{-b(-(-a+b)) - a^2} & = & \boxed{-b(a-b) - a^2} & = & \boxed{-b(a-b) - b^2} & = & \boxed{-ab+b^2-a^2} \end{array}$$

b.

Caso 1

$$\begin{array}{ccccccc} \boxed{-a(a+a^2)(a+1)} & = & \boxed{(-a^2-a^3)(a+1)} & = & \boxed{-a^3-a^2-a^4-a^3} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

Caso 2

$$\begin{array}{ccccccc} \boxed{-a(a+a^2)(a+1)} & = & \boxed{(-a^2-a^3)(a^2+a)} & = & \boxed{-a^4-a^3-a^5-a^4} \end{array}$$

2 Calcula los siguientes ejercicios propuestos.

- $2(x+2) + (x+8)(2-x)$
- $-\{(a+b) - b\} - (3-a)$
- $(x-1)(x-2)(x+2x^2)(x-3)$

Composición de funciones

¿Cuál de los siguientes procedimientos fue realizado correctamente?
Compáralos paso a paso, guiándote por las flechas.

Sean $f(x) = -2x - 5$ y $g(x) = 9 - 7x$ funciones afines.

Caso 1

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(9 - 7x) = -2(9 - 7x) - 5 = -2 \cdot 9 + -2 \cdot -7x - 5 = -23 + 14x$$

Caso 2

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(9 - 7x) = (-2x - 5)(9 - 7x) = -18x + 14x^2 - 45 + 35x = 14x^2 + 17x - 45$$

Razona

y comenta

- ¿Cuál es el procedimiento correcto?
- En el procedimiento equivocado, ¿cuál es el paso que tiene error? ¿Por qué?
- ¿Influye en el resultado el error cometido en el procedimiento?

1 Analiza cuál de los siguientes procedimientos es el correcto y en el caso incorrecto explica el error.

a. Sean las funciones afines $f(x) = -3x - 1$ y $g(x) = 6 - 13x$.

Caso 1

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(6 - 13x) = -3(6 - 13x) - 1 = -3 \cdot 6 + -3 \cdot -13x - 1 = -19 + 39x$$

Caso 2

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(6 - 13x) = (-3x - 1)(6 - 13x) = -18x + 39x^2 - 6 + 13x = 39x^2 - 5x - 6$$

b. Sean las funciones afines $f(x) = \frac{1}{3}x + 5$ y $g(x) = -\frac{2}{3} + \frac{1}{10}x$.

Caso 1

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{10}x\right) = \left(\frac{1}{3}x + 5\right)\left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{10}x\right) = -\frac{2}{9}x + \frac{1}{30}x^2 - \frac{10}{3} + \frac{5}{10}x = \frac{1}{30}x^2 + \frac{5}{18}x - \frac{10}{3}$$

Caso 2

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{10}x\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{10}x\right) + 5 = \frac{1}{3} \cdot -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10}x + 5 = \frac{1}{30}x + \frac{43}{9}$$

2 Calcula la composición $(f \circ g)(x)$ de las siguientes funciones propuestas.

a. $f(x) = -11 - 8x$ y $g(x) = -12x + 1$

b. $f(x) = 0,1x - 6$ y $g(x) = 3,5 - x$

Reflexiona

- ¿Cuál es el error que cometes con frecuencia al resolver este tipo de ejercicios? ¿Coinciden con los mostrados en esta página?
- ¿Qué harás para evitar errores cuando te enfrentes a ejercicios de este tipo?

Toma nota

- En este tipo de ejercicios es conveniente considerar la función de la derecha como si fuera una preimagen.



Generación de energía eléctrica

Como se mencionó en un principio, existen diversas variables que influyen en la generación de energía eléctrica, dentro de esas variables se encuentra el caudal del agua que pasa por las hélices de los dínamos.



Taller

Reúnanse en parejas, observen la siguiente tabla que muestra la cantidad de potencia eléctrica que produce un dínamo en función del caudal de un río y luego realicen las actividades.

Caudal del río (m^3/s)	Potencia eléctrica (Watt)
10	202 000
20	402 000
30	602 000
40	802 000
50	1 002 000
60	1 202 000
70	1 402 000
80	1 602 000
90	1 802 000
100	2 002 000

1. La tabla, ¿representa una función? ¿Qué tipo de función es?
2. ¿Cuál es la diferencia en la potencia eléctrica entre un caudal de 10 y 20 m^3/s ? ¿Y entre 20 y 30? ¿30 y 40? ¿Qué significa esto?
3. ¿Cuál es la potencia eléctrica para 15 m^3/s ? ¿Cómo lo averiguaron?
4. Realiza un gráfico con los datos de la tabla y escribe tres conclusiones acerca de la relación entre el caudal del río y la potencia eléctrica. Presenta esta información a tu curso.

Para saber más...

¿Cómo funciona un dínamo?

Michael Faraday descubrió que cuando un alambre de cobre pasa por un imán se genera electricidad en el conductor. Un dínamo funciona con ese mismo principio, ya que es un conjunto de conductores enrollados en un eje, el cual se encuentra rodeado de imanes, entonces, al hacer girar el eje se produce corriente que circula a través de la bobina.

Reflexiona

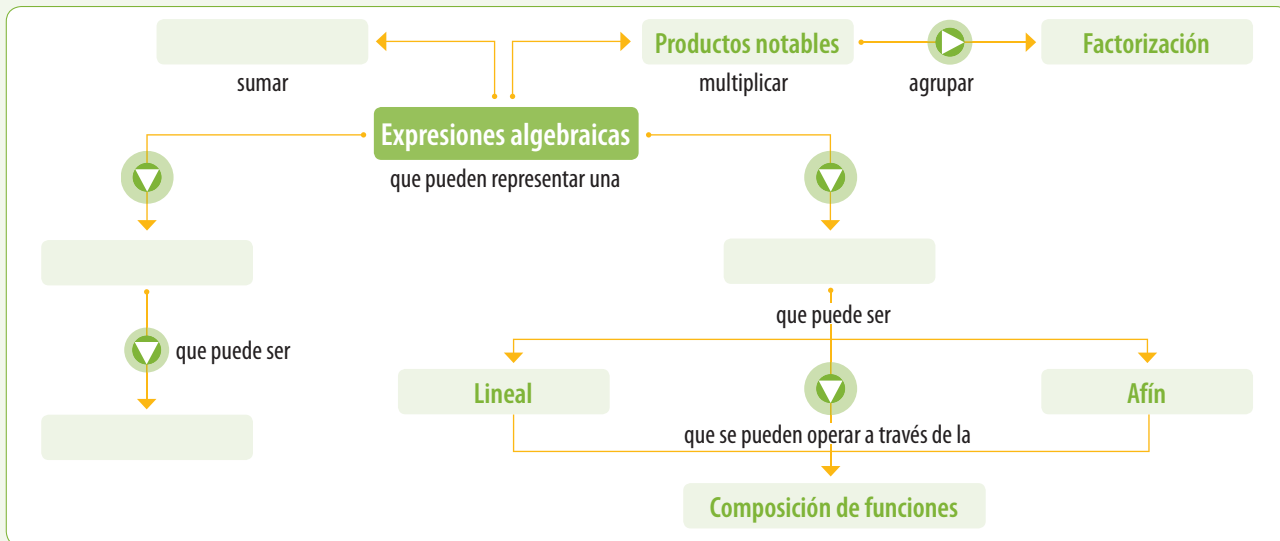
- ¿Cuál es el dominio y recorrido de la función representada por la tabla? ¿Se puede saber solo con la tabla? ¿Por qué?
- ¿Cuál es la ventaja y desventaja de presentar la relación entre dos o más variables en una tabla?
- ¿Cómo presentarías tú la información de la relación entre el caudal del río y la potencia eléctrica?



¿Cómo se llama?

- Organiza las siguientes palabras en el mapa conceptual.

Composición – Ecuación – Términos Semejantes – Función – Literal



¿Cómo se hace?

- Para **resolver** ecuaciones literales donde x es la incógnita puedes hacer lo siguiente:

$$ax - b = 4x - 3b + 5ax \quad / - 5ax$$

$$ax - 5ax - b = 4x - 3b \quad / - 4x$$

$$ax - 5ax - 4x = -3b \quad / + b$$

$$ax - 5ax - 4x = -3b + b$$

$$x(a - 5a - 4) = -2b$$

$$x(-4a - 4) = -2b$$

$$x = \frac{-2b}{(-4a - 4)} \rightarrow x = \frac{b}{2(a + 1)}$$

- Para **evaluar una composición de funciones**, puedes realizar lo siguiente:

Sean $f(x) = 3x$ y $g(x) = 2 - 5x$ entonces $f \circ g(2) = ?$:

$$\begin{aligned} 1^\circ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(2 - 5x) \\ &= 3(2 - 5x) \\ &= 6 - 15x \end{aligned}$$

$$2^\circ (f \circ g)(2) = 6 - 15 \cdot 2 = -24$$

Ahora refuerza

- Calcula el valor de x en cada ecuación literal.

a. $2ax - a = a + 2x$

b. $a^2b + bx = ab^2 + ax$

c. $mx - mo = no - nx$

d. $m^2 = n(n + m^2x - nx)$

e. $rx - ru + s - 3t = su$

- Calcula el valor de las composiciones de funciones si $f(x) = -9x$, $g(x) = 6x + 3$ y $h(x) = 5x$.

a. $f \circ g(1)$ f. $g \circ h(-9)$

b. $g \circ f(-5)$ g. $h \circ f(0, \bar{8})$

c. $f \circ f(0, 1)$ h. $f \circ g \circ h(-8)$

d. $g \circ g(-1, 5)$ i. $g \circ f \circ h\left(\frac{1}{2}\right)$

e. $h \circ h(5)$ j. $h \circ g \circ f(-1, 1\bar{3})$

Tips para estudiar

- Para evaluar expresiones algebraicas debes identificar las variables involucradas en la expresión y reemplazar los valores asignados en cada variable. Luego debes operar entre los números según la prioridad de las operaciones.
- Al despejar la incógnita en una ecuación literal, agrupa términos semejantes. Luego, puedes utilizar la factorización si es necesario.
- Para diferenciar una función lineal de una función afín, recuerda que esta última, además de tener una constante de proporcionalidad, tiene un coeficiente de posición.

Reflexiona

- ¿Qué conceptos fueron los más significativos para ti en esta unidad? ¿Por qué?
- ¿Qué procedimiento o concepto te resultó más difícil de entender? Explícaselo a un(a) compañero(a).
- Si un(a) compañero(a) te pregunta "¿cuál es la diferencia entre una función lineal y una afín?" ¿qué le dirías? Explica.
- ¿Piensas que es útil sintetizar lo aprendido? Justifica tu respuesta.



El **lenguaje algebraico** es una forma de traducir frases del lenguaje común a números y símbolos.

Multiplicar expresiones algebraicas utilizando productos notables y otras regularidades (lecciones 13, 14, 15 y 16).

1 Modela las siguientes situaciones en lenguaje algebraico.

- La diferencia entre el triple de una cantidad y el doble de otra.
- Catalina tiene cierta cantidad de billetes de \$1000, el doble de esa cantidad en billetes de \$5000 y el triple de esa cantidad en billetes de \$10 000. Si tiene 3 billetes de \$1000, ¿cuánto dinero tiene en total?

Evaluar una expresión algebraica significa asignarle un valor a cada variable, y se resuelven las operaciones indicadas para obtener un resultado numérico.

2 Evalúa las siguientes expresiones algebraicas.

- $2a + 3b - 5$, si $a = 10$ y $b = -3$.
- $\frac{a}{5} + b^2$, si $a = 100$ y $b = 25$.

Los **productos notables** corresponden a multiplicaciones de expresiones algebraicas que tienen una regularidad en su desarrollo.

3 Resuelve las siguientes operaciones si $A = 2a + ba^2$ y $B = -ab - a$.

- $2A$
- AB
- $-4B$
- $-4AB$
- $A(A + B)$
- $A(A - B)$

4 Resuelve las siguientes operaciones.

- $(x^2 - 2y)^2$
- $(2x^2 + 5)^2$
- $(0,24x - 0,3y)(0,24x - 0,3y)$
- $(a - 3y - 2)^2$
- $(0,25x - 3y)^3$
- $(3x^3 + yn)^3$

Factorizar expresiones algebraicas utilizando las regularidades establecidas en la multiplicación de expresiones algebraicas (lección 17).

Factorizar una expresión algebraica significa expresarla como un producto de factores simples.

5 Factoriza las siguientes expresiones.

- $18x^2y + 22x^4y^2$
- $16x^4 - 16$
- $x^2 - (2x - 1)^2$
- $x^2 - 10x + 16$
- $xy + x - y - 1$
- $x^3y^3 - z^3$
- $3m - 2mn + 14n^2 - 21n$
- $4x^5 - x^3 - 32x^2 + 8$
- $y^3 + 216$

Una **ecuación** de primer grado es una igualdad de dos expresiones donde las incógnitas tienen exponente igual a 1.

Resolver ecuaciones lineales de primer grado en el ámbito de los números racionales (lección 18).

6 Resuelve las siguientes ecuaciones.

- $2x + 3 = 25$
- $x - 6 = 4x - 10$
- $2(x + 1) - 2(x - 4) = x - 5$
- $(x - 2) + x(x - 3) + x - 3 = x^2 - x$
- $\frac{x-1}{4} - \frac{x-5}{10} = 4$
- $\frac{2}{4} \left[x - \left(2 - \frac{x+2}{6} \right) \right] = x - 1$

Resolver ecuaciones literales y analizar las restricciones de las soluciones (lecciones 19 y 20).

7 Resuelve los siguientes problemas.

- Un cuadrado tiene un perímetro igual a 100 cm^2 . Si su lado es $x + 2a$, ¿cuál es el valor de x en función de a ?
- Un cuadrado de lado a y un rectángulo de lados 10 cm y $(a - ax) \text{ cm}$ tienen igual área. ¿Cuál es el valor de a en función de x ?

Una **ecuación literal** es aquella igualdad que tiene más de un coeficiente literal como incógnita.

8 Resuelve las siguientes ecuaciones literales despejando x , y determina las restricciones de la solución.

a. $x - b = ax - 4$

b. $4 - (2x - 3xa) = 5xa$

c. $\frac{x}{a} - xb = 5xa + b$

d. $5x + \frac{4x}{b} - \frac{4}{b^2} - 2a = xa$

9 Resuelve la ecuación $2x - a = 4$ en función de x y determina las restricciones para que x sea un número par mayor que cero.

Comprender el concepto de función y sus características (lecciones 21 y 22).

Una **función** es una regla que asocia a cada uno de los elementos de un conjunto **A** uno y solo un elemento de un conjunto **B**, donde los elementos del conjunto **A** son el **dominio** de la función y los elementos del conjunto **B** son el **recorrido** de la función.

10 Identifica cuál de los siguientes conjuntos de pares ordenados representan una función.

a. $f = \{(1, 2); (2, 3); (3, 4); (4, 5); (5, 6); (6, 7); (7, 8); (8, 9); (9, 10)\}$

b. $g = \{(1, 1); (2, 1); (3, 1); (4, 1); (5, 1); (6, 1); (7, 1); (8, 1); (9, 1)\}$

c. $h = \{(1, 1); (2, 3); (4, 6); (1, 6); (5, 6)\}$

11 Grafica las siguientes funciones y determina su dominio y recorrido.

a. $f(x) = x$

b. $g(x) = 2x - 3$

c. $h(x) = -2x + 4$

12 Calcula el dominio o recorrido de las siguientes funciones.

a. $f(x) = -2x$, si $\text{Dom } f = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ calcula el recorrido de f .

b. $g(x) = 4x$, si $\text{Rec } g = \{-12, -8, -4, 0, 4, 8, 12\}$ calcula el dominio de g .

c. $h(x) = 0,5x$, si $\text{Dom } f = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ calcula el recorrido de f .

Reconocer una función lineal y afín representarla gráficamente (lecciones 23 y 24).

Una **función lineal** es una función **f** de la forma $f(x) = ax$, donde **a** es distinto de cero.

Una **función afín** es una función **f** de la forma $f(x) = ax + b$, donde **a** y **b** son distintos de cero.

13 Analiza la función $f(x) = ax + b$, **a** y **b** $\neq 0$.

a. ¿Qué sucede con el gráfico de la función si se mantiene **b** fijo y **a** variable?

b. Si se mantiene fijo **a** y varía **b**, ¿cómo se comporta su gráfico?

Realizar composiciones de funciones y analizar las propiedades que cumplen estas (lecciones 25 y 26).

Dadas dos funciones **f** y **g**, se llama **composición de las funciones** y se escribe **$g \circ f$** a la función definida como $g[f(x)]$.

14 Calcula los valores de $f \circ g(x)$ y $g \circ f(x)$ si:

a. $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = x^2 - 2$

b. $f(x) = -x$ y $g(x) = \frac{x}{3}$

c. ¿ $f \circ g(x) = g \circ f(x)$? Justifica.



I. Marca con una x la alternativa correcta.

Multiplicar expresiones algebraicas (lecciones 13, 14, 15 y 16).

1 ¿Cuál es el producto de $\left(\frac{1}{3}x + 2y\right)\left(\frac{1}{3}x - 2y\right)$?

- A. $\frac{1}{3}x^2 - 2y^2$
- B. $\frac{1}{9}x^2 - 4y^2$
- C. $\frac{1}{3}x^2 - 4y^2$
- D. $\frac{1}{6}x^2 - 4y^2$

E. Ninguna de las anteriores.

2 ¿Qué expresión es equivalente a $(a + b)^2 - (a - b)^2$?

- A. $4a$
- B. $2a$
- C. $4ab$
- D. $-2ab$
- E. $-4ab$

3 El perímetro de un rectángulo es $(10a + 6b)$ cm y la medida de su ancho es $(3a + 2b)$ cm. ¿Cuál es la medida del largo del rectángulo?

- A. $(2a + b)$ cm
- B. $(4a + 2b)$ cm
- C. $(7a + 4b)$ cm
- D. $(a + 2b)$ cm
- E. $(3,5 + 2b)$ cm

Factorizar expresiones algebraicas (lección 17).

4 ¿Qué expresión se obtiene al factorizar la expresión $25x^2 - 121y^2$?

- A. $(5x^2 - 11y)(5x^2 - 11y)$
- B. $(5x + 11y)(5x + 11y)$
- C. $(5x^2 + 11y)(5x^2 - 11y)$
- D. $(5x + 11y)(5x - 11y)$

E. Ninguna de las anteriores.

5 En la expresión algebraica $z^2w^2 + z^2w + zw + z$, ¿cuál(es) de la(s) siguiente(s) expresion(es) es(son) factor(es) común(es)?

- I. $zw + 1$
- II. $z + 1$
- III. z

- A. Solo I
- B. Solo II
- C. Solo III
- D. Solo I y III
- E. Solo II y III

6 Uno de los lados de un rectángulo mide $(a - 3)$ cm y su área está dada por la expresión $(2a^2 + 2a - 24)$ cm². ¿Cuál es la medida del otro lado?

- A. $(a + 8)$ cm
- B. $2(a + 8)$ cm
- C. $2(a - 4)$ cm
- D. $2(a - 3)$ cm
- E. $2(a + 4)$ cm

Resolver ecuaciones lineales y literales y analizar las restricciones de las soluciones (lecciones 18, 19 y 20).

7 ¿Cuál de las siguientes ecuaciones es equivalente a la ecuación $0,05x = 4,5$?

- A. $0,5x = 450$
- B. $\frac{5}{100}x = 4,5$
- C. $\frac{50}{100}x = 450$

D. $5 \cdot 10^{-3} \cdot x = 45 \cdot 10^{-2}$

E. $0,5 \cdot 10^{-2} \cdot x = 0,45 \cdot 10^{-1}$

8 Al resolver la ecuación $\frac{x-1}{2} + \frac{2(x-1)}{3} = x$, ¿cuál es el valor de x ?

- A. 5
- B. 6
- C. 7
- D. 9
- E. 11

- 9 ¿Qué ecuación representa que al doble de la suma entre un número a y un número c le falten 4 unidades para ser 18?

A. $2a + c + 4 = 18$
 B. $2a + c - 4 = 18$
 C. $2(a + c) - 4 = 18$
 D. $2(a + c) + 4 = 18$
 E. $4 - 2(a + c) = 18$

- 10 Si $bx + b = ba$, ¿cuál es el valor de $a + x$?

A. a D. $1 + a$
 B. 2 E. 1
 C. $2a$

- 11 ¿Qué expresión representa a r en la siguiente fórmula?

$$V_e = K \cdot \frac{Q \cdot q}{r}$$

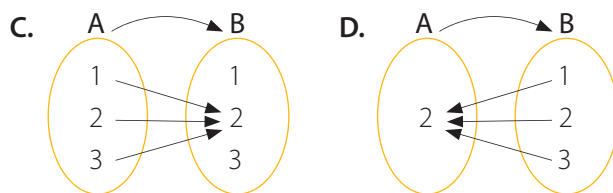
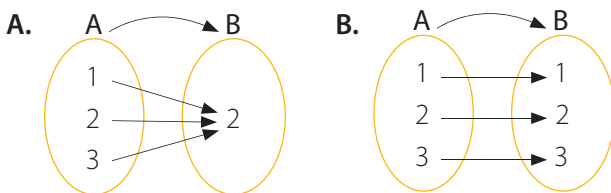
A. $V_e \cdot K \cdot Q \cdot q$
 B. $\frac{V_e \cdot K \cdot Q}{q}$
 C. $\frac{K \cdot Q \cdot q}{V_e}$
 D. $\frac{V_e \cdot K \cdot q}{Q}$
 E. Ninguna de las anteriores

Reconocer una función lineal y afín y analizar su gráfica al variar sus parámetros. (lecciones 21, 22, 23 y 24).

- 12 Si $f(x) = 2x + 1$, ¿cuál es el valor de $f(9)$?

A. 1 C. 10 E. 19
 B. 9 D. 18

- 13 ¿Cuál de los siguientes diagramas NO representa una función definida de $A \rightarrow B$?



E. Ninguno de los anteriores.

- 14 Si f es una función definida por $f(x) = tx + 1$ y $f(-2) = 5$, ¿cuál es el valor de t ?

A. 2 C. -2 E. $\frac{3}{2}$
 B. 3 D. -3

- 15 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es VERDADERA respecto al gráfico de una función?

A. Con él puedes determinar el dominio y el recorrido de la función que representa.
 B. No siempre se puede graficar una función.
 C. Una función siempre se puede representar con una línea recta.
 D. Siempre es necesario unir los puntos que se ubican en el plano.
 E. Todas las anteriores son verdaderas.

- 16 En relación con la función $y = 9x$ definida en $\mathbb{R}$, ¿qué afirmación es FALSA?

A. Su gráfico pasa por el origen.
 B. Cuando $x = 1$, se tiene que $y = 9$.
 C. Su representación gráfica no es una recta.
 D. Su dominio es el conjunto de los números reales.
 E. -3 pertenece al recorrido de la función.

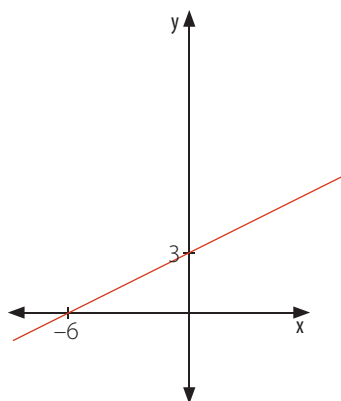
- 17 En relación con el gráfico de la función afín $f(x) = 1 - x$, ¿qué afirmación(es) es(son) correcta(s)?

I. Pasa por el punto $(0, 0)$.
 II. La pendiente de la gráfica es positiva.
 III. Intersecta al eje X en el punto $(1, 0)$.

A. Solo II C. Solo I y II E. I, II y III
 B. Solo III D. Solo II y III



- 18** Con respecto al siguiente gráfico, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) VERDADERA(S)?



- I. La pendiente de la recta es 2.
- II. La pendiente es positiva.
- III. La ecuación de la recta es $y = \frac{1}{2}x + 3$.

- A. Solo I
- B. Solo II
- C. Solo III
- D. Solo I y II
- E. Solo II y III

- 19** Si el nivel de agua en un estanque es de 12 m y baja 0,5 m cada semana, ¿cuál de las siguientes funciones representa la situación descrita, relacionando el nivel de agua (y) con el número de semanas (x)?

- A. $y = 0,5x + 12$
- B. $y = -3,5x + 12$
- C. $y = -0,5x + 12$
- D. $y = 12x - 12$
- E. $y = 0,5x - 12$

Realizar composiciones de funciones y analizar las propiedades que cumplen estas (lecciones 25 y 26).

- 20** Dadas las funciones $f(x) = -2x$, $g(x) = x - 3$, ¿cuál es la función $(g \circ f)(x)$?

- A. $(g \circ f)(x) = -2x - 6$
- B. $(g \circ f)(x) = -2x + 6$
- C. $(g \circ f)(x) = -2x - 3$
- D. $(g \circ f)(x) = -2x + 3$
- E. $(g \circ f)(x) = -2x + x - 3$

- 21** Dadas las siguientes funciones: $f(x) = \frac{x+1}{2}$, $g(x) = 2x$ y $h(x) = x + 1$. ¿Cuál es el valor de la función compuesta $(h \circ g \circ f)(3)$?

- A. 4
- B. 4,5
- C. 5
- D. 5,5
- E. 6

II. Resuelve los siguientes problemas.

Multiplicar expresiones algebraicas.

1 Resuelve los siguientes problemas.

- a. ¿Cuál es el área de un rectángulo de lados $x - 9$ y $x^2 - 9$?
- b. Don Andrés tiene un terreno rectangular de lados $(x + 102)$ m y $(x - 102)$ m. ¿Cuál es el área del terreno?

2 Calcula los siguientes productos.

- a. $5a^2(1 - 2ab^2)$
- b. $(5y + 9)(3y + 13)$
- c. $(0,9m^4 - n)n^2m$
- d. $(3x + 1)(-5x - 2)$

3 Calcula las siguientes expresiones algebraicas considerando $A = a + b$, $B = a^2 - b^2$ y $C = a - b$.

- a. $A + B + C$
- b. $2A(A+B)$
- c. $2A - C$
- d. $(A + B)(2A - C)$

Factorizar expresiones algebraicas.

4 Factoriza las siguientes expresiones.

- a. $x^2 + xz + xy + zy$
- b. $4a^2b^2 - 9x^2y^4$
- c. $x^6 - 64y^{12}$
- d. $x^4 + 4x^2 + 16$

Resolver ecuaciones literales y analizar las restricciones de las soluciones.

5 Plantea y resuelve las siguientes ecuaciones literales.

- La edad de Marta es **a** años, la de Pamela es **b** años. Si ambas edades suman 75 años, ¿qué edad tiene Pamela?
- Carolina compró un lápiz en \$**m** y un borrador en \$**n**, por \$1000. ¿Cuánto costó cada artículo?

Reconocer una función lineal y afín, y analizar los cambios que producen en la gráfica la variación de sus parámetros.

6 Identifica cuál de las siguientes funciones corresponde a una función lineal y gráficala.

- $f(x) = x(2 - x) + x^2$
- $g(x) = 2x(x - 3) + 2x^2$

7 Analiza la función $f(x) = ax$ y responde.

- Grafica la función **f** con $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$, $a = -2$, $a = -3$ y $a = -4$.
- ¿Qué sucede con la gráfica de la función a medida que aumenta **a**?
- ¿Cuál es la diferencia entre las gráficas cuyos valores de **a** son mayores que 0 y menores que 0?

8 Representa gráficamente las funciones definidas en los números racionales.

- $f(x) = 2x - 1$
- $h(x) = -\frac{3}{4}x + 2$

9 Analiza la función $f(x) = ax + b$ y responde.

- ¿Cuáles son las gráficas si $a = 1$ y **b** varía de 1 a 4?
- ¿Qué sucede si **b** aumenta de valor? Compara las gráficas.
- ¿Cómo son las gráficas si $b = 1$ y **a** varía de 1 a 4?
- ¿Qué sucede si aumenta el valor de **a**? Compara las gráficas.
- ¿Qué puedes concluir?

Realizar composiciones de funciones y analizar las propiedades que estas cumplen.

10 Analiza las funciones $f(x) = x + 2$, $g(x) = x + 1$ y $h(x) = x^2 + 2x - 1$ y determina lo pedido.

- | | | |
|-------------------|-----------------------------|--------------------|
| a. $f \circ g(x)$ | f. $h \circ (g \circ f(x))$ | k. Rec g |
| b. $g \circ f(x)$ | g. $f \circ (g \circ h(x))$ | l. Dom h |
| c. $f \circ h(x)$ | h. Dom f | m. Rec h |
| d. $g \circ h(x)$ | i. Rec f | n. Dom $f \circ g$ |
| e. $h \circ g(x)$ | j. Dom g | o. Dom $g \circ f$ |

Desafío

Los discípulos de Einstein

Dos antiguos discípulos de Einstein se encuentran después de varios años sin verse. Uno de ellos se ha casado y tiene tres hijos.



- ¿Cuántos años tienen tus hijos? – pregunta el soltero.
- Te diré que el producto de las edades de mis hijos es igual a 36 – contesta el casado.
- ¿Y la suma?
- El número de ese portal.
- Con todo, me falta un dato.
- El que tiene más años toca el piano.
- Entonces ya sé que edades tienen tus hijos.

¿Qué edades tienen los hijos del discípulo casado de Einstein?



I. Marca con una x la alternativa correcta.

Caracterizar los números racionales. (Lecciones 1 y 2)

1 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es FALSA?

- A. Un número entero puede escribirse como un número racional.
- B. Un número decimal periódico es un número racional.
- C. Un número real es también un número irracional.
- D. Todo número entero es también un número real.
- E. Un número racional es también un número real.

2 ¿A qué fracción corresponde el número decimal $1,7\bar{1}$?

- A. $\frac{17}{9}$
- B. $\frac{77}{45}$
- C. $\frac{154}{99}$
- D. $\frac{170}{99}$
- E. $\frac{77}{50}$

3 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

- I. $4,2\bar{1}$ es un decimal periódico.
- II. $-5,7\bar{2}$ es un decimal periódico.
- III. $0,100$ es un decimal finito.
- A. Solo I
- B. Solo III
- C. I y II
- D. I y III
- E. I, II y III

Formular estrategias para comparar y representar en la recta numérica números racionales. (Lecciones 3 y 4).

4 ¿En cuál de las siguientes relaciones se da un orden INCORRECTO de números decimales?

- A. $1,4\bar{1} > 1,4\bar{1} > 1,41$
- B. $2,308 < 2,\bar{3} < 2,38$
- C. $6,13 > 6,\bar{13} > 6,\bar{13}$
- D. $0,5\bar{4} < 5,4 < 5,\bar{4}$
- E. $25,\bar{6} > 25,6 > 25,\bar{56}$

5 Si a es un número racional menor que -1 , ¿cuál es la relación correcta entre las fracciones?

$$p = \frac{3}{a}, t = \frac{3}{a-1}, r = \frac{3}{a+1}$$

- A. $p < t < r$
- B. $r < p < t$
- C. $t < r < p$
- D. $r < t < p$
- E. $p < r < t$

6 ¿Cuál de las siguientes comparaciones entre números racionales es INCORRECTA?

- A. $\frac{2}{3} < \frac{3}{2}$
- B. $\frac{2}{3} = 0,6\bar{6}$
- C. $0,6\bar{6} > 0,6\bar{1}$
- D. $-\frac{4}{3} < -\frac{13}{9}$
- E. $0,3\bar{6} = \frac{11}{30}$

Resolver problemas utilizando operatoria en los números racionales. (Lecciones 5, 6 y 7)

7 ¿Cuál es el promedio entre los siguientes datos:

$$\frac{2}{3}; 0,6; 0,6\bar{5}?$$

- A. $0,6$
- B. $1,9\bar{2}$
- C. $0,640\bar{7}$
- D. $\frac{173}{90}$
- E. Ninguna de las anteriores.

8 El resultado de $3,5\bar{1} - \left(\frac{2}{6} : \frac{9}{6}\right)$ es:

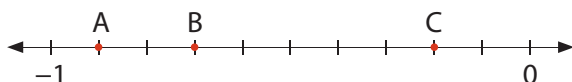
- A. $\frac{3}{45}$
- B. $\frac{11}{15}$
- C. $\frac{13}{45}$
- D. $3\frac{13}{45}$
- E. $3\frac{11}{15}$

- 9** Una familia donó $\frac{1}{3}$ de su dinero ahorrado a una fundación A. De lo que quedó donó $\frac{1}{3}$ a la fundación B y por último, $\frac{1}{3}$ del dinero restante lo destinó a una fundación C. Si la familia tenía ahorrados \$450 000, ¿con cuánto dinero quedó?
- A. \$5556 C. \$33 333 E. \$133 333
B. \$16 667 D. \$66 667

Conjeturar acerca de las propiedades de los números racionales. (Lecciones 8 y 9)

- 10** Se define la operación $c \odot d = \frac{2c+d}{d}$, donde c y d son números racionales y $d \neq 0$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es FALSA con respecto a esta operación?
- A. El resultado de la operación puede ser natural.
B. El resultado de la operación puede ser entero.
C. Los resultados siempre serán números racionales.
D. c y d pueden ser números decimales.
E. c y d pueden ser números enteros.

- 11** Con respecto a la recta numérica, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es VERDADERA?



- A. Existen infinitos números racionales entre A y C.
B. Entre -1 y 0 existen solo tres números racionales.
C. Existe un solo número decimal entre A y B.
D. B es un número racional mayor que C y menor que A.
E. Existen infinitos números racionales con hasta una cifra decimal entre B y C.

Comprender las potencias de base racional y exponente entero y utilizar sus propiedades (Lecciones 10 y 11)

- 12** En la siguiente ecuación, ¿cuál es el valor de x ?

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{9}{4}\right)^x$$

- A. 1 C. -1 E. $-\frac{1}{2}$
B. -2 D. $\frac{1}{2}$

- 13** ¿En cuál de las siguientes potencias su valor es un número racional negativo?

- A. $\left(\left(\frac{25}{5}\right)^{-1}\right)^{-2}$ C. $\left(\frac{225^{-1}}{15^{-1}}\right)^{-1}$ E. $\left(\frac{4^4}{8^{-1}}\right)$
B. $(-2)^{(-3)^2}$ D. $\left(\frac{1}{2^{-1}}\right)^{-1}$

Resolver problemas que involucran números racionales y potencias. (Lección 12)

- 14** ¿Cuál es el resultado de $\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4}{\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}}$?

- A. $\frac{1}{9}$ C. 9 E. $-\left(\frac{1}{3^2}\right)$
B. $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-8}$ D. $\frac{1}{6}$

- 15** El volumen de un cono se calcula mediante la expresión $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$ donde r es el radio de la base del cono y h es su altura. ¿Cuál es el volumen de un cono cuyo radio mide $1, \overline{1}$ cm y su altura mide $\frac{8}{3}$ cm?

- A. $\frac{800}{81} \pi \text{ cm}^3$ C. $\frac{88}{81} \pi \text{ cm}^3$ E. $\frac{8}{9} \pi \text{ cm}^3$
B. $\frac{800}{729} \pi \text{ cm}^3$ D. $\frac{44}{45} \pi \text{ cm}^3$

- 16** Una deportista de alto rendimiento se está preparando para una prueba de nado. Para esto, ella implementa la siguiente rutina: Durante la primera semana nada 500 m diarios y cada nueva semana nada los $\frac{4}{3}$ de lo recorrido diariamente la semana anterior. ¿Cuál es la expresión que permite calcular los metros de nado en una semana?

- A. $\left(\frac{4}{3}\right)^s \cdot 500$ C. $\frac{4}{3} \cdot 500^s$ E. $\frac{4 \cdot 500}{3^s}$
B. $\left(\frac{4}{3}\right)^{s-1} \cdot 500$ D. $\frac{(4 \cdot 500)^s}{3}$

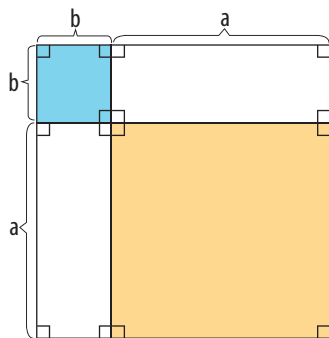


Multiplicar expresiones algebraicas. (Lecciones 13, 14, 15 y 16)

17 ¿Cuál es el producto de $(x - 3)(x^2 + 2x - 5)$?

- A. $-x^3 + x^2 - 11x + 15$
- B. $x^3 + x^2 - 11x + 30$
- C. $x^3 - x^2 - 11x + 15$
- D. $x^3 - x^2 - 11x - 15$
- E. $x^3 + x^2 - 11x - 15$

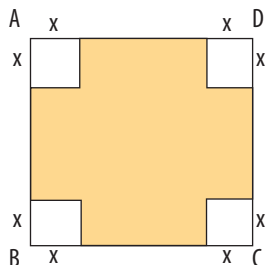
18 Se sabe que **a** y **b** son números enteros positivos y $a > b$. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) VERDADERA(S)?



- I. El área del cuadrado de lado $(a + b)$ es igual al área pintada de amarillo.
- II. $(a + b)(a - b)$ es igual a la diferencia de las áreas del cuadrado de lado **a** y del de lado **b**.
- III. $a(a + b) > a^2 + b^2$

- A. Solo I.
- B. Solo II.
- C. Solo I y III.
- D. Solo II y III.
- E. I, II y III.

19 El cuadrado ABCD, de lado 8 cm, tiene en sus esquinas cuatro cuadrados de lado x cm cada uno. ¿Cuál es el área sombreada?



- A. $(8 - x) \text{ cm}^2$
- B. $(64 - 4x^2) \text{ cm}^2$
- C. $(64 - x^2) \text{ cm}^2$
- D. $(8 - x^2) \text{ cm}^2$
- E. $(8 - 2x)^2 \text{ cm}^2$

20 ¿Qué expresión se obtiene al resolver $(a + x)^2 - x^2$?

- A. $a(a + 2x)$
- B. $a^2 - 2x$
- C. $2xa - x$
- D. $a^2 - 2ax$
- E. Ninguna de las anteriores.

Factorizar expresiones algebraicas. (Lección 17)

21 ¿Cuál es el mínimo común múltiplo entre $x^2 + 10x + 25$ y $x^2 + 12x + 35$?

- A. $(x + 5)^2(x + 7)$
- B. $(x + 5)(x + 7)^2$
- C. $(x - 5)(x + 7)^2$
- D. $(x + 5)(x - 7)^2$
- E. Ninguna de las anteriores.

22 ¿Cuál de las siguientes alternativas es equivalente a la expresión $8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$?

- A. $(a + b)^3$
- B. $(2a - 3b)^3$
- C. $(a + b)^2$
- D. $(a^2 - b^2)^3$
- E. Ninguna de las anteriores.

Resolver ecuaciones lineales y literales y analizar las restricciones de las soluciones. (Lecciones 18, 19 y 20)

23 ¿Cuál es la solución de la ecuación

$$2p - \frac{5}{4} + p + \frac{4}{3} = \frac{1}{12}?$$

- A. 0
- B. $\frac{8}{3}$
- C. $\frac{4}{9}$
- D. $\frac{10}{11}$
- E. $\frac{1}{18}$

24 ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones tienen igual solución?

- I. $\frac{x}{3} + \frac{1}{2} = 6$
- II. $2x + 3 = 36x$
- III. $0,2 = \frac{3,3}{x}$

- A. Solo I y II.
- B. Solo II y III.
- C. Solo I y III.
- D. I, II y III.
- E. Ninguna de las anteriores.

25 El valor de y en la ecuación $a - 2y = 1 - y$ es:

- A. $y = 0$ C. $y = -a$ E. $y = a - 1$
 B. $y = 1$ D. $y = 1 + a$

26 Si $a \neq 0$ y $z \neq 0$, ¿cuál es el valor de z en la ecuación $az + 3 = 7$?

- A. $z = 4$
 B. $z = \frac{4}{a}$
 C. $z = \frac{10}{a}$
 D. $z = -\frac{4}{a}$
 E. $z = -\frac{10}{a}$

27 El volumen (V) de un cilindro se calcula mediante la fórmula:

$$V = \pi r^2 h$$

Si el volumen de un cilindro es $45\pi \text{ cm}^3$ y $r = 3 \text{ cm}$, ¿cuál es el valor de h ?

- A. 5 cm
 B. 7,5 cm
 C. 15 cm
 D. 42 cm
 E. Ninguna de las anteriores.

28 La ecuación de movimiento rectilíneo uniforme (S) es:

$$S = S_0 + v \cdot t$$

Si $S = 6 \text{ m}$, ¿cuál fórmula permite calcular el valor de v ?

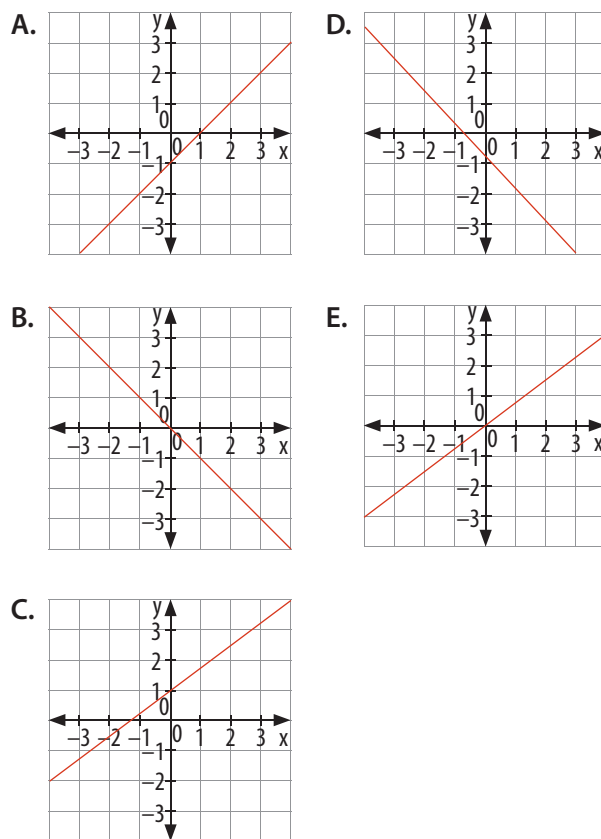
- A. $v = (6 - S_0 - t)$
 B. $v = \left(\frac{6 + S_0}{t} \right)$
 C. $v = \left(\frac{6 - S_0}{t} \right)$
 D. $v = \left(\frac{6 - S_0}{-t} \right)$
 E. $v = -\left(\frac{6 - S_0}{t} \right)$

Reconocer una función lineal y afín y analizar su gráfica al variar sus parámetros. (Lecciones 21, 22, 23 y 24)

29 Si $f(x) = ax + b$, ¿cuál es el valor de $f(-1) + f(1)$?

- A. b C. $2b$ E. $a + b$
 B. $2a$ D. $a - b$

30 ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a una función afín con $m > 0$ y $n < 0$?



31 ¿Cuál(es) de la(s) siguiente(s) afirmación(es) es(son) VERDADERA(S) con respecto a las funciones $f(a) = -a$ y $g(a) = 9a - 2$?

- I. $(f \circ g)(a) = (g \circ f)(a)$
 II. $(f \circ g)(-2) = 20$
 III. $g \circ (f \circ g)(0) = (g \circ f) \circ g(0) = 20$

- A. Solo I.
 B. Solo II.
 C. I y II.
 D. II y III.
 E. I y III.



Geometría

Ideas previas

La imagen muestra el Proyecto de DomoChile en la Antártica chilena. Esta estructura tiene la forma de un domo geodésico que se diseña a partir de un poliedro denominado icosaedro que está constituido por 20 triángulos equiláteros. Cuantas más divisiones se le aplican a estos triángulos entran en juego más aristas y conectores en su composición, resultando uno más esférico.

- ¿Qué transformaciones isométricas puedes identificar?

Palabras clave

- ⇒ Plano cartesiano
- ⇒ Vector
- ⇒ Transformaciones isométricas
- ⇒ Congruencia





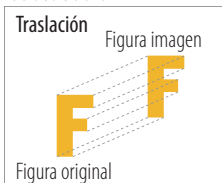
domoChil

Proyecto DomoChile, Antártica.
Fuente: <http://www.domochile.com>

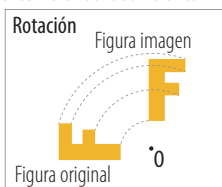


Identificar y caracterizar transformaciones isométricas en el plano.

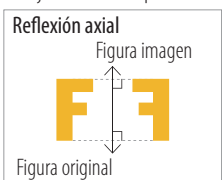
La **traslación** es una transformación isométrica que corresponde al movimiento de una figura en una dirección, en un sentido y en una magnitud dada. Dicha dirección, sentido y magnitud de desplazamiento están representados por un vector de traslación.



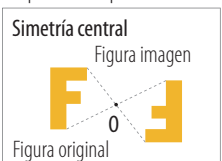
La **rotación** es una transformación en el plano que consiste en girar todos los puntos de una figura en torno a un punto O fijo llamado centro de rotación, en una medida angular α llamado ángulo de rotación, tal que cada punto gira siguiendo un arco de circunferencia con centro O y $\angle \alpha$. Recuerda que si el ángulo de rotación es positivo, el giro se realiza en sentido antihorario y si es negativo, el giro se realiza en sentido horario.



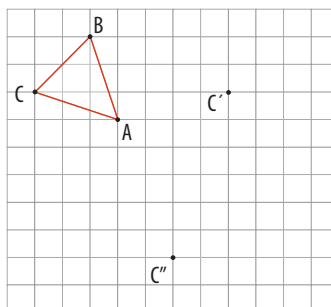
La **reflexión axial** es una transformación isométrica en la que a cada punto de la figura original se le asocia otro punto que está a igual distancia de la recta llamada eje de simetría y el segmento que une ambos puntos es perpendicular al eje. Dos figuras planas se dirán simétricas si hay un eje de simetría que las refleje.



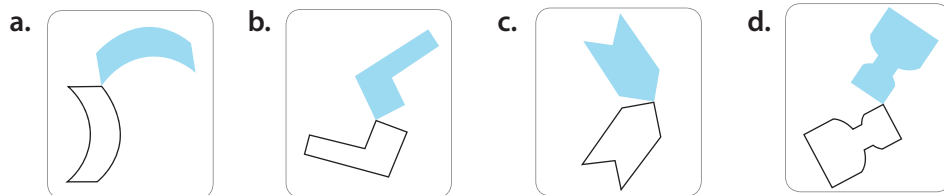
La **simetría central** o puntual es una transformación isométrica en la que a cada punto de la figura original se le asocia otro, tal que el centro de reflexión (O) es el punto medio del segmento formado por los dos puntos.



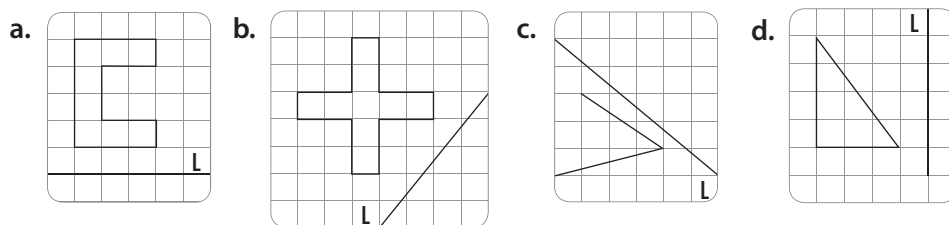
1 Traslada el triángulo de acuerdo con cada imagen del vértice C .



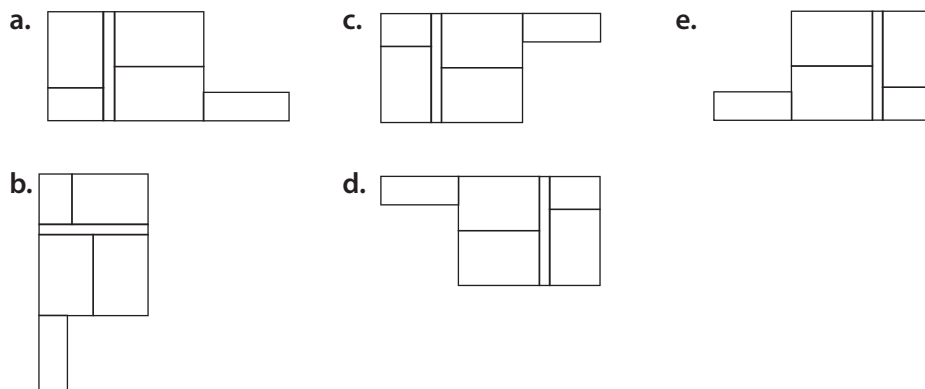
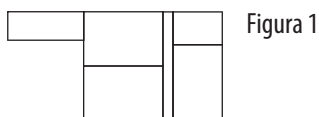
2 Identifica el centro y el ángulo de rotación por el cual fue rotada cada figura celeste resultando cada figura blanca.



3 Refleja en tu cuaderno las siguientes figuras en torno a la recta L .



4 Identifica la transformación isométrica que se aplicó a la figura 1 para obtener las imágenes que se muestran.



Los **polígonos** se pueden clasificar según el número de lados que posean o según las características de sus lados y ángulos.

Los **triángulos** se pueden clasificar según la medida de sus lados (equilátero, escaleno e isósceles) y según la medida de sus ángulos (agudo, obtuso y rectángulo).

Los **cuadriláteros** convexos se pueden clasificar de acuerdo con el paralelismo de sus lados (paralelogramos, trapecios y trapecoides).

Caracterizar polígonos y sus elementos.

5 Identifica tres características de los siguientes polígonos.

- | | |
|-----------------------|-----------------------------------|
| a. Dodecágono regular | d. Triángulo equilátero |
| b. Rombo | e. Hexágono regular |
| c. Trapecio isósceles | f. Triángulo rectángulo isósceles |

6 Identifica un polígono que cumpla las características que se indican.

- Polígono ABC, cuyos lados $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$ miden lo mismo.
- Polígono ABCD, cuyos lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ miden lo mismo.
- Polígono XYZW, tiene todos sus lados de diferente medida.
- Polígono TRS, cuyo ángulo RST es rectángulo y sus lados tienen distinta medida.
- Polígono ABCDE, cuyos ángulos interiores tienen la misma medida.

Realizar composición de funciones.

Sean **f** y **g** dos funciones tal que, $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$, entonces la **función compuesta** $g \circ f: A \rightarrow C$ se define como: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. También se puede leer "g compuesta con f".

7 Calcula las siguientes composiciones a partir de las funciones:

$$f(x) = 3x; g(x) = x + 1; h(x) = 2x - 4; i(x) = -3x.$$

- | | | |
|-----------------------------|---------------------------------------|-----------------------------|
| a. $f \circ g(x)$ | d. $h \circ i(x)$ | g. $f \circ (g \circ h)(x)$ |
| b. $g \circ h(x)$ | e. $i \circ f(x)$ | h. $g \circ (h \circ i)(x)$ |
| c. $i \circ (i \circ i)(x)$ | f. $f \circ (g \circ (h \circ i))(x)$ | i. $h \circ (g \circ i)(x)$ |

8 Evalúa si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F) respecto del ejercicio anterior. Justifica las falsas.

- | | |
|--|--|
| a. $f \circ i(x) = i \circ f(x)$ | d. $f \circ f(x) = i \circ i(x)$ |
| b. $g \circ (i \circ f)(x) = g \circ (f \circ i)(x)$ | e. $h \circ h(x) = h(x)$ |
| c. $g \circ (h \circ f)(x) = g \circ (f \circ h)(x)$ | f. $(g \circ g) \circ (h \circ h)(x) = (h \circ h) \circ (g \circ g)(x)$ |

Resolver problemas que involucren el cálculo de las medidas de ángulos y lados en polígonos, y las transformaciones isométricas.

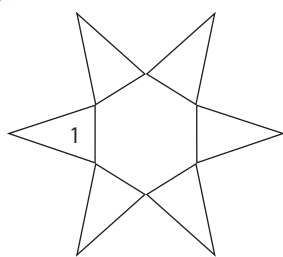


Figura 1

9 Resuelve los siguientes problemas.

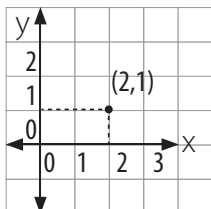
- ¿Qué dígitos tienen ejes de simetría?
- ¿Qué transformaciones isométricas se aplicaron a la figura 1 para obtener la estrella?
- ¿Cuál es la medida de un ángulo interior de un polígono regular de 5 lados? ¿Y de 6 lados?
- ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde un vértice en un hexágono regular?
- ¿Cuántas diagonales en total se pueden trazar en un octógono regular?
- Si el lado de un polígono regular de 9 lados mide 30 cm, ¿cuál es su perímetro en metros?
- Un invernadero tiene forma pentagonal. Si Carlos quiere unir con canales de regadío todas las esquinas opuestas del invernadero, ¿cuántos canales debiera unir?
- Elisa quiere implementar un sistema eléctrico en su patio que tiene forma de un hexágono regular y debe rodear 4 veces el contorno de este con un cable. Si la longitud de una esquina a otra esquina consecutiva es de 3 m, ¿cuántos metros de cable necesitará para instalar el sistema?

Palabras clave

➔ Plano cartesiano.

Repasa

Un **par ordenado** se denota por (x, y) , donde x corresponde al valor de la abscisa y y es el valor de la ordenada del gráfico. Ejemplo: $(2, 1)$ en un gráfico se representa así:



¿Qué es el plano cartesiano? ¿Cómo representar figuras en él?

- Si dibujaras un punto A sobre una hoja de papel blanco, ¿qué indicaciones podrías dar a un compañero para ubicar el punto dibujado? ¿Cuáles serían tus puntos de referencia?

Antonia invitó a Felipe a su casa para realizar un trabajo de ciencias. Para indicarle cómo llegar, le dijo:

- Podemos encontrarnos en el bazar y comprar los materiales, y para eso, desde el paradero debes caminar 3 cuadras hacia el este y dos hacia el norte.
- O bien, puedes venir directo a mi casa. Desde el paradero camina 4 cuadras hacia el oeste y 3 hacia el sur.

Felipe, un poco confundido, le dijo: ¿Por qué no haces un mapa?

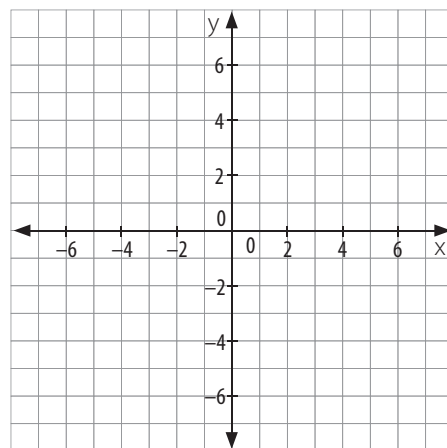
¿De qué forma podría representar Antonia las posiciones de los lugares que pueden servir de referencia a Felipe?

Antonia podría construir un sistema de coordenadas como el **plano cartesiano**, para ello puede seguir los pasos siguientes:

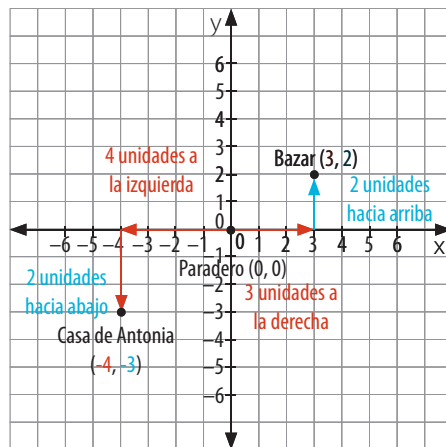
Paso 1 Trazar dos **rectas numéricas** perpendiculares. La recta horizontal será eje **X** o eje de las **abscisas**; y la recta vertical, eje **Y** o eje de las **ordenadas**. El punto de intersección de las rectas corresponde al **origen** del plano y tiene las coordenadas **(0, 0)**.

Paso 2 Para ubicar puntos en el plano se utiliza un **par ordenado** (x, y) que corresponden a sus coordenadas. Por ejemplo, el punto $(4, 2)$ se ubica 4 unidades hacia la derecha desde el origen y 2 unidades hacia arriba.

Paso 3 Para representar en el plano cartesiano figuras como polígonos o circunferencias, se ubican los puntos que corresponden a los vértices de la figura y luego se unen para formarlas.



En la situación de Antonia, al ubicar el paradero en el origen del plano cartesiano, las indicaciones este, oeste, norte y sur corresponderían a la derecha, a la izquierda, arriba y abajo, respectivamente. Por lo tanto, el bazar se encontraría en el punto $(3, 2)$ y la casa de Antonia en el punto $(-4, -3)$.



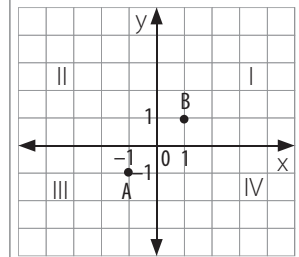
Razona y comenta

- ¿Qué se forma al unir mediante una línea recta los puntos $(3, 2)$ y $(-4, -3)$?
- Si ubicaras el punto $(-4, 2)$, ¿qué figura se formaría al unirlo con los puntos anteriores?

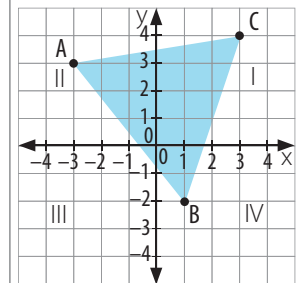
En resumen

El **plano cartesiano** es un sistema de coordenadas formado por dos rectas numéricas que se intersectan perpendicularmente, dividiendo el plano en cuatro **cuadrantes**. El eje horizontal recibe el nombre de eje **X** o de las abscisas. El eje vertical recibe el nombre de eje **Y** o de las ordenadas. El punto de intersección de los ejes recibe el nombre de origen $O(0,0)$. En el punto (x, y) , **x** (primera coordenada) corresponde a los valores de las abscisas e **y** (segunda coordenada) al de las ordenadas. Para representar una **figura** en el plano cartesiano se ubican en él las coordenadas de sus vértices. En el caso de un **segmento** pueden ubicarse las coordenadas de sus puntos extremos.

Observa



Por ejemplo, el punto A está en el cuadrante III y tiene coordenadas $(-1, -1)$. Mientras que el punto B, que está en el cuadrante I, tiene por coordenadas $(1, 1)$.

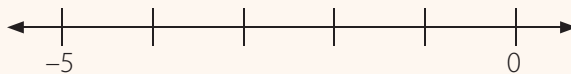


El triángulo tiene vértices $A(-3, 3)$, $B(1, -2)$ y $C(3, 4)$.

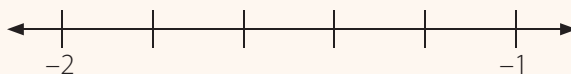
Repaso

1. **Ubica** los siguientes números en la recta numérica.

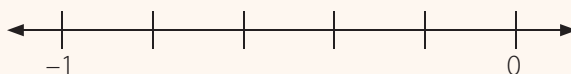
a) -3



b) $-\frac{3}{2}$



c) $-0,3$



Práctica guiada

2. **Identifica** a qué cuadrante del plano cartesiano pertenecen los siguientes pares ordenados.

$A(5, -7)$ pertenece al IV cuadrante.

a) $A(-3, -8)$

f) $F(3, 9)$

b) $B(9, -6)$

g) $G(-6, -7)$

c) $C(-8, -1)$

h) $H(5, -1)$

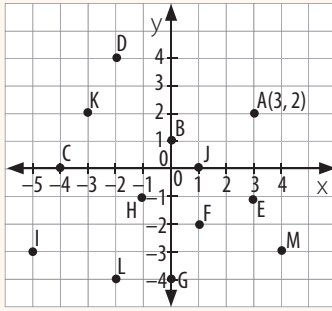
d) $D(-7, 2)$

i) $I\left(-1\frac{3}{4}, -6\right)$

e) $E(5, -11)$

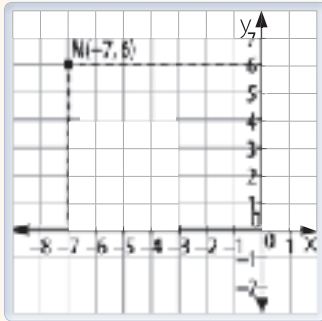
j) $J\left(-\frac{1}{8}; 1,025\right)$

3. **Identifica** las coordenadas de los puntos ubicados en el plano cartesiano.



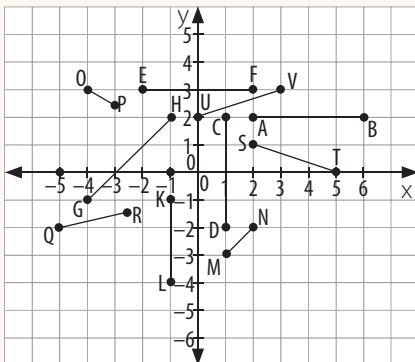
- | | | | |
|------|------|------|------|
| a) B | d) E | g) H | j) K |
| b) C | e) F | h) I | k) L |
| c) D | f) G | i) J | l) M |

4. **Construye** un plano cartesiano en tu cuaderno y ubica los siguientes puntos en él.



- | | | |
|-------------|--------------|-------------------|
| a) A(2, 6) | e) E(-9, -2) | i) I(0, 9) |
| b) B(1, 10) | f) F(0, -5) | j) J(-6, -5) |
| c) C(-3, 0) | g) G(8, -1) | k) K(-3/4, 2/5) |
| d) D(-6, 5) | h) H(0, -3) | l) L(-2, 25; 1/3) |

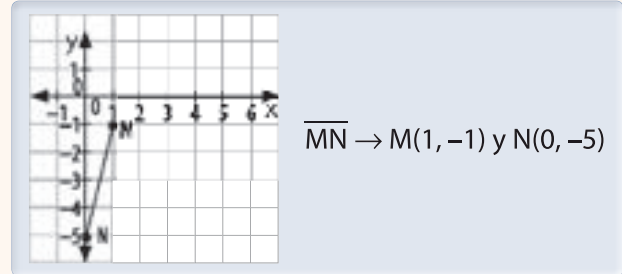
5. **Identifica** los vértices de los segmentos dibujados en el plano cartesiano.



$\overline{AB} \rightarrow A(2, 2) \text{ y } B(6, 2)$

- | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|
| a) $\overline{CD}$ | d) $\overline{KL}$ | g) $\overline{OP}$ |
| b) $\overline{EF}$ | e) $\overline{MN}$ | h) $\overline{QR}$ |
| c) $\overline{GH}$ | f) $\overline{ST}$ | i) $\overline{UV}$ |

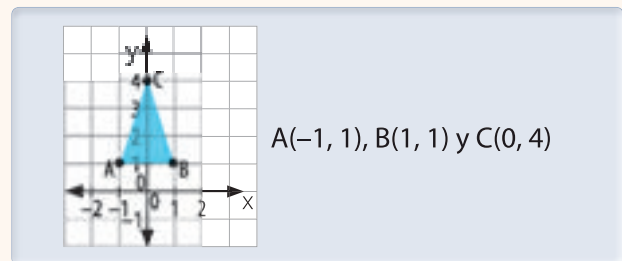
6. **Representa** los vértices de los segmentos dados y une los puntos para formarlos.



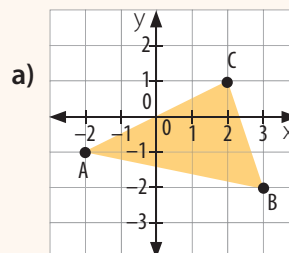
$\overline{MN} \rightarrow M(1, -1) \text{ y } N(0, -5)$

- | |
|--|
| a) $\overline{AB} \rightarrow A(-2, 3) \text{ y } B(-5, 4)$ |
| b) $\overline{CD} \rightarrow C(6, -1) \text{ y } D(-4, -2)$ |
| c) $\overline{EF} \rightarrow E(3, -4) \text{ y } F(0, 0)$ |
| d) $\overline{GH} \rightarrow G(0, 3) \text{ y } H(5, 0)$ |
| e) $\overline{IJ} \rightarrow I(-3, 5; 4, 5) \text{ y } J(3, 5; 4, 5)$ |
| f) $\overline{KL} \rightarrow K(-2, 25; 1) \text{ y } L(-11/2, -3)$ |

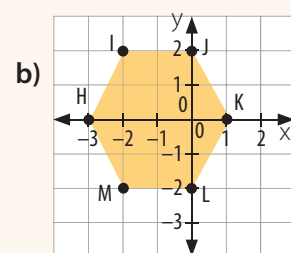
7. **Identifica** los vértices de las figuras dibujadas en cada plano cartesiano.



A(-1, 1), B(1, 1) y C(0, 4)



a)



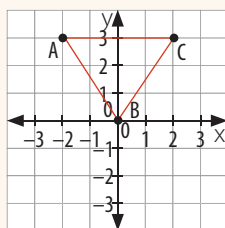
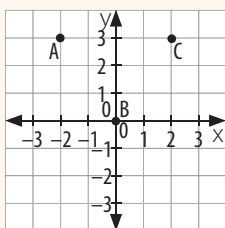
b)

Aplico

8. Utilizando GeoGebra **aplica** los pasos para representar polígonos en el plano cartesiano.

Paso 1 Configura el área del programa para que se vea el plano cartesiano. Para esto, presiona **Cuadrícula** desde el menú **Vista**.

Paso 2 Presiona **A** y mueve el cursor sobre el área de trabajo. Aparecerá una señal + y las coordenadas del punto donde esté esta señal. Para seleccionar un punto, presiona el botón izquierdo del **Mouse**. En el ejemplo se han dibujado los puntos $A(-2, 3)$, $B(0, 0)$ y $C(2, 3)$.



-5

Para dibujar una figura con los puntos dibujados utiliza el botón  y haz clic en los puntos.

Paso 3 Representa los siguientes polígonos en GeoGebra y clasificalos.

- $D(0, -1)$, $E(3, -2)$ y $F(5, 0)$
 - $G(-3, -2)$, $H(-1, -1)$, $I(-1, 2)$ y $J(-3, 3)$
 - $K(-1, -1)$, $L(0, -4)$, $M(1, -1)$, $N(4, -2)$, $O(2, 1)$
 - $P(3, 4)$, $Q(0, 2)$, $R(-3, 4)$, $S(-2, 1)$, $T(-4, -2)$
9. **Identifica** las coordenadas de los siguientes puntos o figuras a partir de la información dada.
- Un paralelogramo tiene vértices en los puntos $(3, 2)$, $(1, 0)$ y $(-1, 2)$. ¿Cuáles son las coordenadas del otro vértice?
 - Si una circunferencia tiene centro en el punto $O(1, -2)$ y de radio 4 unidades, ¿qué puntos pertenecen a la circunferencia? Menciona dos.
 - Si $J(3x + 1, 5 + y)$ pertenece al origen, ¿cuál es el valor de x e y ?

Reflexiono

- ¿Qué características tienen las coordenadas de los puntos que se ubican sobre el eje de las abscisas?
- ¿Qué características tienen los puntos que se representan de la forma $(0, y)$?
- A un par ordenado, ¿le corresponde un único punto en el plano cartesiano?

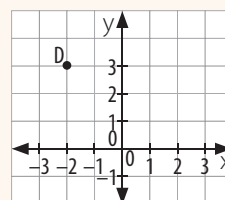
10. **Representa** las siguientes figuras en el plano cartesiano considerando que el lado de un cuadrado mide 1 cm.

- Un cuadrado con un vértice en el punto $(2, 3)$ y área 9 cm^2 .
- Un rectángulo con vértices $A(-3, 4)$ y $B(-3, 3)$, cuyo largo mida 4 cm.
- Una circunferencia con origen el punto $O(4, 3)$ y radio 2 cm.

11. **Resuelve** los siguientes problemas.

- Daniel ubicó en el plano cartesiano los puntos $A(3, 2)$; $B(4, 2)$ y $C(1, 2)$ para formar un triángulo, pero no le resultó. Jael le señala que puede arreglarlo, cambiando las coordenadas de uno de los vértices.
 - ¿Qué vértice debe cambiar de posición?
 - ¿A qué coordenadas debe reubicar ese vértice?
 - ¿Existe solo una opción? Explica.
- El profesor de Isidora escribió en la pizarra las coordenadas de cuatro vértices de un rectángulo en el plano cartesiano, pero Isidora solo alcanzó a escribir tres: $A(5, 5)$; $B(12, 5)$ y $C(12, 8)$.
 - ¿Qué coordenadas debería tener el vértice D para que se forme un rectángulo?
 - ¿Existe una única opción? Explica.

12. **Descubre el error.** Gabriela ubicó el punto $D(3, -2)$ en el plano cartesiano ¿Es correcta la ubicación de este punto?



13. **Describe el procedimiento.** Señala el procedimiento que utilizarías para determinar la circunferencia que pasa por los puntos $(4, -1)$, $(1, 2)$, $(7, 2)$.

Refuerzo

- Representa los puntos $(0, 0)$, $(3, 0)$ y $(0, 4)$. Al unir los puntos, ¿qué figura se forma?
- ¿Cuál es el área y el perímetro de la figura anterior?

Palabra clave

⇒ Vectores.

¿Qué es un vector? ¿Cómo representar vectores en el plano cartesiano?

- Si lanzaras una flecha con un arco, ¿cómo describirías su recorrido? ¿Qué características mencionarías para indicar su posición?

Pablo estaba observando una mosca cuyo movimiento lo imaginó representado en el plano cartesiano. ¿Cómo podría representar geoméricamente su trayectoria?

Pablo podría representar el desplazamiento de la mosca a través de un vector $\overline{AB}$ que se denomina vector de desplazamiento. Para ello puede seguir los pasos:

Paso 1 ▶ Identificar el punto final e inicial del desplazamiento.

Es posible visualizar que la abscisa del punto A se incrementa en 4 unidades y que su ordenada se incrementa en 2, por lo tanto, el punto inicial es (1, 2) y el final es $(1 + 4 = 5) \rightarrow (2 + 2 = 4) \rightarrow (5, 4)$.

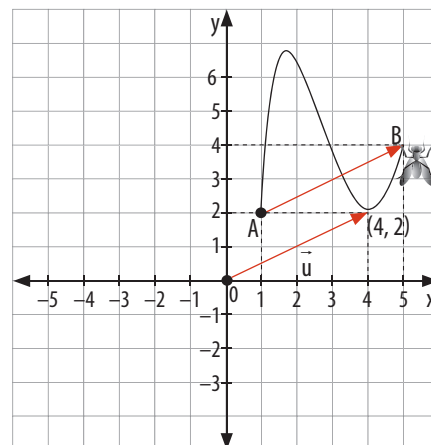
Paso 2 ▶ Determinar las coordenadas o componentes del vector de desplazamiento.

Para ello se restan las abscisas de los puntos final e inicial y luego se restan las ordenadas de los mismos.

$$\overline{AB} = (5, 4) - (1, 2) = (5 - 1, 4 - 2) = (4, 2)$$

Paso 3 ▶ Identificar el vector desplazamiento.

Es el vector $\vec{u}$, que tiene origen o inicio en el punto (0, 0) y extremo o final en (4, 2), y corresponde a $\overline{AB}$ trasladado al origen del plano cartesiano.



Razona

y comenta

- ¿Qué vector representaría el desplazamiento de la mosca desde su posición final a la inicial? ¿Qué diferencias tiene con el vector $\overline{AB}$?
- Si la mosca vuela hasta el origen y luego se desplaza al punto (4, -2), ¿cuál es el vector que representa este desplazamiento? ¿Qué diferencia tiene con $\overline{AB}$?
- Si la mosca se desplaza desde el punto (2, 1) hasta el punto (6, 3), ¿cuál es el vector de desplazamiento? ¿Qué diferencia tiene con el vector $\overline{AB}$?

En resumen

El **vector** es un segmento de recta dirigido que se caracteriza por tener magnitud o módulo, dirección y sentido. La **magnitud** es la longitud del vector, es decir, la distancia entre el inicio (cola) y el término (punta de flecha) y se denota de la forma $|\overline{AB}|$. El **sentido** está indicado por la punta flecha del vector e indica hacia donde se dirige. La **dirección** es la orientación o el ángulo que forma la recta que contiene al vector con el eje X.

Para representar vectores en el plano cartesiano se deben calcular sus componentes. Si un vector tiene como puntos extremos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, las componentes del vector $\overline{AB}$ están dadas por:

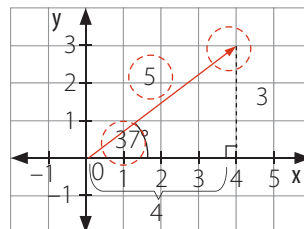
$$\overline{AB} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

En el ejemplo, el vector tiene sentido noroeste y dirección 37° con respecto al eje X. Sus componentes son $(4, 3)$ y su magnitud se calcula como se muestra a continuación:

$$\overline{AB} = (4, 3)$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

En general, si un vector $\vec{u}$ tiene componentes (u_1, u_2) su magnitud o módulo se calcula como $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

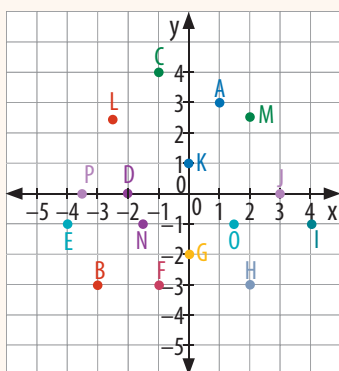


Observa

Los vectores que tienen igual magnitud, sentido y dirección, se dicen equivalentes.

Repaso

1. **Identifica** las coordenadas de los siguientes puntos.

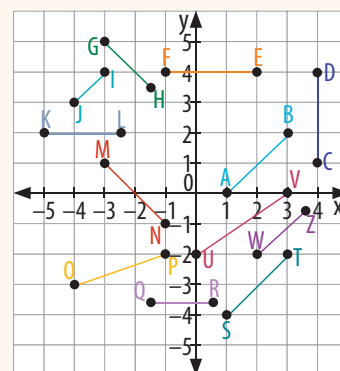


- | | | | |
|------|------|------|------|
| a) A | e) E | i) I | m) M |
| b) B | f) F | j) J | n) N |
| c) C | g) G | k) K | o) O |
| d) D | h) H | l) L | p) P |

2. **Representa** los siguientes puntos en el plano cartesiano.

- | | | |
|----------------|---------------|---------------------------------------|
| a) $A(-5, 8)$ | c) $C(6, -3)$ | e) $E(-5; 7, 6)$ |
| b) $B(-1, -2)$ | d) $D(8, 15)$ | f) $F\left(-\frac{1}{4}; 2, 9\right)$ |

3. **Identifica** los puntos extremos de cada segmento.

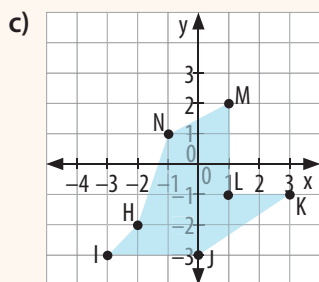
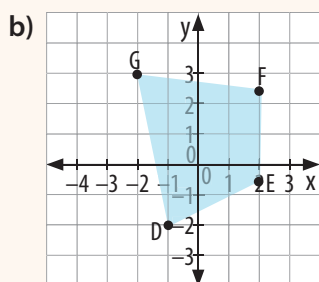
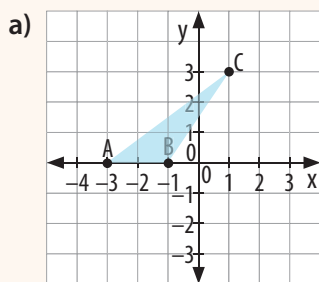


- | | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| a) $\overline{AB}$ | d) $\overline{GH}$ | g) $\overline{MN}$ | j) $\overline{ST}$ |
| b) $\overline{CD}$ | e) $\overline{IJ}$ | h) $\overline{OP}$ | k) $\overline{UV}$ |
| c) $\overline{EF}$ | f) $\overline{KL}$ | i) $\overline{QR}$ | l) $\overline{WZ}$ |

4. **Representa** los segmentos en el plano cartesiano.

- $\overline{AB}$ con $A(2, 4)$ y $B(-1, 4)$
- $\overline{MN}$ con $M(-3, -2)$ y $N(-1, 0)$
- $\overline{UV}$ con $U(0, -2, 5)$ y $V\left(3, 5; -\frac{3}{2}\right)$

5. **Identifica** las coordenadas de los vértices de cada figura.



7. **Calcula** las componentes de los siguientes vectores.

$\overrightarrow{MN}$; si $M(5, 2)$ y $N(-3, -6)$

$$\overrightarrow{MN} = N(-3, -6) - M(5, 2) = (-3 - 5, -6 - 2) = (-8, -8)$$

a) $\overrightarrow{AB}$; si $A(5, 6)$ y $B(0, 1)$.

b) $\overrightarrow{CD}$; si $C(-1, 3)$ y $D(-4, 5)$.

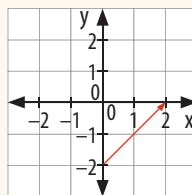
c) $\overrightarrow{EF}$; si $E(-3, -8)$ y $F(-9, -3)$

d) $\overrightarrow{GH}$; si $G(1, 1; 3)$ y $H(4, 1; 3)$.

e) $\vec{IJ}$; si $I\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ y $J\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{7}\right)$

f) $\overrightarrow{KL}$; si $K\left(\frac{1}{4}, -2\right)$ y $L(-0, 5; -3)$.

8. **Calcula** la magnitud de los siguientes vectores.



El vector tiene coordenadas (2, 2) su módulo es

$$\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

a) $\vec{u} = (4, -2)$

c) $\vec{s} = (-1, -3)$

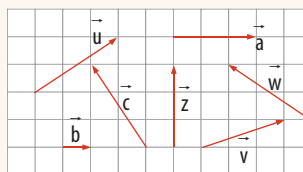
e) $\vec{m} = (0, -3)$

b) $\vec{v} = (5, 1)$

d) $\vec{t} = (-5, 4)$

f) $\vec{n} = \left(-\frac{7}{2}, 0\right)$

9. **Identifica** los vectores que cumplen las siguientes condiciones.



a) Que solo tengan igual sentido.

b) Que solo tengan igual magnitud.

c) Que tengan igual sentido y distinta magnitud.

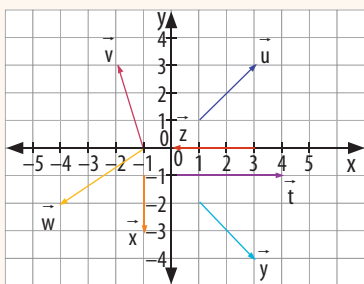
d) Que tengan igual magnitud y distinta dirección.

e) Que tengan igual dirección y sentido pero distinta magnitud.

f) Que tengan igual sentido y magnitud pero distinta dirección.

Práctica guiada

6. **Identifica** las componentes de cada vector.



$$\begin{aligned}\vec{u} &= (3, 3) - (1, 1) \\ &= (3 - 1, 3 - 1) = (2, 2)\end{aligned}$$

a) $\vec{v}$

c) $\vec{x}$

e) $\vec{z}$

b) $\vec{w}$

d) $\vec{y}$

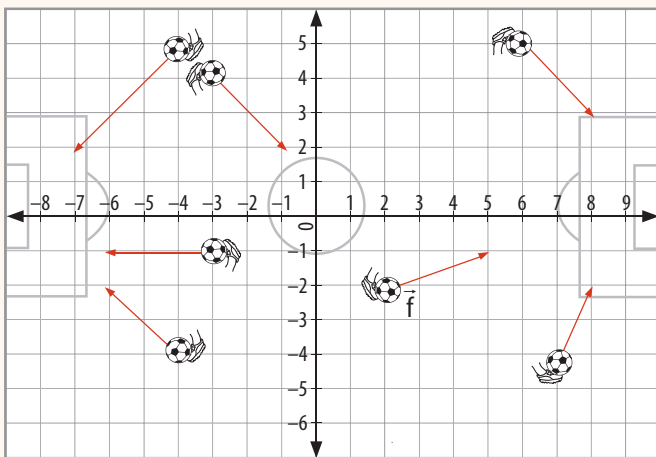
f) $\vec{t}$

- g) Que tengan igual dirección y magnitud pero distinto sentido.
- h) Que tengan distinta dirección, sentido y magnitud.

Aplico

10. Resuelve los siguientes problemas.

- a) Luego de un partido de fútbol, el entrenador del equipo perdedor ubicó la cancha en un plano cartesiano para estudiar las posibilidades de gol.

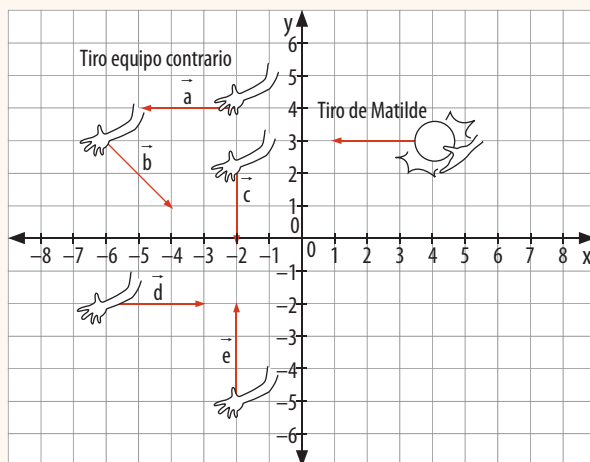


Sus conclusiones fueron las siguientes:

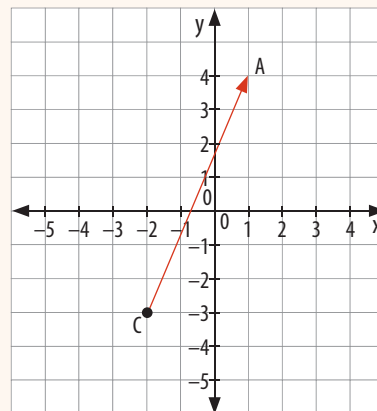
- Todos los tiros cuyos vectores tienen las componentes $(2, -2)$ y su opuesto fueron gol.
- Si el tiro según el vector $\vec{f}$ se combina con uno cuyas componentes sean $(1, 2)$, también es gol.

Observando la cancha y de acuerdo con lo anterior, ¿coincides con el entrenador? ¿Qué lanzamientos fueron gol? Justifica tu respuesta.

- b) Para poder detener la pelota de voleibol que lanzó Matilde se debe aplicar el vector opuesto a su fuerza, y para ganar el tiro se debe aplicar una fuerza cuyo vector tenga componentes de la forma $(0, y)$. ¿Cuál de los tiros permite cada una de las situaciones? Explica.



11. **Descubre el error.** La profesora de Fabián le pide que a partir del vector dibujado en plano cartesiano, indique las componentes del vector $\overline{CA}$.



Luego, Fabián hizo el siguiente procedimiento:
 $\overline{CA} = C(-2, -3) - A(1, 4) = (-2 - 1, -3 - 4) = (-3, -7)$
 ¿Cuál es el error que cometió Fabián en su procedimiento?

12. **Describe el procedimiento.** Describe paso a paso el procedimiento para calcular las componentes de un vector.
13. **Investiga.** Busca información acerca del uso de vectores en la Física.

Reflexiono

- Si dos vectores son paralelos, ¿qué relación tienen con respecto a la magnitud, dirección y sentido?
- ¿Cómo se podría cuantificar la dirección (inclinación) de un vector?

Refuerzo

1. Determina los extremos de un vector equivalente a $(1, -2)$.
2. Determina el vector opuesto a $(-3, 4)$.
3. Dibuja dos vectores que tengan igual magnitud y dirección, pero distinto sentido.

Palabras clave

- Multiplicación de un vector por un escalar.

Repasa

Un **vector** posee componentes que se representan como pares ordenados (x, y) , donde **x** corresponde a los movimientos horizontales e **y** a los verticales. Por ejemplo, el vector $(2, 1)$ representa la traslación de un objeto dos espacios a la derecha y uno hacia arriba.

¿Cómo multiplicar un vector por un escalar? ¿Cómo representar el vector resultante en el plano?

- Seguramente en Física revisaste que la fuerza con que se empuja una caja se representa por un vector. ¿Qué pasaría con dicho vector si se triplicara la fuerza con que se empuja la caja?

Matilde y Esteban están jugando a saltar sobre el diseño de un plano cartesiano. Esteban se ubica en el punto $(0, 0)$ y salta hasta el punto $(6, 3)$. Matilde realiza el mismo procedimiento y salta hasta el punto $(2, 1)$. Esteban le dice a Matilde que su salto es el triple de largo que el de ella. ¿Es cierto lo que dice Esteban?

Al multiplicar por tres el vector que representa la traslación de Matilde y ver si el resultado coincide con el vector que representa el salto de Esteban, podemos verificar si lo que dice él es cierto. Para hacerlo puede seguir los siguientes pasos:

Paso 1 ➤ Identificar las componentes del vector.

Como Matilde estaba en el punto $(0, 0)$ y llegó hasta el punto $(2, 1)$ las componentes de su vector son $(2, 1)$.

Paso 2 ➤ Multiplicar la componente **x** y la componente **y** del vector por el escalar que se indique.

$$3(x, y) = (3 \cdot 2, 3 \cdot 1) = (6, 3)$$

Al multiplicar la componente y del vector, que es 1, por el escalar 3, se obtiene 3.

Al multiplicar la componente x del vector, que es 2, por el escalar 3, se obtiene 6.

Observa

Un escalar **k** es una cantidad perteneciente al conjunto de los números reales que carece de dirección y sentido.

Links

Para profundizar en la multiplicación de un vector por un escalar visita:

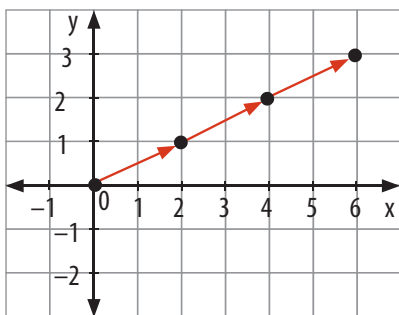
<http://goo.gl/mVMGI>



De esta forma se obtiene un nuevo vector $(6, 3)$ con la misma dirección que el original, pero con diferente magnitud.

De esta forma, al triplicar el vector que representaba el salto de Matilde se obtiene otro vector cuyas componentes son $(6, 3)$ y que corresponde al vector que representa el salto de Esteban, de modo que él estaba en lo correcto.

Esteban también podría haber graficado la situación en el mismo plano cartesiano sobre el que saltaban, de la siguiente manera.



Representación del vector de salto de Matilde repetido 3 veces, es decir: $3(2, 1) = (3 \cdot 2, 3 \cdot 1) = (6, 3)$

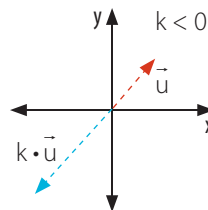
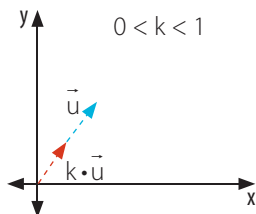
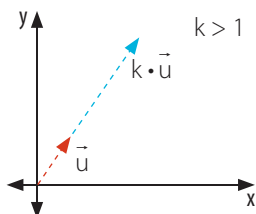
En resumen

Para multiplicar un vector $\vec{u} = (u_1, u_2)$ por un escalar k , se obtiene el producto $k \cdot \vec{u}$ y se calcula de la siguiente forma:

$$k \cdot \vec{u} = (k \cdot u_1, k \cdot u_2)$$

Al representar el vector resultante en el plano cartesiano se tiene que:

- Si $k > 1$, el vector $k \cdot \vec{u}$ tendrá igual dirección y sentido que $\vec{u}$, pero con una magnitud mayor a este vector.
- Si $0 < k < 1$, el vector $k \cdot \vec{u}$ tendrá igual dirección y sentido que $\vec{u}$, pero con una magnitud menor a este vector.
- Si $k < 0$, el vector $k \cdot \vec{u}$ tendrá sentido contrario.



Razona y comenta

- ¿Qué características tendría el vector que resulta de multiplicar un vector por un escalar negativo?
- ¿Qué sucedería con la magnitud de un vector si se multiplica por $\frac{1}{2}$?
- ¿Qué sucedería con un vector si se multiplica por cero?

Repaso

1. **Representa** los siguientes vectores en el plano cartesiano.

- | | |
|-------------------------|---|
| a) $\vec{d} = (4, -3)$ | h) $\vec{c} = (0, -1)$ |
| b) $\vec{e} = (2, 0)$ | i) $\vec{z} = (0, -3, 5)$ |
| c) $\vec{k} = (0, -3)$ | j) $\vec{b} = (1, 5, -9)$ |
| d) $\vec{j} = (-2, 5)$ | k) $\vec{f} = (-2, -0, 5)$ |
| e) $\vec{a} = (3, 9)$ | l) $\vec{h} = \left(2, 5, -\frac{3}{2}\right)$ |
| f) $\vec{g} = (-3, -3)$ | m) $\vec{p} = \left(\frac{1}{5}, 2\right)$ |
| g) $\vec{i} = (-5, -2)$ | n) $\vec{r} = \left(\frac{1}{4}, -\frac{5}{2}\right)$ |

Práctica guiada

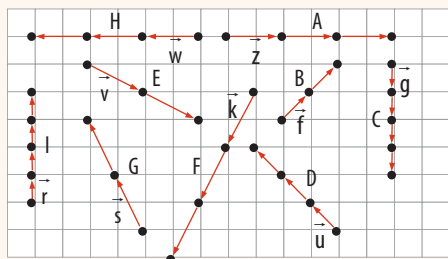
2. **Identifica** los cambios que se producen en el vector $\vec{n} = (2, 3)$ al multiplicarse por los siguientes escalares.

$$0,8 \rightarrow 0,8 \cdot (2, 3) = (0,8 \cdot 2; 0,8 \cdot 3) = (1,6; 2,4)$$

Al multiplicarlo por el escalar 0,8; el vector $\vec{n} = (2, 3)$ cambia sus componentes a $\vec{n}' = (1,6; 2,4)$

- | | | |
|-------|--------|-------------------|
| a) 2 | e) 5 | i) 0,6 |
| b) 0 | f) 10 | j) -1,5 |
| c) -2 | g) -4 | k) $\frac{2}{5}$ |
| d) 1 | h) -12 | l) $-\frac{1}{3}$ |

3. **Identifica** la multiplicación representada en el plano cartesiano por los siguientes vectores.



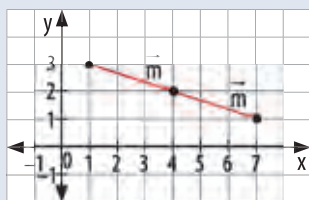
$$A \rightarrow 3\vec{z}$$

- a) B c) D e) F g) H
b) C d) E f) G h) I

- ¿Existe una sola respuesta en cada caso? Coméntalo con tus compañeros y compañeras.

4. **Representa** en el plano cartesiano las siguientes multiplicaciones de un vector por un escalar considerando $\vec{m} = (3, -1)$, $\vec{n} = (0, 2)$ y $\vec{p} = (-1, -1)$.

$$2\vec{m} \rightarrow$$



- a) $3\vec{m}$ d) $3\vec{n}$ g) $-1\vec{p}$
b) $0\vec{m}$ e) $-2\vec{n}$ h) $0,5\vec{p}$
c) $\frac{1}{3}\vec{m}$ f) $\frac{3}{2}\vec{n}$ i) $-\frac{1}{2}\vec{m}$

5. **Calcula** el vector resultante considerando

$$\vec{w} = (4, 6), \vec{y} = (1, -3), \vec{z} = (0, 3; 0) \text{ y } \vec{v} = \left(\frac{1}{2}, -2\right).$$

$$3\vec{v} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}, -2\right) = \left(\frac{3}{2}, -6\right)$$

- a) $5\vec{w}$ d) $6\vec{y}$ g) $-2\vec{z}$
b) $0\vec{v}$ e) $\frac{1}{2}\vec{v}$ h) $-0,3\vec{z}$
c) $-1\vec{y}$ f) $2,1\vec{w}$ i) $-0,1\vec{v}$

6. **Identifica** el vector original de acuerdo con los datos que se entregan a continuación.

El vector resultante es $\vec{f} = (0, 10)$ y el escalar por el que se multiplicó es $2 \rightarrow \vec{g} = \frac{\vec{f}}{2} = \frac{(0, 10)}{2} = (0, 5)$

- a) El vector resultante es $\vec{h} = (6, 9)$ y el escalar por el que se multiplicó es 3.
b) El vector resultante es $\vec{i} = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ y el escalar por el que se multiplicó es $\frac{1}{6}$.
c) El vector resultante es $\vec{j} = (-12, 0)$ y el escalar por el que se multiplicó es 4.
d) El vector resultante es $\vec{k} = \left(-1, 2; \frac{1}{2}\right)$ y el escalar por el que se multiplicó es $-\frac{1}{2}$.

7. **Identifica** el escalar por el que se multiplicó cada vector.

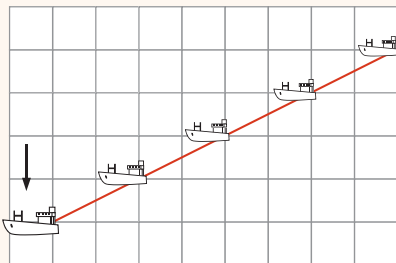
El vector original es $\vec{d} = (1, 3)$ y se obtuvo el vector $\vec{e} = (3, 9) \rightarrow \vec{d} \cdot k = \vec{e} \rightarrow (1, 3) \cdot k = (3, 9) \rightarrow k = 3$

- a) El vector original es $\vec{f} = \left(-4, \frac{1}{2}\right)$ y se obtuvo el vector $\vec{g} = (-2, 1)$.
b) El vector original es $\vec{h} = (3, -2)$ y se obtuvo el vector $\vec{e} = \left(\frac{3}{2}, -1\right)$.
c) El vector original es $\vec{j} = (16, -4)$ y se obtuvo el vector $\vec{k} = (4, -1)$.
d) El vector original es $\vec{l} = (20, 10)$ y se obtuvo el vector $\vec{m} = (-2, -1)$.
e) El vector original es $\vec{n} = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ y se obtuvo el vector $\vec{o} = \left(5, \frac{1}{2}\right)$.
f) El vector original es $\vec{p} = (-8, 2)$ y se obtuvo el vector $\vec{q} = \left(1, -\frac{1}{4}\right)$.

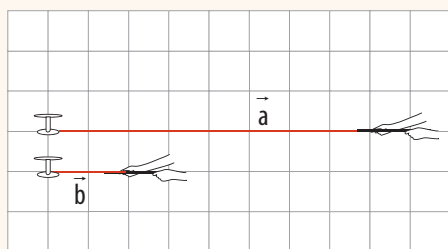
Aplico

8. Resuelve los siguientes problemas.

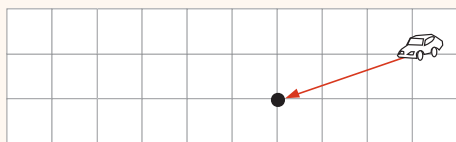
- a) Un barco va a la deriva y el radar que lo detectó observó las siguientes señales de su desplazamiento.



- ¿Cómo expresarías su desplazamiento?
 - ¿Cuál sería el vector que traslada directamente al barco desde el inicio hasta el fin de la imagen?
- b) Gabriela está corriendo una mesa aplicando una fuerza como la que representan los vectores en la imagen.



- ¿Cuántas veces es mayor la fuerza que aplica Gabriela en $\vec{a}$ comparada con la de $\vec{b}$?
 - Si quisiera mover la mesa, pero en sentido contrario, aplicando el quíntuplo de la fuerza según $\vec{b}$, ¿por cuánto debiera multiplicar este vector?
- c) Miguel se desplaza en su auto según el vector que aparece en la imagen.



- Si decidiera hacerlo con el triple de este vector, ¿cuál sería su vector de traslación?
 - ¿Por qué escalar debiera multiplicar la fuerza para que cesara el desplazamiento?
- d) Señala tres vectores distintos que al ser multiplicados por un escalar tienen como producto las componentes del vector (16, 2).

9. **Justifica** si las siguientes propiedades se cumplen para el producto de un vector por un escalar. Señala ejemplos y contraejemplos para validar tu respuesta.

a) $1 \cdot \vec{b} = \vec{b}$

b) $-1 \cdot \vec{b} = -\vec{b}$

10. **Descubre el error.** Matías piensa que al multiplicar un vector por un escalar decimal o fracción, el resultado **siempre** será un vector de menor magnitud que el original. ¿Es correcto lo que señala Matías? Justifica.

11. **Argumenta.** Si $\vec{v}$ es un vector, descubre cuál de las siguientes proposiciones son correctas, y de no serlo, señala el error.

- a) $-2 \vec{v}$ es un vector con una magnitud menor que $\vec{v}$ y distinto sentido.
- b) $0,3 \vec{v}$ es un vector con distinta dirección que el original.
- c) No es posible multiplicar un vector por la raíz cuadrada de 2.
- d) $3 \vec{v}$ es un vector con una magnitud mayor que $\vec{v}$, pero con la misma dirección y sentido.

12. **Desafío.** Se tiene $\vec{h} = (3, 1)$, $\vec{j} = (0, -2)$ y $\vec{c} = (-2, 2)$. ¿Cómo resolverías $3\vec{h} + 0\vec{j} - 0,5\vec{c}$?

13. **Investiga.** Si se puede dividir un vector por un escalar y señala las semejanzas que tiene con la multiplicación.

Reflexiono

- Sea $\vec{u}$ un vector. ¿Cómo podrías expresar a través de una multiplicación un vector equivalente a $\vec{u}$?
- Sea $\vec{w}$ un vector. ¿Cómo podrías expresar a través de una multiplicación el vector opuesto a $\vec{w}$?

Refuerzo

Calcula las operaciones con vectores a partir de $\vec{u} = (0, 7)$, $\vec{v} = (-1, 5)$ y $\vec{w} = (2, 8)$.

- a) $3\vec{u}$ b) $-5\vec{v}$ c) $0,5\vec{w}$ d) $\vec{u} - 5\vec{v} + 0,5\vec{w}$

Palabras clave

➔ Adición y sustracción de vectores.

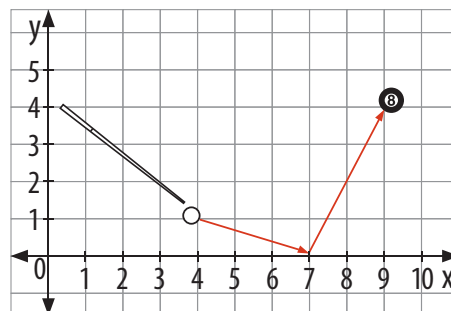
¿Cómo sumar y restar vectores?

- Seguramente has escuchado decir que la diagonal es el camino más corto, ¿qué relación tendrá esta frase con la adición de vectores?

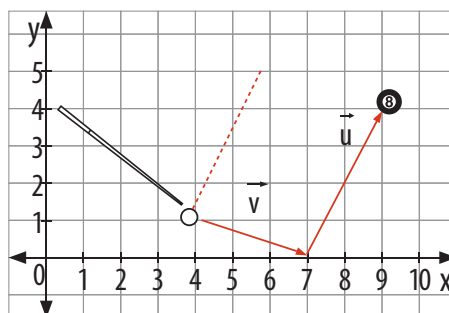
Adición de vectores: Forma paralelogramo.

Jaime juega al billar y está evaluando dos jugadas: golpear la mesa con la bola blanca en el punto (7, 0) para que esta rebote y golpee la bola 8 o hacer un tiro directo hasta esta última. ¿Cuál es el vector del desplazamiento de la bola blanca hacia la bola 8? ¿Cómo es su representación en el plano cartesiano?

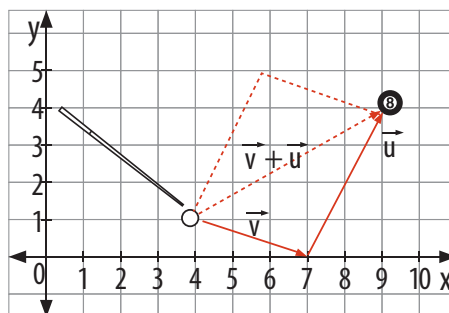
Para encontrar el vector buscado por Jaime se pueden sumar los vectores gráficamente de la siguiente manera.



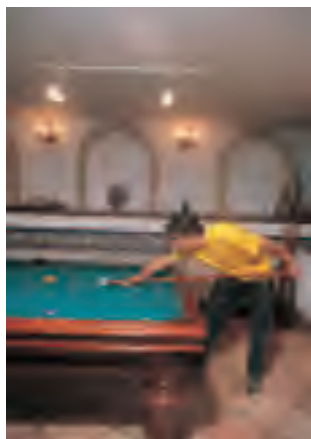
Paso 1 ➔ Trasladar uno de los vectores hasta hacer coincidir su punto inicial con el punto inicial del otro.



Paso 2 ➔ Formar un paralelogramo con segmentos paralelos a estos vectores. El vector resultante de la adición corresponderá a aquel que coincida con la diagonal del paralelogramo desde el punto inicial de los vectores que se suman.



El **billar** es un deporte de precisión que se practica impulsando con un taco un número variable de bolas en una mesa. Existen distintos tipos de juegos en el billar, como es el caso del billar americano más conocido como **pool** al cual se hace referencia en el ejemplo.



Relaciona

- ¿Cuáles son las componentes del vector $\vec{u}$?
- ¿Cuáles son las componentes del vector $\vec{v}$?

El vector de desplazamiento que muestra la trayectoria directa de la bola blanca hacia la bola 8 es $\vec{v} + \vec{u}$ y está representado por la diagonal del paralelogramo formado a partir de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Razona

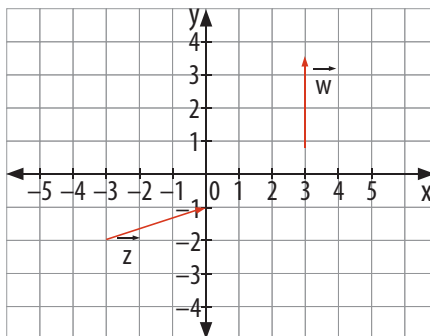
y comenta

- ¿Cuáles son las componentes del vector $\vec{v} + \vec{u}$?
- ¿Qué relación existe entre las componentes de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y las componentes del vector $\vec{v} + \vec{u}$?

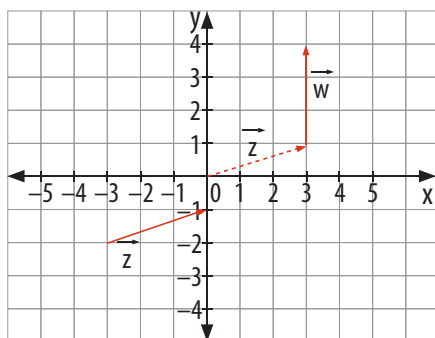
Adición de vectores: Forma triangular.

Ahora, Jaime quiere analizar los posibles movimientos de su taco y para ello los dibujó en el plano cartesiano ¿Cuál es el movimiento directo desde el inicio del vector $\vec{z}$ hasta el final del vector $\vec{w}$?

Para encontrar el vector buscado por Jaime se pueden sumar los vectores gráficamente de la siguiente manera.



- Paso 1** ➔ Traslada uno de los vectores hasta hacer coincidir la punta de flecha de uno de ellos con el punto inicial del otro.

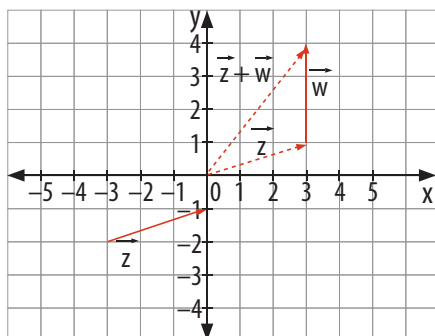


Links

Para profundizar en el concepto de vector y su operatoria visita:
<http://goo.gl/Epnw7>



- Paso 2** ➔ Forma un triángulo con un tercer vector (vector resultante o vector suma) cuyo punto inicial coincide con el punto inicial del primer vector y su punta de flecha coincide con la punta de flecha del vector agregado.



Razona

y comenta

- ¿Cuáles son las componentes del vector $\vec{z} + \vec{w}$?
- ¿Qué relación existe entre las componentes de los vectores $\vec{z}$ y $\vec{w}$ y las componentes del vector $\vec{z} + \vec{w}$?

Relaciona

¿Cuáles son las componentes del vector $-\vec{w}$?

El procedimiento anterior muestra otra forma de sumar vectores, pero ¿cómo se restarán vectores?

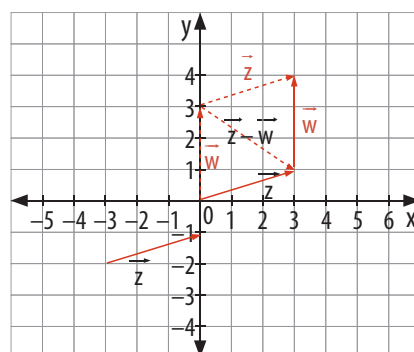
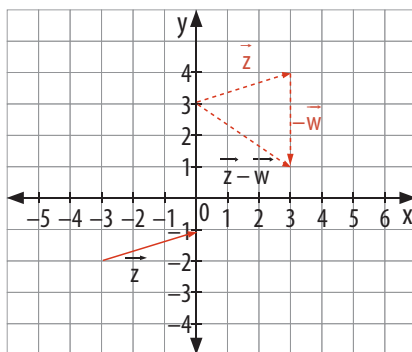
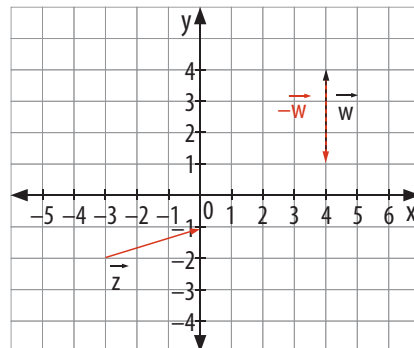
Sustracción de vectores

Para restar vectores, por ejemplo, $\vec{z} - \vec{w}$ puedes realizar lo siguiente:

Paso 1 ➔ Sumar $\vec{z}$ con el opuesto de $\vec{w}$.

El opuesto de $\vec{w}$ es el vector $-\vec{w}$ que tiene la misma magnitud y dirección que $\vec{w}$, pero en sentido contrario.

Para sumar los vectores puedes seguir cualquiera de los métodos vistos anteriormente.



Razona

y comenta

- ¿Cuáles son las componentes del vector $\vec{z} - \vec{w}$?
- ¿Qué relación existe entre las componentes de los vectores $\vec{z}$ y $\vec{w}$ y las componentes del vector $\vec{z} - \vec{w}$?

En resumen

En el paso a paso se obtuvo la forma gráfica para **sumar y restar vectores**, también es posible hacerlo a partir de sus componentes, realizando lo siguiente:

Sea $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$,

Ejemplos:

entonces:

luego:

Si $\vec{u} = (2, -3)$ y $\vec{v} = (-5, 0)$,

$\vec{u} + \vec{v} = (2 + (-5), -3 + 0)$

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{p} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$

$= (-3, -3)$

$\vec{u} - \vec{v} = \vec{p} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$

$\vec{u} - \vec{v} = (2 - (-5), -3 - 0)$

$= (7, -3)$

Repaso

1. **Calcula** las componentes de los vectores.

- $\vec{AB}$; A(1, 3) y B(4, -2)
- $\vec{CD}$; C(-1, -8) y D(-8, 5)
- $\vec{EF}$; E(0, -2) y F(1, 6)
- $\vec{GH}$; G(5, -5) y H(-1, 1)
- $\vec{IJ}$; I(-1, 5; $\frac{1}{3}$) y J(-4, 8; 17)

Práctica guiada

2. **Calcula y completa** la tabla.

$\vec{u}$	$\vec{v}$	$\vec{u} + \vec{v}$	$\vec{u} - \vec{v}$
$(-3, -9)$	$(4, -8)$	$(1, -17)$	$(-7, -1)$
$(-5, 7)$	$(0, 0)$		
$(2, \frac{1}{8})$	$(-4, 20)$		
$(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$	$(-2, \frac{4}{3})$		

3. Calcula a partir de $\vec{u} = (2, 0)$, $\vec{v} = (-4, 5)$,
 $\vec{w} = (3, -2)$ y $\vec{z} = (-5, 4)$

$$\vec{w} - \vec{v} = (3 - (-4), -2 - 5) = (7, -7)$$

- a) $\vec{u} + \vec{v}$ c) $\vec{u} - \vec{v}$ e) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{z}$
 b) $\vec{u} + \vec{w}$ d) $\vec{w} + \vec{z}$ f) $\vec{u} + \vec{u} - \vec{z} + \vec{z}$

4. Evalúa la veracidad de las afirmaciones y justifica.

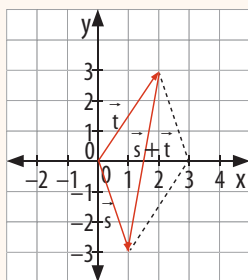
La sustracción de vectores cumple la propiedad conmutativa. Falso, por ejemplo;

$$\vec{u} = (5, 6) - \vec{v} = (1, 8) \neq \vec{v} = (1, 8) - \vec{u} = (5, 6) \quad \square$$

$$\vec{u} - \vec{v} \neq \vec{v} - \vec{u}.$$

- a) La adición de vectores cumple con la propiedad conmutativa.
 b) El vector resultante de la adición entre $\vec{u} = (1, -1)$ y $\vec{v} = (-1, 1)$ tiene componentes $(0, 0)$.
 c) La representación gráfica de los vectores $\vec{w} = (4, -4)$ y $\vec{z} = (-4, 4)$ es la misma.
5. Representa gráficamente la operación y el resultado.

$$\vec{s} + \vec{t}. \text{ Si } \vec{s} = (1, -3) \text{ y } \vec{t} = (2, 3)$$



- a) $\vec{u} + \vec{v}$. Si $\vec{u} = (2, 4)$ y $\vec{v} = (0, -5)$
 b) $\vec{u} - \vec{v}$. Si $\vec{u} = (-1, 0)$ y $\vec{v} = (-1, 6)$

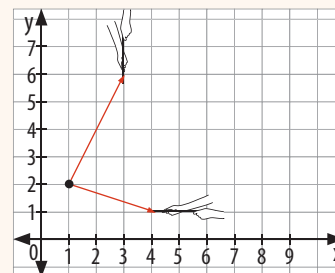
Reflexiono

- ¿Qué propiedad se utilizó para restar vectores en el plano cartesiano?
- ¿Qué diferencias y similitudes tienen la adición y sustracción de vectores?

Aplico

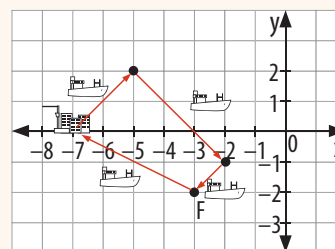
6. Resuelve los siguientes problemas.

- a) Para arrastrar una escultura muy pesada se le atan dos cuerdas y se tiran como muestra la figura.



Si se quiere utilizar solo una cuerda y obtener el mismo resultado, ¿qué fuerza debería aplicarse? Dibuja el vector y señala sus componentes.

- b) Un barco sale del puerto ubicado en las coordenadas $(-7, 0)$ y se desplaza de acuerdo con los vectores que aparecen en la imagen.



¿Cuáles son las componentes del vector que traslada el barco directamente desde el puerto al punto F? ¿Qué características tiene?

7. **Conecta.** Para la física, la trayectoria y el desplazamiento tienen significados distintos. Señala la diferencia entre estos términos e identifica cuál de ellos hace referencia a los vectores.
8. **Argumenta.** Se tienen los vectores $\vec{a} = (3, 4)$, $\vec{b} = (2, 0)$ y $\vec{c} = (-2, 4)$. ¿Es correcta la siguiente igualdad? $(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} - \vec{c})$. Argumenta.
9. **Investiga.** Averigua si se cumplen las propiedades de, conmutatividad, elemento neutro, elemento opuesto en la adición y sustracción de vectores. En caso de que no se cumpla, señala un contraejemplo.

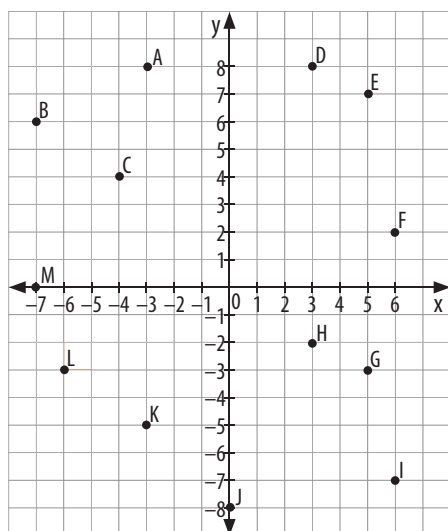
Refuerzo

- Calcula y grafica $\vec{s} - \vec{t}$ si $\vec{s} = (-5, -2)$ y $\vec{t} = (4; 0, 5)$.
- Calcula y grafica $\vec{u} + \vec{v}$ si $\vec{u} = (-5, 3; 2, 1)$ y $\vec{v} = (0, 6; 0, 6)$.



Identifican y representan puntos, figuras y vectores en el plano cartesiano (lecciones 27 y 28).

A partir del siguiente plano cartesiano responde las preguntas 1 y 2.



1 Identifica las coordenadas de todos los puntos.

- | | | |
|------|------|------|
| a. A | e. E | i. I |
| b. B | f. F | j. J |
| c. C | g. G | k. K |
| d. D | h. H | l. L |

2 Identifica las componentes de los siguientes vectores.

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| a. $\overrightarrow{HG}$ | e. $\overrightarrow{HM}$ |
| b. $\overrightarrow{FC}$ | f. $\overrightarrow{BA}$ |
| c. $\overrightarrow{LM}$ | g. $\overrightarrow{GD}$ |
| d. $\overrightarrow{DJ}$ | h. $\overrightarrow{IL}$ |

3 Identifica los puntos y vectores de las actividades 1 y 2 que cumplan con las siguientes condiciones.

- Vectores con sentido noroeste.
- Puntos en el primer cuadrante.
- Puntos cuya abscisa sea positiva.
- Puntos en que coincida su ordenada.
- Vectores con la misma magnitud.

4 Identifica el sentido de los siguientes vectores.

- $\vec{u} = (-5, 4)$
- $\vec{v} = (6, -8)$
- $\vec{w} = (-12, -15)$
- $\vec{m} = (9, 13)$
- $\vec{n} = (-24, 32)$
- $\vec{s} = \left(\frac{3}{2}, -2\right)$

5 Representa en el plano cartesiano las siguientes figuras.

- Un rectángulo de vértices D(-1, 3), E(5, 3), F(5, -1) y G(-1, -1).
- Un cuadrado con vértices A(0, 4) y B(4, 0).
- Un triángulo isósceles en que uno de sus vértices se encuentre sobre el eje X y los otros dos vértices se encuentren en cuadrantes distintos.
- Una recta que pase por los puntos D(-3, 0) y E(2, -2).

6 Representa en el plano cartesiano los siguientes vectores.

- Vector posición $\vec{u}$ cuyas componentes sean (4, 8).
- Vector $\vec{z}$ cuyas componentes sean opuestas al vector $\vec{y} = (2, 2)$.
- Vector $\vec{v}$ cuya dirección sea el eje X y su sentido sea positivo.
- Un vector equivalente a $\vec{c} = (7, -4)$.

7 Resuelve los siguientes problemas.

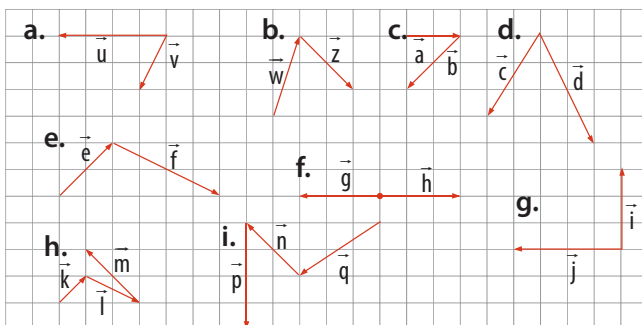
- Si el segmento $\overline{AB}$ de extremos A(1, 3) y B(7, 5) se divide en cuatro partes iguales, ¿cuáles son las coordenadas de los puntos de división?
- Las coordenadas de los extremos del segmento $\overline{AB}$ son A(2, -1) y B(8, -4). Determina las coordenadas del punto C que divide al segmento $\overline{AB}$ en dos partes tales que $\overline{AC}$ es la mitad de $\overline{CB}$.

Representan en el plano cartesiano, adiciones, sustracciones de vectores y multiplicaciones de un vector por un escalar (lecciones 29 y 30).

- 8 Analiza** la siguiente tabla. Luego complétala y ubica los puntos en el plano cartesiano.

Punto de inicio	Punto Final	Vector
A(1, -8)	B(-3, 4)	<u> </u>
B(0, 2)	<u> </u>	$\vec{v} = (6, 8)$
<u> </u>	D(-1, -5)	$\vec{u} = (-3, 4)$
D(<u> </u> , 3)	E(-9, 0)	$\vec{w} = (-3, -3)$

- 9 Representa** el vector que resulta de las siguientes adiciones y sustracciones de vectores, según corresponda.



- 10 Identifica** las componentes de los vectores que resultaron del ejercicio anterior.

- a. $\vec{u} - \vec{v}$ d. $\vec{c} - \vec{d}$ g. $\vec{i} - \vec{j}$
 b. $\vec{w} + \vec{z}$ e. $\vec{e} + \vec{f}$ h. $\vec{k} + \vec{l} + \vec{m}$
 c. $\vec{a} + \vec{b}$ f. $\vec{g} - \vec{h}$ i. $\vec{p} + \vec{n} + \vec{q}$

- 11 Identifica** las componentes de los vectores ponderados.

$$\vec{q} = (2, 0) \quad \vec{w} = (1, 1) \quad \vec{e} = (-2, 3) \quad \vec{r} = (0, 3) \quad \vec{t} = (-1, 1)$$

- a. $2\vec{q}$ c. $3\vec{w}$ e. $3\vec{e}$
 b. $-2\vec{r}$ d. $4\vec{t}$ f. $-3\vec{w}$

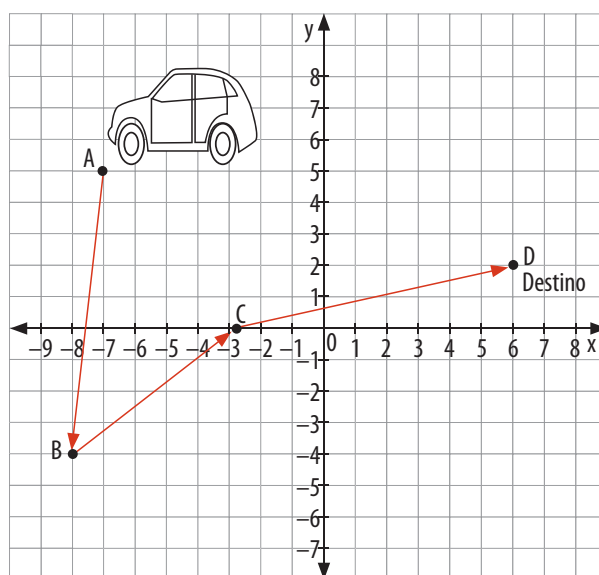
- 12 Representa** en un plano cartesiano los vectores ponderados del ejercicio anterior.

- 13 Resuelve** los siguientes problemas.

- a. Juan se dirige al banco que está cerca de su casa para hacer un trámite y para esto debe caminar

dos cuadras hacia el oeste y luego tres cuadras hacia el norte, para luego bajar cinco cuadras hacia el este, doblar hacia el sur y caminar una cuadra llegando a destino. Si se le diera la posibilidad de realizar el recorrido directo desde su casa al banco, ¿cuál sería? ¿Cuáles son las componentes del vector que resume su trayectoria?

- b. Carlos se dirige al supermercado y realiza la siguiente trayectoria en su automóvil: al salir de su casa avanza 9 cuadras hacia el oeste y luego 15 cuadras hacia el sur, para luego retroceder en 2 cuadras al este y seguir hacia el norte avanzando 20 cuadras. Si se le diera la posibilidad de escoger el camino más corto, ¿cuál sería? ¿Cuáles son las componentes del vector que resume su trayectoria?
- c. María se dirige a su trabajo y la trayectoria que realiza caminando es la siguiente: desde la esquina de su casa avanza 3 cuadras hacia el oeste y luego dobla hacia al sur avanzando una cuadra. Seguidamente repite lo mismo otras tres veces. Si se le diera la posibilidad de escoger el camino más corto, ¿cuál sería? ¿Cuáles son las componentes del vector que resume su trayectoria?
- d. La trayectoria de un auto hacia destino se muestra en el siguiente plano cartesiano:



- ¿Cuál es el camino más corto que debiera tomar para llegar a destino?
- ¿Cuáles son las componentes del vector que resume su desplazamiento?

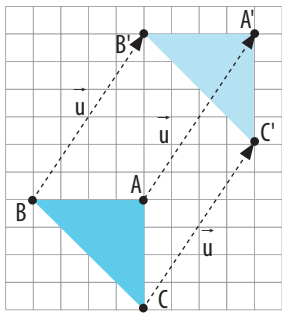
Revisa tus respuestas en el solucionario al final del texto.

Palabras clave

➔ **Traslación en el plano cartesiano.**

Repasa

Una **transformación isométrica** es un movimiento, que aplicado a figuras planas, conserva la forma y el tamaño de la figura original. Algunas transformaciones isométricas son la traslación, reflexión y rotación. La **traslación** es una transformación isométrica que corresponde al movimiento de una figura en una dirección, en un sentido y en una magnitud dada. Dicha dirección, sentido y magnitud de desplazamiento están representados por un vector de traslación ($\vec{u}$). Por ejemplo: el triángulo ABC fue trasladado según el vector $\vec{u}$ obteniendo el triángulo A'B'C'.



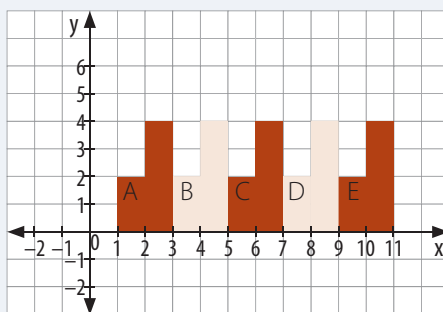
¿Cómo trasladar figuras en el plano cartesiano?

- En la cultura diaguita utilizaban distintos diseños como muestra la imagen. ¿Cuál es el rol de la traslación al formar este diseño?

**Taller**

Reúnanse en parejas y a partir de la situación respondan las preguntas.

Felipe quiere pintar un jarrón estilo diaguita para lo cual diseñó el patrón que muestra la imagen.



- ¿Qué transformación se aplicó a la figura A para obtener las siguientes?
- ¿Cuál es el vector traslación de la figura A a la figura B?
- ¿Qué relación tienen los vértices de la figura A con los vértices de la figura B?
- ¿Cuál es el vector traslación de la figura B a la figura C?
- ¿Qué relación tienen los vértices de la figura B con los de la figura C?
- ¿Cuál es el vector traslación de la figura C a la figura D?
- ¿Qué relación tienen los vértices de la figura C con los de la figura D?

Razona**y comenta**

- ¿Qué regularidad observas en la traslación de figuras en el plano cartesiano? Descríbela.
- Si se quiere trasladar un punto (x, y) según el vector (a, b) , ¿qué procedimiento se podría seguir? Descríbelo.
- En la traslación de segmentos o rectas, ¿se procedería de la misma manera?

¿Qué vértices tendría la octava figura?

Paso 1 Identificar la transformación de la figura A hasta la octava figura del patrón.

Se tendría que trasladar 7 veces la figura A en el vector $(2, 0)$, entonces la traslación directa sería en el vector multiplicado por 7, es decir:

$$7\vec{u} = 7 \cdot (2, 0) = (14, 0)$$

Paso 2 Calcular los vértices de la octava figura.

Para determinar los vértices de la octava figura se deben sumar las coordenadas de los vértices de la figura A con las componentes del vector encontrado en el paso 1, es decir:

Vértices figura A	Vector traslación	Vértices octava figura
(1, 0)	(14, 0)	$(15, 0) = (1 + 14, 0 + 0)$
(3, 0)		$(17, 0) = (3 + 14, 0 + 0)$
(3, 4)		$(17, 4) = (3 + 14, 4 + 0)$
(2, 4)		$(16, 4) = (2 + 14, 4 + 0)$
(2, 2)		$(16, 2) = (2 + 14, 2 + 0)$
(1, 2)		$(15, 2) = (1 + 14, 2 + 0)$

Por lo tanto, la octava figura tiene los vértices que aparecen en la última columna de la tabla.

En resumen

Para **trasladar** un punto $P(x, y)$ en el plano cartesiano respecto de un vector $\vec{u} = (u_1, u_2)$ definida como una función $T_{\vec{u}}$, tal que a cada punto del plano cartesiano lo asocia con un único punto de coordenadas:

$$T_{\vec{u}}(x, y) = (x + u_1, y + u_2)$$

Observa

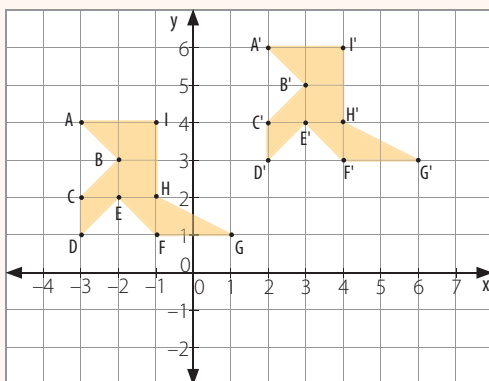
Generalmente, si A es el punto original, entonces A' es su imagen al aplicarle una transformación isométrica.

Razona y comenta

- Si consideramos la traslación $T_{\vec{u}}$ como una función y la aplicamos sucesivas veces, ¿con qué procedimiento se relaciona?
- El hecho de aplicar traslaciones sucesivas, ¿qué relación tiene con la operatoria vectorial? Considera como operatoria vectorial la adición de vectores y la multiplicación de vectores por un escalar.

Repaso

1. **Identifica** las coordenadas del vector que trasladó el polígono ABCDEFGHI.



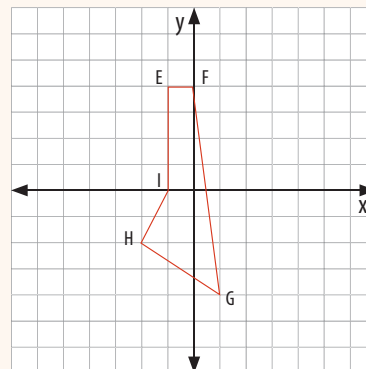
2. **Calcula** las componentes de cada vector.

- $\overline{AB}$, con $A(1, 3)$ y $B(5, 8)$.
- $\overline{FE}$, con $F(-5, 2)$ y $E(-8, 6)$.
- $\overline{IH}$, con $H(-1, -8)$ y $I(-1, 0)$.

- $\overline{PM}$, con $M(3, -9)$ y $P(-2, -7)$
- $\overline{VU}$, con $U\left(\frac{1}{3}, -9\right)$ y $V\left(\frac{-7}{3}, \frac{6}{5}\right)$.
- $\overline{RT}$, con $R\left(-0,5; \frac{1}{2}\right)$ y $T\left(\frac{-5}{3}; -0,1\right)$.

Práctica guiada

3. **Observa** el polígono representado y trasládalo según el vector $\vec{m} = (-2, 7)$.



4. Aplica la traslación según el vector dado.

$$\text{Si } \vec{u} = (-3, -2) \text{ y } T_{\vec{u}}(-9, 1) \rightarrow T_{\vec{u}}(-9, 1) = (-9 - 3, 1 - 2) \\ \rightarrow T_{\vec{u}}(-9, 1) = (-12, -1)$$

- a) $\vec{s} = (1, 6)$ y $T_{\vec{s}}(9, 2)$.
 b) $\vec{r} = (-7, 1)$ y $T_{\vec{r}}(-3, 5)$.
 c) $\vec{u} = (0, -2)$ y $T_{\vec{u}}(-2, -5)$.
 d) $\vec{c} = (-8, -6)$ y $T_{\vec{c}}(-10, -4)$.
 e) $\vec{d} = (-12, -15)$ y $T_{\vec{d}}(-71, 65)$.
 f) $\vec{i} = (-0, 5; -1, 3)$ y $T_{\vec{i}}(9, 8; 3, 2)$.
 g) $\vec{p} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{2}{3}\right)$ y $T_{\vec{p}}\left(\frac{1}{4}; -0, 3\right)$.
 h) $\vec{v} = \left(-2\frac{1}{4}, -\frac{2}{5}\right)$ y $T_{\vec{v}}(0, 0)$.

5. Calcula el vector traslación ($\vec{u}$) a partir del punto inicial (A) y el trasladado (P).

$$A(8, -9), P(-9, 2) \rightarrow \vec{u} = P(-9, 2) - A(8, -9) \\ \vec{u} = (-9 - 8, 2 - (-9)) = (-17, 11)$$

- a) $A(7, -1), P(5, 0)$ d) $A(-1, -3), P(-5, -7)$
 b) $A(4, 2), P(3, -7)$ e) $A(-11, 12), P(11, -12)$
 c) $A(-6, -6), P(0, -1)$ f) $A(0, 8; -1, 2), P(1, 2; 0, 8)$

6. Calcula el punto inicial a partir de su imagen P y el vector traslación $\vec{v}$.

$$\vec{v} = (1, -2) \rightarrow P(8, -9). \text{ Luego, } (8, -9) - (1, -2) \\ \rightarrow (8 - 1, -9 - (-2)) = (7, -7)$$

- a) $\vec{v} = (-3, -9) \rightarrow P(3, -4)$
 b) $\vec{v} = (-5, -1) \rightarrow P(-2, 9)$
 c) $\vec{v} = (4, 10) \rightarrow P(3, -2)$
 d) $\vec{v} = (1, -4) \rightarrow P(-5, 7)$
 e) $\vec{v} = (-7, 11) \rightarrow P(7, 10)$
 f) $\vec{v} = (-5, -8) \rightarrow P(0, 0)$

7. Calcula la imagen a partir de la traslación dada.

Considera $\vec{u} = (-8, -3)$, $\vec{v} = (-9, 1)$ y $\vec{w} = (2, -8)$.

$$T_{\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}}(-1, 2) = T_{(-8-3)+(-9, 1)+(2, -8)}(-1, 2) \\ = T_{(-15, -10)}(-1, 2) \\ = (-15, -10) + (-1, 2) \\ = (-15 + -1, -10 + 2) \\ = (-16, -8)$$

- a) $T_{\vec{v}}(-2, 3)$ c) $T_{-8\vec{w}}(0, -1)$ e) $T_{\vec{u}+\vec{w}}(1, -3)$
 b) $T_{6\vec{u}}(0, -1)$ d) $T_{\vec{u}+\vec{v}}(-8, 4)$ f) $T_{\vec{v}+\vec{w}}(3, 2)$

8. Calcula dos vectores que permitan trasladar los puntos al origen. Describe las traslaciones.

$$(-1, 6) \rightarrow T_{(-1, -2) + (2, -4)}(-1, 6) = (0, 0). \\ \text{Luego, } \vec{u} = (-1, -2) \text{ y } \vec{v} = (2, -4)$$

- a) $(4, 0)$ c) $(0, -7)$ e) $(-8, -6)$ g) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{6}{5}\right)$
 b) $(-3, -1)$ d) $(10, -10)$ f) $(-1; 0, 2)$ h) $\left(-0, \frac{2}{9}\right)$

Aplico

9. Resuelve los siguientes problemas.

- a) La base de un triángulo isósceles tiene como extremos los puntos A(1, 1) y B(5, 1) y el punto del vértice opuesto a la base del triángulo tiene su ordenada negativa. Traslada el triángulo según el vector $\vec{b} = (-4, 5)$. ¿Cuáles son los nuevos vértices?
- b) Las coordenadas de tres vértices de un rectángulo son P(-1, -1), Q(1, -1) y T(1, 4). Traslada el rectángulo según el vector $\vec{c} = (3, -3)$. ¿Cuáles son los nuevos vértices?
- c) La diagonal de un cuadrado tiene como extremos a los puntos H(-1, 2) y F(-4, 5). Traslada el cuadrado según el vector $\vec{d} = (5, -1)$. ¿Cuáles son los nuevos vértices?
- d) Un triángulo obtusángulo tiene uno de sus vértices sobre el eje de las ordenadas. Traslada el triángulo según el vector $\vec{e} = (-1, -3)$ y luego el triángulo obtenido según el vector $\vec{f} = (2, 5)$. ¿Cuáles son los nuevos vértices?
- e) Un segmento cuyos extremos son los puntos K(3, -1) y M(-1, 5) es trasladado según el vector $\vec{m} = (5, -1)$. Determina un nuevo vector traslación que permita mover el punto K al origen.

- f) En un simulador de navegación se ubica un barco en las coordenadas (4, 5). Lo empuja una corriente de agua de un estanque que ejerce una fuerza (en Newton) representada por el vector (10, 8) y a su vez, el viento sopla con una fuerza representada por el vector (-3, -1).

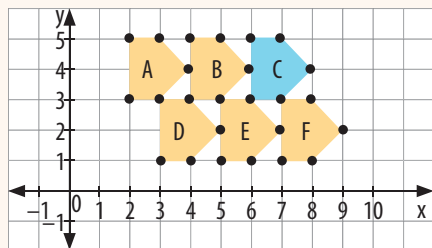
- ¿Cuál es el vector que representa la fuerza resultante?
- ¿Cuál es la posición del barco luego de aplicar la fuerza?

- g) Se realizaron sucesivas traslaciones a partir del vector $\vec{u}$, y se obtuvo el punto D(-5, -1) que es la imagen de C(-3, 0), que, a su vez, es la imagen de B(-1, 1), imagen de A(1, 2).

- ¿Cuáles son las componentes de $\vec{u}$?
- ¿Qué vector traslada al punto A hasta el punto D directamente?

- h) Al punto A(3, 5) se le aplicaron traslaciones sucesivas hasta obtener la imagen A'(-4, -3). Indica tres vectores que podrían haber efectuado las sucesivas traslaciones.

- i) La siguiente imagen muestra un friso producido por la traslación sucesiva de la figura A. A partir de esto responde.



- ¿Qué vector traslada la figura A hasta su imagen B? ¿y hasta la imagen D?
- ¿Cómo se formó el friso? Describe todas las traslaciones.
- Si quisiéramos dejar solo la figura A y la figura F, ¿qué vector deberíamos utilizar?

Reflexiono

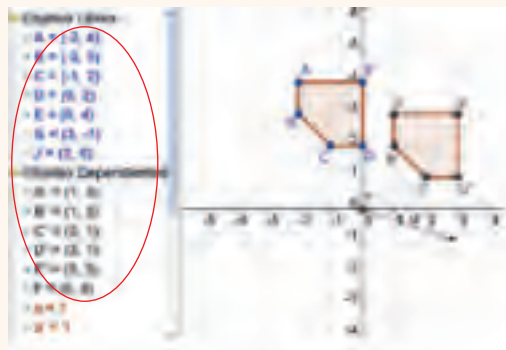
- Un punto A se traslada en el vector $\vec{u}$ y se obtiene el punto A'. ¿Se obtendrá el punto A al trasladar A' en el vector $\vec{u}$? ¿Por qué?
- ¿Por qué una traslación cumple las características de una función?

10. **Analiza** la información que te permitirá realizar traslaciones a figuras geométricas utilizando el programa Geogebra. Luego, resuelve.

1° Dibuja una figura en el área de trabajo.

2° Dibuja el vector de traslación .

3° Presiona el botón , correspondiente a la traslación. Luego, selecciona la figura y el vector dibujado.



- Especifica qué tipo de transformación fue aplicada al polígono ABCDE.
- Verifica que la función: $Tu(x, y) = (x + u_1, y + u_2)$ se cumple para los puntos del polígono ABCDE.
- ¿Cómo son las medidas de la figura trasladada con respecto a la original?

11. **Conecta.** Se tiene el punto H(2, 5) el cual es trasladado reiteradamente por el vector $\vec{p} = (2, 0)$. ¿Qué función representa la recta que se forma con la traslación?

12. **Describe el procedimiento.** Si un barco ubicado en el punto (5, 12) se traslada 3 veces por el plano cartesiano, llegando al mismo punto de partida, ¿cuál fue un posible desplazamiento del barco? Describe tu procedimiento.

13. **Argumenta.** Se tienen los vectores $\vec{u} = (0, 1)$, $\vec{v} = (2, 1)$ y $\vec{w} = (1, 1)$ y se traslada el punto C(0, 3) con cada uno de ellos. Si el orden de la traslación fuera distinto, ¿se obtendrá el mismo punto? Justifica.

Refuerzo

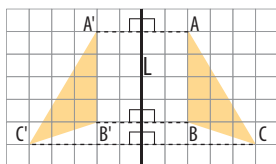
El punto A(3, 2) se traslada en el vector $\vec{s} = (-2, 1)$ y luego en el vector $\vec{w} = (2, -1)$. ¿Cuál es el punto trasladado A'? ¿Qué vector traslada directamente el punto A al punto A'?

Palabras clave

➔ Reflexión en el plano cartesiano.

Repasa

La **reflexión axial** es una transformación isométrica en la que a cada punto de la figura original se le asocia otro punto que está a igual distancia de la recta llamada eje de simetría y el segmento que une ambos puntos es perpendicular a este eje. Dos figuras planas se dirán simétricas si hay un eje de simetría que las refleje. Según la posición de esta recta, la simetría puede ser interior, exterior o de contorno. El triángulo ABC fue reflejado en torno a la recta L obteniendo el triángulo A'B'C'.



Recuerda que la reflexión axial y la reflexión central son tipos de reflexiones.

Links

Para profundizar en las transformaciones isométricas en el plano cartesiano visita:

<http://goo.gl/Sfj3a>,

<http://goo.gl/YUlp0>,

<http://goo.gl/qpfon>



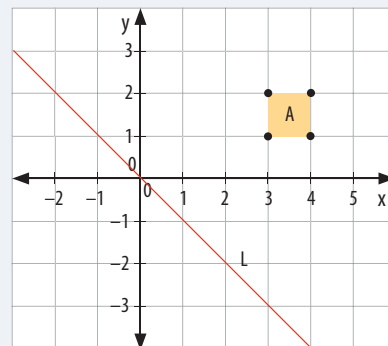
¿Cómo reflejar figuras en el plano cartesiano?

- Recuerdas que en la unidad anterior graficaste la recta $y = 2x$ e $y = -2x$. ¿Qué transformación permitirá obtener la recta $y = 2x$ a partir de la recta $y = -2x$?

Taller

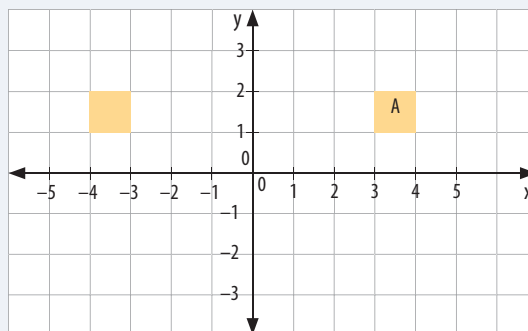
Reúnanse en parejas y a partir de la situación respondan las preguntas.

La imagen muestra el plano de un nuevo conjunto de edificios que se construirán en un barrio emergente. El eje Y, el eje X y la recta L representan las avenidas principales del barrio. Si se desea construir tres edificios que mantengan la misma distancia a las avenidas principales como el edificio A, ¿cuáles serían las coordenadas que representarían estos edificios en el plano?



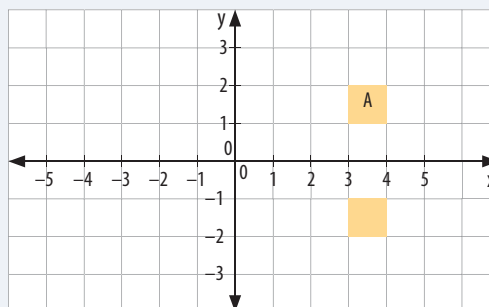
Observa las reflexiones a cada una de las avenidas principales:

Reflexión del edificio A respecto del eje Y



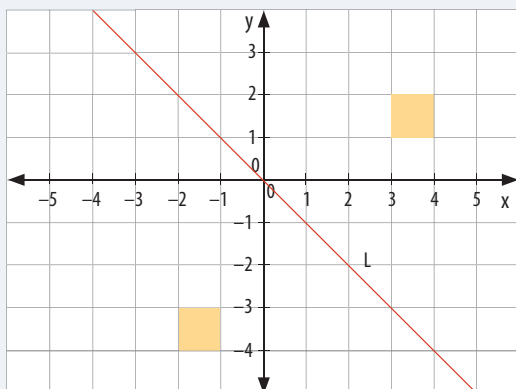
1. ¿Qué coordenadas tienen los vértices del edificio A?
2. ¿Qué coordenadas tienen los vértices de su reflejo con respecto al eje Y?
3. ¿Qué relación existe entre las coordenadas del edificio A y las de su reflejo?

Reflexión del edificio A respecto del eje X



4. ¿Qué coordenadas tienen el reflejo del edificio A respecto del eje X?
5. ¿Qué relación existe entre las coordenadas del edificio A y las de este reflejo?

Reflexión del edificio A con respecto a la recta L.



6. ¿Qué coordenadas tienen los vértices del reflejo del edificio A con respecto a la recta L?
7. ¿Qué relación hay entre las coordenadas del edificio A y las de este reflejo?

Razona y comenta

- ¿Qué regularidad observas en la reflexión de una figura con respecto al eje Y? ¿Y con respecto al eje X? Descríbelas.
- ¿Qué regularidad observas en la reflexión de una figura con respecto a la recta $y = x$? Descríbela.

En resumen

Reflejar un punto $P(x, y)$ en plano cartesiano respecto de un eje coordenado puedes utilizar las siguientes expresiones:

- Si la reflexión de un punto (x, y) es respecto del eje X puede ser definida como una función:

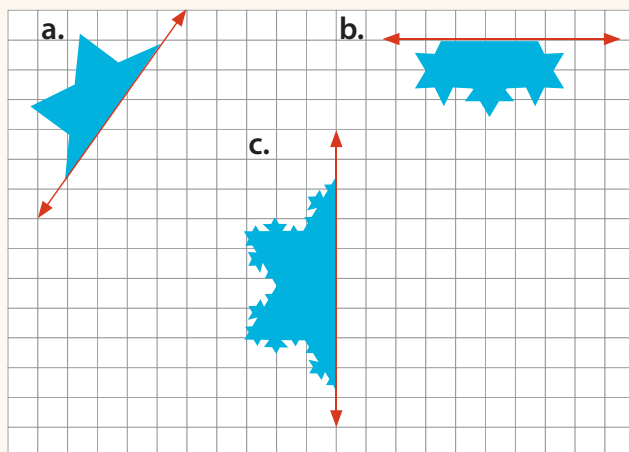
$$R_x(x, y) = (x, -y)$$
- Si la reflexión de un punto (x, y) es respecto del eje Y puede ser definida como una función:

$$R_y(x, y) = (-x, y)$$
- La reflexión de un punto (x, y) respecto a la recta $y = x$ puede ser definida como una función:

$$R_{y=x}(x, y) = (y, x)$$

Repaso

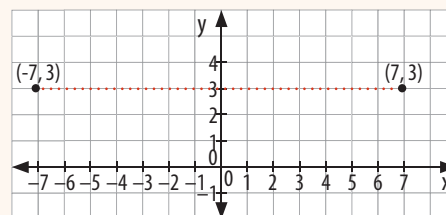
1. **Aplica** la reflexión axial respecto de cada eje pintado de color rojo.



Práctica guiada

2. **Aplica** las siguientes reflexiones. Luego represéntalas gráficamente.

$$R_y(-7, 3) = (-(-7), 3) = (7, 3)$$



a) $R_x(2, 0)$

b) $R_x(-2, 4)$

c) $R_y(1, 6)$

d) $R_y(-8, 9)$

e) $R_x\left(\frac{1}{3}, -4, 5\right)$

f) $R_y\left(\frac{3}{8}, -\frac{9}{4}\right)$

g) $R_y\left(-1\frac{4}{3}, -0, 5\right)$

h) $R_y\left(-2\frac{2}{3}, -2, 5\right)$

3. **Identifica** las coordenadas de los puntos que fueron reflejados con respecto al eje X, obteniendo las siguientes imágenes.

$$(-3, -5) = (x, -y) \rightarrow -3 = x; -5 = -y \rightarrow x = -3; y = 5 \\ \rightarrow (x, y) = (-3, 5)$$

- a) $(-3, 10)$ d) $(-11, -1)$ g) $(-3, 6; -9, 2)$
 b) $(-8, -9)$ e) $(-21, 0)$ h) $\left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{6}\right)$
 c) $(0, -4)$ f) $(-2; 0, 1)$

4. **Identifica** las coordenadas de los puntos que fueron reflejados respecto del eje Y, obteniendo las siguientes imágenes.

$$(-1, -3) = (-x, y) \rightarrow -1 = -x; -3 = y \rightarrow x = 1; y = -3 \\ \rightarrow (x, y) = (1, -3)$$

- a) $(7, -3)$ d) $(-9, 4)$ g) $(-8, 5; 1, 3)$
 b) $(-2, -4)$ e) $(0; -10)$ h) $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{9}\right)$
 c) $(-3, 0)$ f) $(6; 1, 1)$

5. **Aplica** las reflexiones y determina los vértices de las imágenes.

$R_Y(\text{Pentágono } A(-2, -2), B(2, -1), C(3, 2), D(-1, 4), E(-3, 2))$

$$R_Y(-2, -2) = (-(-2), -2) = (2, -2)$$

$$R_Y(2, -1) = (-2, -1)$$

$$R_Y(3, 2) = (-3, 2)$$

$$R_Y(-1, 4) = (-(-1), 4) = (1, 4)$$

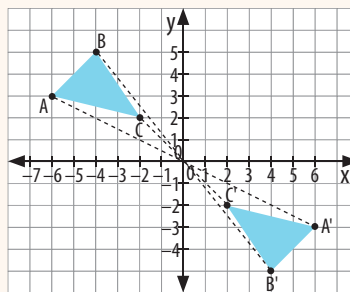
$$R_Y(-3, 2) = (-(-3), 2) = (3, 2)$$

Imagen $A'(2, -2)$, $B'(-2, -1)$, $C'(-3, 2)$, $D'(1, 4)$ y $E'(3, 2)$

- a) Triángulo de vértices $A(0, 0)$, $B(3, 8)$ y $C(-2, 1)$ respecto del eje X.
 b) Cuadrilátero de vértices $P(-4, -3)$, $Q\left(\frac{1}{8}, -\frac{2}{3}\right)$, $R(2, -2)$ y $S\left(-\frac{1}{8}, -7\right)$ respecto del eje Y.
 c) Pentágono de vértices $A(-4, -3)$, $B(-3, -5)$, $C(-1, -5)$, $D(0, -3)$ y $E(-2, -2)$ respecto al eje X.

Aplico

6. **Observa** los vértices del triángulo que fueron reflejados con respecto al origen del plano cartesiano, es decir, se les aplicó una simetría central con respecto al punto $(0, 0)$. Luego responde las preguntas.



Vértice	Imagen
$A(-6, 3)$	$A'(6, -3)$
$B(-4, 5)$	$B'(4, -5)$
$C(-2, 2)$	$C'(2, -2)$

- a) ¿Qué regularidad observas? Descríbela.
 b) Si se refleja un punto (x, y) respecto al origen del plano, ¿qué punto se obtiene?
 c) A partir de lo anterior completa la tabla.

Punto	Imagen
$(-10, -3)$	
$(15; -0, 1)$	
$\left(-\frac{7}{8}, -\frac{6}{13}\right)$	

7. **Analiza** las siguientes figuras compuestas y luego responde:

Figura 1

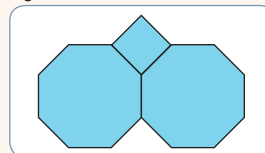


Figura 2

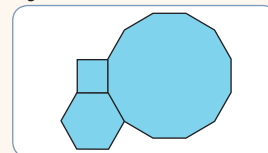


Figura 3

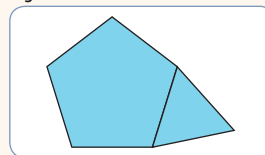
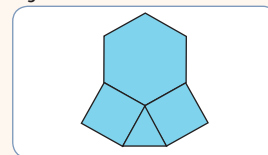


Figura 4

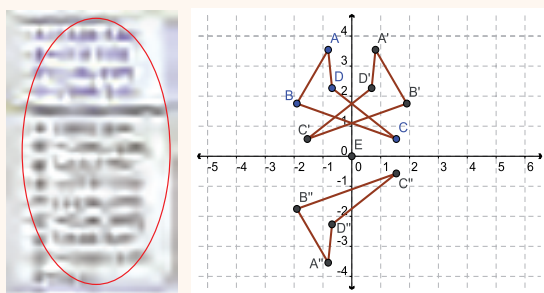


- a) Dibuja cada figura en planos cartesianos distintos. Ten en cuenta que las figuras compuestas son polígonos regulares. Si quieres, puedes calcar las figuras para que queden exactamente iguales o puedes utilizar un procesador geométrico.
 b) Refleja sucesivamente cada figura respecto de una recta paralela al eje X, de manera que dicha recta pase por el lado del polígono regular de mayor área.
 c) Refleja sucesivamente cada figura respecto de una recta paralela al eje Y, de manera que dicha recta pase por el lado del polígono regular de mayor área.

- d) ¿Con cuál de la figuras crees que puedes cubrir completamente el plano cartesiano?
- e) ¿Qué condición debe tener la figura compuesta para poder teselar el plano cartesiano?

8. Analiza la información que te permitirá realizar reflexiones a figuras geométricas utilizando el programa Geogebra. Luego, resuelve.

- 1° Dibuja una figura en el área de trabajo.
- 2° Si la reflexión es respecto de un eje de simetría o de un punto, dibújalo.
- 3° Presiona el botón correspondiente al elemento por el que se aplicará la reflexión (eje  o centro de simetría ). Luego, selecciona la figura y el eje o el centro de simetría.



- a) Especifica qué tipo de transformaciones fueron aplicadas a los polígonos ABCD y A'B'C'D'.
- b) Verifica que se cumplen las funciones:
 $R_x(x, y) = (x, -y)$, $R_y(x, y) = (-x, y)$ y $R_0(x, y) = (-x, -y)$.
- c) Observa los datos encerrados con rojo.
 ¿Cómo son las medidas de la figura reflejada con respecto a la original?

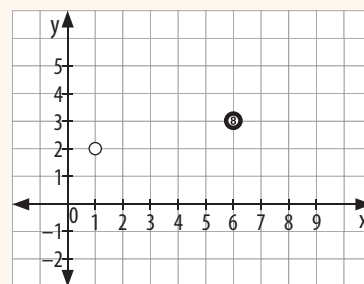
9. Resuelve los siguientes problemas.

- a) La diagonal de un cuadrado tiene como extremos los puntos (1, 1) y (-3, 5). Refleja el cuadrado respecto del eje Y. ¿Cuáles son las coordenadas de los extremos de la diagonal resultante?
- b) Un rectángulo ha sido reflejado con respecto al eje X quedando los extremos de una diagonal en los puntos (1, 2) y (4, -2). ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del rectángulo original?

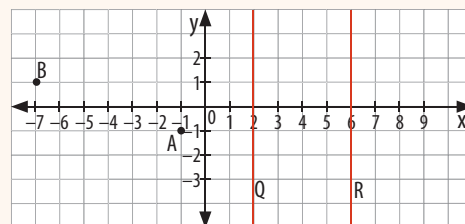
Reflexiono

- Se refleja un punto A con respecto al eje X y se obtiene la imagen A', al aplicar la reflexión en sentido inverso, ¿se obtiene A? Argumenta.
- Lo anterior, ¿sucederá de igual forma para las reflexiones con respecto al eje Y?
- ¿Por qué una reflexión cumple las características de una función?

- c) Un rectángulo que tiene dos de sus vértices en los puntos (-1, 1) y (3, 4), se refleja con respecto al origen. ¿Cuáles son las nuevas coordenadas del rectángulo?
- d) La diagonal de un pentágono regular de coordenadas E(-4, 1) y H(-5/2; 5,6) es reflejado con respecto a la recta $y = 5$, y el resultante es reflejado con respecto a la recta $x = 2$. ¿Cuáles son las coordenadas de la diagonal del pentágono luego de hacer la segunda reflexión?
- e) La bola blanca debe golpear la banda de la mesa, representada por el eje X, de tal manera que en su rebote le pegue a la bola 8. ¿Qué punto de la mesa debe golpear la bola blanca, si se sabe que dicho punto pertenece a la recta que contiene a la reflexión de la bola ocho con respecto al eje X?



- 10. Desafío.** En la siguiente figura se encuentra ubicado el punto A y el punto B. ¿Qué reflexiones se debieran aplicar a A para llegar a la posición de B? ¿Con qué otra transformación isométrica se podría realizar la misma tarea?



- 11. Investiga.** Busca en el mapamundi dos ciudades o países que sean simétricos respecto al eje X y respecto al eje Y. Considera el eje X como la línea del Ecuador y el eje Y, el meridiano de Greenwich.

Refuerzo

1. Un cuadrado con vértices en los puntos (3, 1) y (3, 4) se reflejó con respecto al eje Y y luego respecto al eje X. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del cuadrado imagen?
2. El cuadrado anterior se reflejó respecto al origen y luego respecto del eje Y. ¿Cuáles son los vértices del cuadrado resultante?

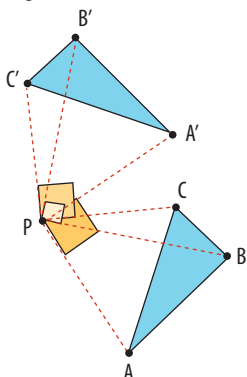
Palabras clave

➤ Rotación en el plano cartesiano.

Repasa

La rotación es una transformación en el plano que consiste en girar todos los puntos de una figura en torno a un punto O fijo llamado centro de rotación, en una medida angular α llamado ángulo de rotación, tal que cada punto gira siguiendo un arco de circunferencia que tiene como centro O y un ángulo α .

Recuerda que si el ángulo de rotación es positivo, el giro se realiza en sentido antihorario y si el ángulo de rotación es negativo, el giro se realiza en sentido horario. Por ejemplo el triángulo ABC fue rotado con respecto al punto P en un ángulo de 90° obteniéndose el triángulo $A'B'C'$.



Observa

La equivalencia de un ángulo α en sentido antihorario en otro ángulo en sentido horario se puede calcular $360^\circ - \alpha$. Por ejemplo, la rotación en 90° en sentido antihorario, es equivalente a realizar la rotación en 270° (-90°) en sentido horario, ya que, $360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$.

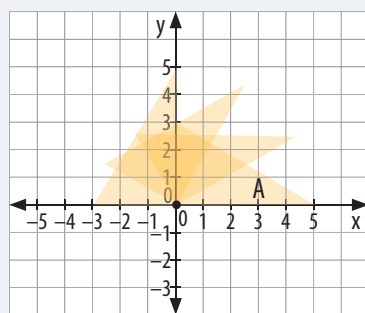
¿Cómo rotar figuras en el plano cartesiano?

- En años anteriores, realizaste giros (rotaciones) de figuras, ¿qué elementos son necesarios para realizar dicho movimiento?

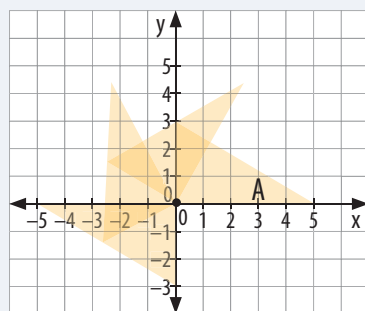
Taller

Reúnanse en tríos y a partir de la situación respondan las preguntas.

Don Esteban es un organillero y está diseñando diferentes tipos de remolinos a partir de la rotación de un triángulo rectángulo en el plano cartesiano. Él desea que las coordenadas de cada triángulo sean números enteros. Para ello genera las siguientes rotaciones:

Rotación del triángulo A respecto al origen en 30° 

1. ¿Qué coordenadas tienen los vértices del triángulo A?
2. ¿Se obtuvo un triángulo con coordenadas enteras? ¿Cuál?
3. ¿En cuántos grados se tendría que rotar el triángulo A para obtener el triángulo con coordenadas enteras?
4. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices de este triángulo?

Rotación del triángulo A respecto al origen en 60° 

5. ¿Se obtuvo un triángulo con coordenadas enteras? ¿Cuál?
6. ¿En cuántos grados se tendría que rotar el triángulo A para obtener el triángulo con coordenadas enteras?
7. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices de este triángulo?

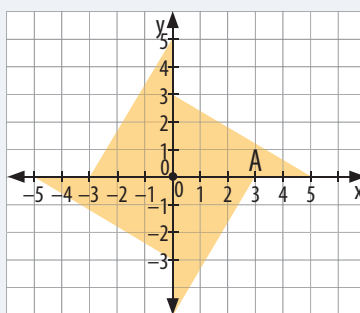
En resumen

La **rotación** de un punto (x, y) respecto de un centro O y un ángulo α puede ser definida como una función $R_{(O, \alpha)}$.

- Rotación (+): en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj.
- Rotación (-): en el mismo sentido que el giro de las manecillas del reloj.

Rotación del triángulo A respecto al origen en 90°

1. ¿Se obtuvieron triángulos con coordenadas enteras? ¿Cuáles?
2. ¿En cuántos grados se tendría que rotar el triángulo A para obtener un triángulo con coordenadas enteras?
3. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices de estos triángulos?



En resumen

Para rotar un punto $P(x, y)$ en el plano cartesiano respecto al origen (O) y un ángulo de rotación α , el punto imagen se obtiene utilizando las siguientes expresiones:

$$R_{(\alpha, 90^\circ)}(x, y) = (-y, x)$$

$$R_{(\alpha, 180^\circ)}(x, y) = (-x, -y)$$

$$R_{(\alpha, 270^\circ)}(x, y) = (y, -x)$$

$$R_{(\alpha, 360^\circ)}(x, y) = (x, y)$$

$$R_{(\alpha, -90^\circ)}(x, y) = (y, -x)$$

$$R_{(\alpha, -180^\circ)}(x, y) = (-x, -y)$$

$$R_{(\alpha, -270^\circ)}(x, y) = (-y, x)$$

$$R_{(\alpha, -360^\circ)}(x, y) = (x, y)$$

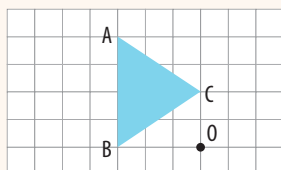
Razona y comenta

- ¿Qué regularidades observas en la rotación de una figura respecto al origen? Descríbelas.
- Si se tiene la figura original y su rotada con respecto al origen, ¿qué procedimiento utilizarías para determinar el ángulo de rotación?
- En la rotación de figuras con respecto al origen en 30° y 60°, ¿es posible identificar alguna regularidad? Coméntalo con tus compañeros.

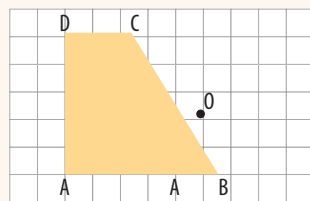
Repaso

1. **Construye** utilizando regla y transportador las rotaciones indicadas respecto a cada una de las figuras dibujadas.

- a) Rotación centro O y ángulo 240°.



- b) Rotación en -180° respecto de O.



Práctica guiada

2. **Aplica** la rotación con respecto al origen según el ángulo de giro indicado para cada uno de los puntos.

$$R_{(\alpha, 270^\circ)}(7, -8) = (-8, -7)$$

- | | |
|--------------------------------------|--|
| a) $R_{(\alpha, 90^\circ)}(5, -2)$ | e) $R_{(\alpha, -270^\circ)}(9, -15)$ |
| b) $R_{(\alpha, 270^\circ)}(1, -1)$ | f) $R_{(\alpha, -90^\circ)}(-14, -36)$ |
| c) $R_{(\alpha, 180^\circ)}(-8, 3)$ | g) $R_{(\alpha, -180^\circ)}(-2, -7)$ |
| d) $R_{(\alpha, 360^\circ)}(-6, -5)$ | h) $R_{(\alpha, -360^\circ)}(-32, 5)$ |

3. **Identifica** el ángulo de rotación aplicado para obtener la imagen dada.

$$R_{(\alpha, \alpha)}(-6, 9) = (-9, -6) \rightarrow \alpha = 90^\circ$$

- | | |
|---|---|
| a) $R_{(\alpha, \alpha)}(-1, 3) = (3, 1)$ | e) $R_{(\alpha, \beta)}(-8, -10) = (8, 10)$ |
| b) $R_{(\alpha, \beta)}(5, -2) = (-2, -5)$ | f) $R_{(\alpha, \mu)}(5, -3) = (-3, -5)$ |
| c) $R_{(\alpha, \mu)}(-6, -7) = (6, 7)$ | g) $R_{(\alpha, \alpha)}(1, 5) = (1, 5)$ |
| d) $R_{(\alpha, \alpha)}(-1, -5) = (5, -1)$ | h) $R_{(\alpha, \beta)}(-3, 7) = (-7, -3)$ |

4. **Identifica** las coordenadas del punto original, dados el ángulo de giro y su imagen.

$$R_{(\alpha, -90^\circ)}(x, y) = (-7, 11) \rightarrow R_{(\alpha, -90^\circ)}(x, y) = (y, -x) \\ \rightarrow y = -7, y - x = 11 \\ \rightarrow y = -7 \text{ y } x = -11 \\ \rightarrow (x, y) = (-11, -7)$$

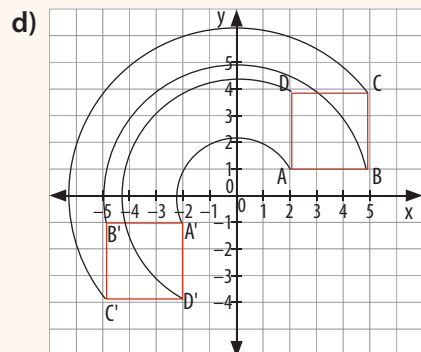
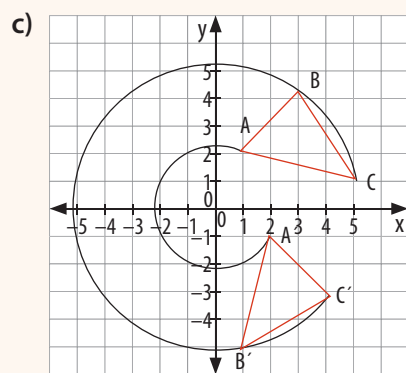
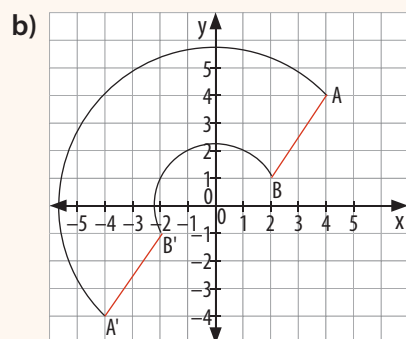
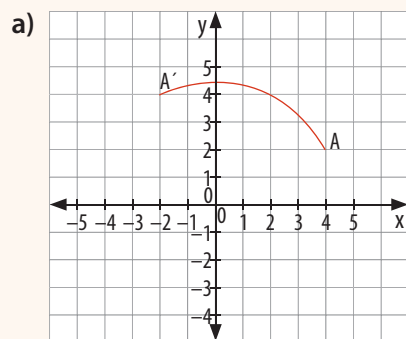
- | | |
|--|---|
| a) $R_{(\alpha, 90^\circ)}(x, y) = (5, -9)$ | e) $R_{(\alpha, -90^\circ)}(x, y) = (-7, 11)$ |
| b) $R_{(\alpha, 180^\circ)}(x, y) = (-1, 2)$ | f) $R_{(\alpha, -180^\circ)}(x, y) = (6, -1)$ |
| c) $R_{(\alpha, 270^\circ)}(x, y) = (-8, 0)$ | g) $R_{(\alpha, -270^\circ)}(x, y) = (-4, -13)$ |
| d) $R_{(\alpha, 360^\circ)}(x, y) = (-10, -3)$ | h) $R_{(\alpha, -360^\circ)}(x, y) = (-5, 2)$ |

5. **Identifica** el ángulo de giro opuesto equivalente al ángulo dado.

90° es equivalente a un giro de -270°.

- a) -60° c) 120° e) -200°
b) 370° d) -10° f) 180°

6. **Identifica** el ángulo de las siguientes rotaciones realizadas con respecto al origen del plano cartesiano.

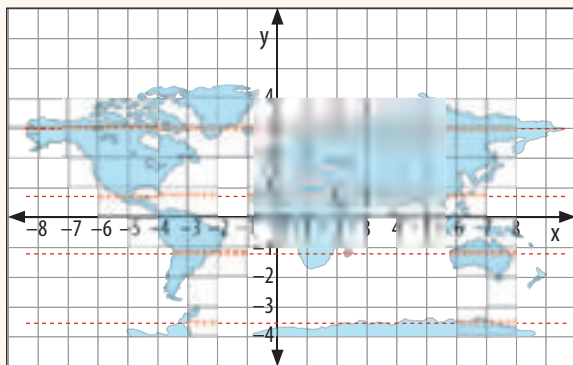


Aplico

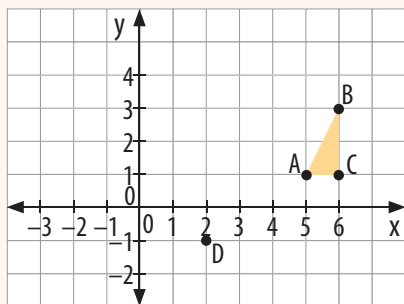
7. **Resuelve** los siguientes problemas.

- a) ¿Cuáles son las coordenadas del punto $(-3, -5)$ una vez que se le ha aplicado la rotación $R_{(0, 90^\circ)}$?
- b) ¿Cuáles son las coordenadas del punto $(1, 7)$ una vez que se le ha aplicado la rotación $R_{(0, 180^\circ)}$?
- c) Si las coordenadas de un punto al ser rotado respecto al origen en 90° son $(4, 1)$, ¿cuáles son las coordenadas del punto antes de rotarlo?
- d) Si las coordenadas de un punto al ser rotado respecto al origen en 180° son $(-2, 5)$, ¿cuáles son las coordenadas del punto antes de rotarlo?
- e) Los vértices de un triángulo son $A(-1, -1)$, $B(-3, -1)$ y $C(-1, -4)$ y se le ha aplicado una rotación $R_{(0, 90^\circ)}$. ¿Cuáles son los vértices después de la rotación?
- f) El cuadrado cuyos extremos de la diagonal son los puntos $M(3, 1)$ y $N(3, -1)$ se le ha aplicado una rotación $R_{(0, 180^\circ)}$. ¿Cuáles son las nuevas coordenadas de los vértices del cuadrado?
- g) Uno de los vértices de un triángulo está sobre el origen y los otros dos corresponde a los puntos $P(-3, -1)$ y $Q(0, -5)$. ¿Cuál es la nueva coordenada de **P** al ser rotado en 90° ?
- h) Al triángulo ABC se le aplica una rotación $R_{(0, 270^\circ)}$. Si sus vértices son $A(0, -2)$, $B\left(\frac{3}{4}, 4\right)$ y $C(-3; 2, 7)$, ¿cuáles son los vértices de la figura resultante?
- i) A un cuadrilátero ABCD se le ha aplicado la rotación $R_{(0, -90^\circ)}$. Si la figura resultante tiene vértices $A'(-3, 4)$, $B'(-4, 7)$, $C'(-1, 8)$ y $D'(-1, 7)$, determina los vértices del cuadrilátero ABCD.
- j) El segmento AB determinado por los puntos $A(-2, -4)$ y $B(-9, -2)$ se rota con centro en el origen. Si la figura resultante se ubica en el cuadrante I, ¿cuál fue el ángulo positivo que se aplicó?
- k) Un busca tesoros descifró un mapa escrito en coordenadas cartesianas. La búsqueda se inicia en el punto $(-1, 3)$. De acuerdo a sus datos, al rotar dicha ubicación en 180° con respecto al origen se obtiene una 2.ª posición. Desde ahí se debe girar en 90° con respecto al origen para llegar a la 3.ª ubicación. Finalmente se debe rotar en 180° con respecto al origen para llegar al lugar del tesoro.

- ¿En qué continente se ubica este?
- ¿Qué lugares se visitan durante la búsqueda del tesoro?
- ¿Qué rotación, o rotaciones, te permitirían llegar directamente desde el punto de partida hasta el lugar del tesoro?



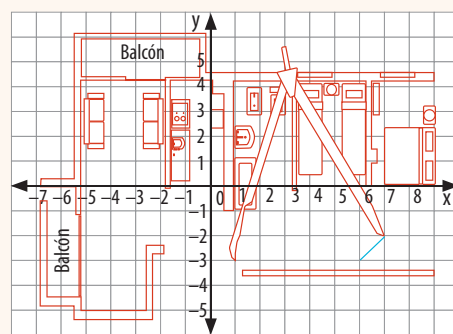
- l) Javiera dibujó un triángulo ABC en un programa computacional de geometría. Ella quiere obtener uno idéntico al que dibujó mediante una rotación en 90° con respecto al punto D. Si debe hacerlo en el plano cartesiano ¿cuáles serán las coordenadas del triángulo imagen?



- m) Un arquitecto está modificando el plano de un departamento. Le solicitaron rotar en 180° la puerta cuyos vértices se ubican en los puntos $(7, -2)$ y $(6, -3)$, considerando como centro de rotación el punto $(1, -3)$. ¿Cuáles son las coordenadas del nuevo lugar donde irá la puerta? Describe tu procedimiento.

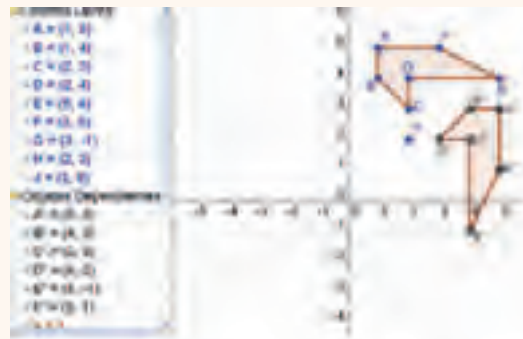
Reflexiono

- Se rota un punto A respecto al origen en 180° y se obtuvo A'. ¿Es posible que al aplicar la rotación en sentido inverso se obtenga el punto original? ¿Por qué?
- ¿Por qué una rotación cumple las características de una función?



Plano del departamento

8. **Analiza** la información que te permitirá realizar rotaciones a figuras geométricas utilizando el programa Geogebra. Luego, resuelve.
- 1° Dibuja una figura en el área de trabajo.
 - 2° Presiona el botón , correspondiente a la rotación. Luego, selecciona la figura, el centro de rotación y escribe el ángulo de rotación en la casilla.



- a) Especifica qué punto se consideró como centro de rotación y en qué ángulo se ha rotado el polígono ABCDEF.
 - b) Si el ángulo de rotación es 90° , 180° , 270° , 360° o sus correspondientes negativos, verifica que se cumple la relación respectiva.
9. **Conecta.** La Tierra gira en torno a su propio eje, lo que da origen al día y la noche ¿Cuál es el ángulo de rotación que debe realizar la Tierra para que una ciudad que está de día quede en total oscuridad?
10. **Argumenta.** ¿Cómo se podría determinar las coordenadas de un punto que se rotó en 720° , 450° y 540° con respecto al origen?

Refuerzo

Un triángulo con vértices en los puntos $(3, 2)$, $(3, -2)$ y $(0, -2)$ se rotó en 90° respecto al origen y luego en 180° con respecto al origen ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del triángulo obtenido?

Palabras clave

- ➔ Composición de transformaciones isométricas.

Repasa

Si $f(x) = -6x$ y $g(x) = 2x + 1$ entonces:

$$\begin{aligned} \blacksquare f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f(2x + 1) \\ &= -6(2x + 1) \\ &= -12x - 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(-6x) \\ &= 2 \cdot (-6x) + 1 \\ &= -12x + 1 \end{aligned}$$

Razona

y comenta

- ¿Qué relación hay entre el vector $\vec{z}$ y los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$?
- ¿Qué puedes concluir acerca de la aplicación de sucesivas traslaciones de traslaciones y la operatoria vectorial?
- ¿Qué transformación resulta al aplicar sucesivas traslaciones traslaciones? ¿Siempre resulta esta transformación?

¿Cuál es el resultado de la composición de transformaciones isométricas en el plano cartesiano?

- La imagen muestra la pared de un museo cuya estructura corresponde a un friso. ¿Qué transformaciones isométricas puedes identificar en el diseño?

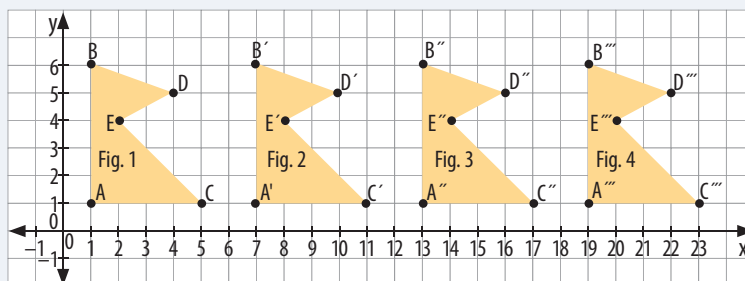


Taller

Reúnanse en grupos de cuatro integrantes y respondan las preguntas.

Composición de traslaciones

Observa el siguiente plano cartesiano y las figuras que aparecen.



- ¿Qué vector traslada la figura 1 en la figura 2? Nómbralo $\vec{u}$.
- ¿Qué vector traslada la figura 2 en la figura 3? Nómbralo $\vec{v}$.
- ¿Qué vector traslada la figura 3 en la figura 4? Nómbralo $\vec{w}$.
- ¿Qué vector traslada directamente la figura 1 a la figura 4? Nómbralo $\vec{z}$.

Observa:

Sean el vértice $A(1, 1)$ del polígono ACEDB y los vectores $\vec{u} = (6, 0)$ y $\vec{v} = (6, 0)$. Entonces,

$$\begin{aligned} T_{\vec{u}}(A) &= (1 + 6, 1 + 0) = (7, 1) \rightarrow T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}(A) = T_{\vec{v}}(T_{\vec{u}}(A)) = T_{\vec{v}}(7, 1) \\ &= (7 + 6, 1 + 0) = (13, 1) \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\vec{u} + \vec{v} = (6 + 6, 0 + 0) = (12, 0) \rightarrow T_{\vec{u} + \vec{v}}(A) = T_{(12, 0)}(A) = (1 + 12, 1 + 0) = (13, 1)$$

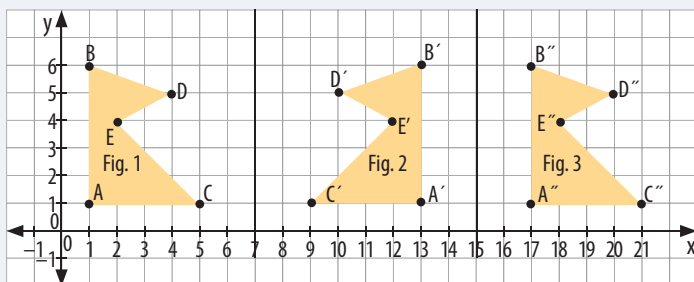
En resumen

La **composición de transformaciones isométricas** es la aplicación sucesiva de transformaciones isométricas sobre un punto o una figura, es decir, al resultado de la primera transformación se le aplica una segunda y así sucesivamente.

Al **componer dos o más traslaciones** $T_{\vec{v}}$ o $T_{\vec{u}}$ (A) es equivalente a la traslación $T_{\vec{u} + \vec{v}}$ (A).

Composición de reflexiones con ejes de reflexión paralelos a los ejes coordenados

Observa el siguiente plano cartesiano y las figuras que aparecen.



1. ¿Qué reflexión se aplicó a la figura 1 para obtener la figura 2?
2. ¿Qué reflexión se aplicó a la figura 2 para obtener la figura 3?
3. ¿Qué transformación permite llegar directamente de la figura 1 a la figura 3? Descríbela.

Razona

y comenta

- ¿Qué puedes concluir acerca de la composición de reflexiones?
- ¿Qué transformación resulta al componer reflexiones? ¿Siempre resulta esta transformación?

Composición de reflexiones con ejes de reflexión intersecados en un punto

El punto P se quiere reflejar con respecto a la intersección en C de dos rectas, L_1 y L_2 . La figura 1 muestra el punto P reflejado sobre L_1 , resultando el punto P' y luego P' reflejándolo en torno a L_2 resultando el punto P'' . La figura 2 muestra los ángulos $\angle PCP'$ y $\angle P'CP''$.

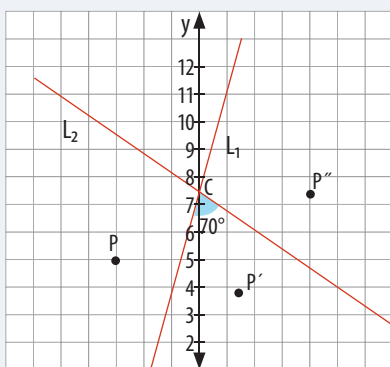


Figura 1

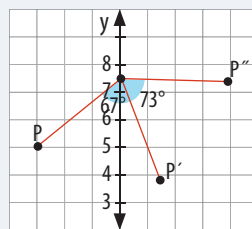


Figura 2

Razonen

y comenten

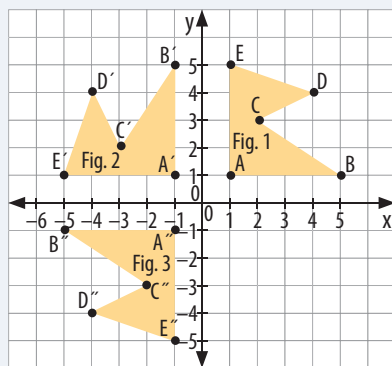
- ¿Qué relación encuentras entre la medida de estos ángulos y el ángulo formado por las rectas L_1 y L_2 ?
- ¿Qué transformación del punto P produce directamente el punto P'' ?

En resumen

- Al **componer dos reflexiones** respecto de rectas paralelas al eje Y o paralelas al eje X es equivalente a una traslación $T_v(A)$.
- Al **componer dos reflexiones** $R_{L_2} \circ R_{L_1}(A)$ donde L_1 y L_2 se intersecan en un punto J, formando un ángulo α tiene como resultado una rotación $R_{J, 2\alpha}(A)$.

Composición de rotaciones

Observa el siguiente plano cartesiano y las figuras que aparecen.



1. ¿Qué rotación se aplicó a la figura 1 para obtener la figura 2?
2. ¿Qué rotación se aplicó a la figura 2 para obtener la figura 3?
3. ¿Qué transformación permite llegar directamente de la figura 1 a la figura 3? Descríbela.

Razona

y comenta

- ¿Qué puedes concluir acerca de la composición de rotaciones?
- ¿Qué transformación resulta al componer rotaciones? ¿Siempre resulta esta transformación?

Sea el vértice $E(1, 5)$ del polígono $ABCDE$ y el ángulo $\alpha = 90^\circ$ y $\beta = 180^\circ$. Entonces,

$$R_{(0, 90^\circ)}(E) = (-5, 1) \quad \rightarrow \quad R_{(0, 180^\circ)}(R_{(0, 90^\circ)}(E)) = R_{(0, 180^\circ)}(-5, 1) = (5, -1)$$

Por otra parte,

$$\gamma = \alpha + \beta = 90^\circ + 180^\circ = 270^\circ \quad \rightarrow \quad R_{(0, 270^\circ)}(E) = (5, -1)$$

En resumen

Al componer dos o más rotaciones $R_{(0, \beta)} \circ R_{(0, \alpha)}(A)$ es equivalente a una rotación $R_{(0, \gamma)}$ donde $\gamma = \alpha + \beta$.

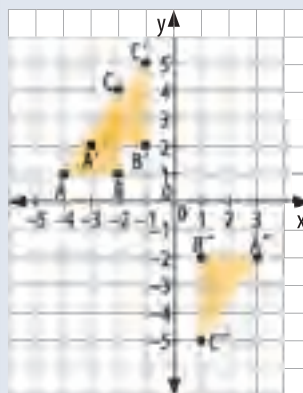
Repaso

1. **Aplica** la transformación isométrica que se pide.

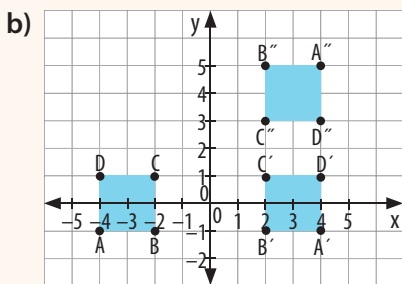
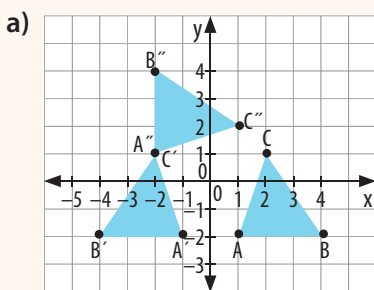
- | | |
|-------------------------------|--|
| a) $R_x(1, 3)$ | i) $R_{(0, -270^\circ)}(-9, -6)$ |
| b) $T_{(2, 3)}(1, 3)$ | j) $R_y(8, -6)$ |
| c) $R_{(0, 90^\circ)}(2, 9)$ | k) $T_{(-8, -9)}(-5, -6)$ |
| d) $R_y(9, 8)$ | l) $R_{(0, 90^\circ)}(0, -8)$ |
| e) $T_{(2, -4)}(9, -2)$ | m) $R_y(6, 4)$ |
| f) $R_{(0, 180^\circ)}(2, 4)$ | n) $R_x(-2, -3)$ |
| g) $R_x(-6, 2)$ | o) $R_{(0, -270^\circ)}(19, 5)$ |
| h) $T_{(0, 6)}(-2, 5)$ | p) $T_{(1, 1)}\left(-2, 5; \frac{5}{9}\right)$ |

Práctica guiada

2. **Identifica** las transformaciones isométricas involucradas en cada composición.



Traslación del $\triangle ABC$ según el vector $\vec{u} = (1, 1)$ y luego reflexión del $\triangle A'B'C'$ en torno al origen.



Aplico

3. Representa en el plano cartesiano el triángulo EFG con vértices E(3, 2), F(9, 2) y G(4, 7) y realiza lo pedido.

- Aplica la reflexión R_Y al triángulo EFG y obtén E'F'G'.
- Aplica la reflexión R_X al triángulo E'F'G' y obtén E''F''G''.
- Si tuvieras que obtener el triángulo E''F''G'' aplicando solo una transformación isométrica al triángulo EFG, ¿cuál sería? ¿Por qué?
- Si reflejaras EFG con respecto al eje X y luego con respecto al eje Y, ¿se obtendría el mismo polígono E''F''G''?
- Si se reflejara el polígono E''F''G'' con respecto al eje X y luego respecto al eje Y se obtendría el polígono EFG? ¿Por qué?
- ¿Qué propiedades se cumplen en la composición de reflexiones?

4. Representa en el plano cartesiano el triángulo de vértices A(1, -1), B(4, -3) y C(4, 3) y realiza lo pedido.

- Aplica la traslación $T_{(1, -6)}$ al triángulo ABC y obtén A'B'C'.

Reflexiono

- ¿Qué composición de transformaciones isométricas es conmutativa?
- ¿Qué composición de transformaciones isométricas es reversible, es decir, realizando el procedimiento inverso a la imagen se obtiene la figura original?

- Aplica la traslación $T_{(-8, -2)}$ al triángulo A'B'C' y obtén A''B''C''.
- Aplica la traslación $T_{(-3, 5)}$ al triángulo A''B''C'' y obtén A'''B'''C'''.
- Si tuvieras que obtener el triángulo A'''B'''C''' aplicando una sola transformación al triángulo ABC, ¿cuál sería? ¿Por qué?
- Comprueba si la composición de traslaciones es asociativa y/o conmutativa.

5. Representa en el plano cartesiano el rectángulo de vértices en A(-5, 1), B(-1, 1), C(-1, 3) y D(-5, 3) y realiza lo pedido.

- Aplica la rotación $R_{(0, 270^\circ)}$ al rectángulo ABCD y obtén A'B'C'D'.
- Aplica la rotación $R_{(0, -90^\circ)}$ al rectángulo A'B'C'D' y obtén A''B''C''D''.
- Aplica la rotación $R_{(0, -180^\circ)}$ al rectángulo A''B''C''D'' y obtén A'''B'''C'''D'''.
- Si tuvieras que obtener el rectángulo A'''B'''C'''D''' aplicando una sola transformación al rectángulo ABCD, ¿cuál sería? ¿Por qué?
- Comprueba si la composición de rotaciones es asociativa y/o conmutativa.

6. Resuelve la siguiente situación.

- Miguel es diseñador y debe cambiar la ubicación del almacén que diseñó en un plano de forma rectangular cuyas coordenadas son (3, 2), (4, 2), (4, 3) y (3, 3). El problema es que no recuerda si las indicaciones son: rotar su ubicación en 90° con respecto al punto (0, 0) y luego trasladarlo según el vector $\vec{a} = (0, 3)$, o al revés, trasladar el almacén y luego rotarlo. Finalmente, Miguel piensa que da lo mismo lo que se haga primero. ¿Es correcto lo que piensa? Realiza las dos posibles composiciones y luego argumenta.

7. Argumenta. De la afirmación: "Todas las transformaciones isométricas pueden ser resumidas por traslaciones". ¿Es correcta? Justifica tu respuesta.

Refuerzo

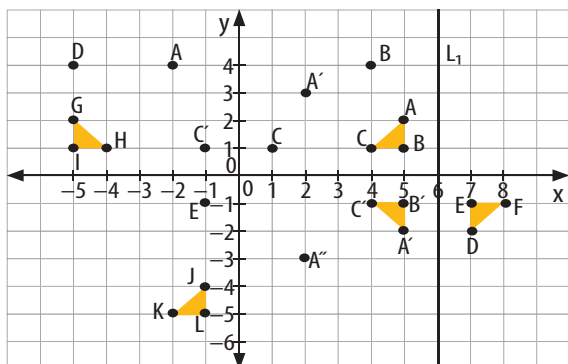
Realiza las siguientes composiciones de transformaciones isométricas.

- $R_X \circ T_{(1, 2)}(3, 5)$
- $R_Y \circ R_{(0, 90^\circ)}(2, 8)$
- $R_{(0, 180^\circ)} \circ T_{(2, 1)}(-1, 4)$
- $T_{(2, 0)} \circ R_X(1, 6)$



Identifican las regularidades al aplicar transformaciones isométricas en el plano cartesiano (Lecciones 31 y 33).

Observa la imagen y luego responde las preguntas 1, 2, 3 y 4:



1 Identifica las componentes del vector que ha trasladado los siguientes puntos.

- A hasta A'
- C hasta C'
- A' hasta A''
- D hasta E
- A hasta B
- C hasta D
- E hasta A'
- A'' hasta B

2 Identifica el eje de simetría que reflejó los siguientes puntos.

- C y C'
- A' y A''
- C' y E
- D y B

3 Identifica la transformación isométrica asociada a los siguientes pares de triángulos.

- Triángulos ABC y DEF.
- Triángulos ABC y A'B'C'.
- Triángulos JKL y ABC.
- Triángulos GIH y ABC.

4 Resuelve los siguientes problemas.

- ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del triángulo DEF al ser rotado en 180° respecto al origen?
- ¿Qué punto fue trasladado según el vector $\vec{u} = (-2, -7)$ si se obtuvo un punto de coordenadas $(2, -3)$?
- ¿Qué punto fue reflejado respecto del eje X, si se obtuvo un punto de coordenadas $(-2, 4)$?
- ¿Es posible que el triángulo ABC haya sido rotado para obtener el A'B'C'? ¿Por qué?

5 Aplica la reflexión de cada punto.

- $R_x(0, 7)$
- $R_x(2, 3)$
- $R_y(-1, 2)$
- $R_y(-3, -7)$
- $R_y(-2, 0)$
- $R_x(-4, -2)$

6 Aplica la rotación respecto al origen según el ángulo indicado.

- $R_{(0, 90^\circ)}(2, 2)$
- $R_{(0, 180^\circ)}(1, 2)$
- $R_{(0, 270^\circ)}(1, 1)$
- $R_{(0, 90^\circ)}(3, -2)$
- $R_{(0, 180^\circ)}(-1, -5)$
- $R_{(0, 270^\circ)}(5, -7)$
- $R_{(0, -90^\circ)}(3, 5)$
- $R_{(0, -180^\circ)}(-4, -5)$
- $R_{(0, -270^\circ)}(-9, -3)$
- $R_{(0, -360^\circ)}(-1, 2)$
- $R_{(0, -90^\circ)}\left(\frac{2}{3}, -6\right)$
- $R_{(0, 270^\circ)}\left(-\frac{4}{3}, \frac{10}{2}\right)$

7 Representa los puntos $(0, 4)$ y $(-2, 1)$ en el plano cartesiano y traza la recta que pasa por ellos. Luego, responde.

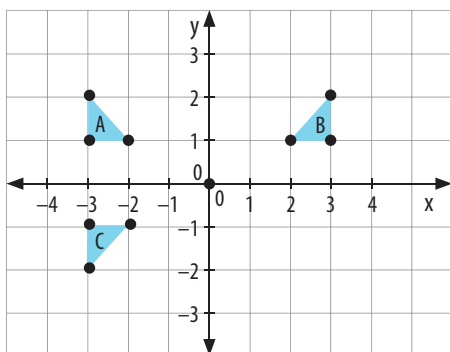
- Si los puntos $(0, 0)$ y $(2, y)$ determinan una recta paralela a la anterior, ¿cuál es el valor de y ?
- Si los puntos $(-4, y)$ y $(-6, 0)$ determinan una recta paralela a la recta de a., ¿cuál es el valor de y ?

Realizan composiciones de transformaciones isométricas reconociendo la figura resultante (Lección 34)

8 **Identifica** las coordenadas de los vértices de figuras, puntos o segmentos, luego de aplicar las siguientes transformaciones isométricas.

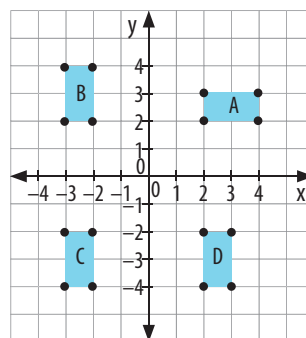
- Un cuadrilátero tiene sus vértices en los puntos $M(1, 3)$, $N(4, 2)$, $O(0, 6)$ y $P(2, 5)$ es trasladado según un vector $\vec{k} = (3, 0)$ y luego es rotado en 180° con respecto al origen.
- Un triángulo de vértices $W(-1, 0)$, $Z(2, 0)$ y $C(8, -3)$ es reflejado con respecto al eje Y , y luego es trasladado según el vector $\vec{t} = (2, -1)$.
- El punto $(1, -1)$ es trasladado según el vector $\vec{s} = (2, 6)$ en dos oportunidades consecutivas y luego es rotado en 270° con respecto al origen.
- El segmento de extremos $(1, 0)$ y $(2, -1)$ es rotado dos veces consecutivas respecto al centro, en un ángulo de 90° y luego en un ángulo de -270° respectivamente, para luego ser reflejado respecto del eje X .

Observa la imagen y luego responde las preguntas 9, 10, 11 y 12:



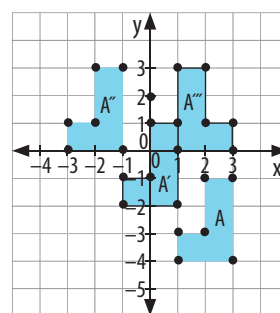
- 9** ¿Qué transformación se le aplicó a la figura A para obtener la figura C?
- 10** ¿Qué transformación se le aplicó a la figura B para obtener la figura A?
- 11** ¿Qué transformación se le aplicó a la figura B para obtener la figura C?
- 12** ¿Cuál es la composición de transformaciones que se debe aplicar a la figura A para obtener C, con la condición de que C sea imagen de B?

Observa la imagen y luego responde la pregunta 13.



- 13** ¿Cuál es la composición de transformaciones que se debe aplicar a la figura A para obtener D con la condición que D sea la imagen de C y C la imagen de B?

Observa la imagen y luego responde la pregunta 14.



- 14** ¿Cuál es la composición de transformaciones que se debe aplicar a la figura A para obtener A'' con la condición de A'' sea imagen de A' y que A' sea imagen de A?
- 15** **Identifica** la transformación que debieras realizar para ir desde la imagen a la preimagen en las siguientes situaciones.

- Un punto fue trasladado según el vector $\vec{i} = (5, 1)$. Luego, a la imagen se le aplicó una rotación en 90° respecto al origen.
- Un punto se reflejó a partir del eje Y , luego se trasladó la imagen por el vector $\vec{n} = (0, 2)$.
- Se rotó una figura en 180° respecto al origen y luego se trasladó la imagen según el vector $\vec{p} = (0, -2)$.
- Se rotó una figura en 270° respecto al origen, luego se reflejó la imagen con respecto al eje X .

Revisa tus respuestas en el solucionario al final del texto.



Problema

Oliver dibuja la planta de un edificio de forma rectangular en el plano cartesiano. Cuando estaba marcando los puntos que determinan los vértices de la planta del edificio se cortó la luz, y en ese instante recibió un llamado para saber el volumen que ocupará el edificio. Si Oliver solo recuerda los puntos $(1, 2)$ y $(7, 6)$ correspondientes a los extremos de la diagonal de la planta del edificio (el ancho y el largo son paralelos al eje de las abscisas y ordenadas respectivamente) y que la altura del edificio será de 10 m, ¿cuál sería el volumen del edificio?

Nota: La distancia entre cada punto del plano considerada por Oliver es de 10 metros en la realidad.

Paso 1 **Comprendo** ¿Qué entendiste del problema?

Se debe calcular el volumen del edificio.

Paso 2 **Planifico** ¿Qué harías para resolver el problema?

- Identificar los vértices que se desconocen del rectángulo que representa la planta del edificio.
- Para calcular el largo del rectángulo se debe calcular la variación de distancia entre las abscisas de aquellos puntos con igual ordenada.
- Para calcular el ancho del rectángulo se debe calcular la variación de distancia entre las ordenadas de aquellos puntos con igual abscisa.
- Identificar las medidas reales del edificio, para esto se debe multiplicar por 10 tanto la medida del largo como la medida del ancho del rectángulo.
- Calcular el volumen del edificio.

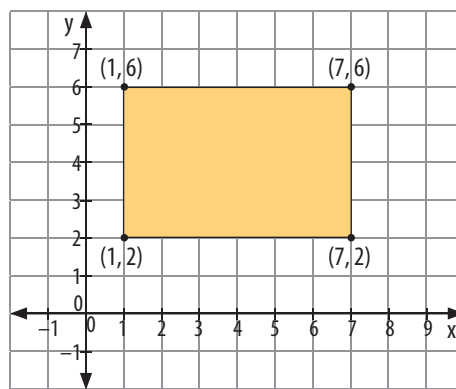
Paso 3 **Resuelvo** ¿Cómo ejecutarías la estrategia?

Al graficar los puntos $(1, 2)$ y $(7, 6)$ se obtiene que los otros vértices corresponden a las abscisas y ordenadas intercambiadas entre estos puntos.

La distancia entre las abscisas cuyos puntos tienen igual ordenada corresponde al largo del rectángulo.

Se realiza el mismo procedimiento con las ordenadas de aquellos puntos que tienen igual abscisa.

Se amplificar por 10 el largo y el ancho obtenido para determinar las medidas reales del edificio y luego se multiplican largo, ancho y alto para obtener el volumen.



$$4 \cdot 10 = 40$$

$$6 \cdot 10 = 60$$

$$40 \cdot 60 \cdot 10 = 24\,000$$



René Descartes (1596 -1650), es un célebre filósofo y matemático francés creador de la geometría analítica que quiso fundamentar su pensamiento filosófico en el método de tomar un «punto de partida» para poder validar y sostener sus argumentos. Para ello creo un sistema de referencia, mas conocido como plano cartesiano, que le permitía representar la geometría plana.

Paso 4 **Reviso** ¿Cómo saber que es correcto el resultado?

Se puede calcular el volumen del edificio calculando el área de la planta, luego amplificando por 100 (que equivale a 10^2) y por último multiplicando por el alto del edificio.

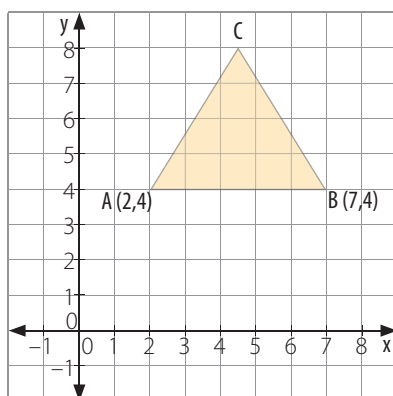
$$4 \cdot 6 = 24 \rightarrow 24 \cdot 100 = 2400 \rightarrow 2400 \cdot 10 = 24\,000$$

Paso 5 **Comunico** ¿Cómo interpretas el resultado obtenido?

El volumen del edificio será de $24\,000 \text{ m}^3$.

Resuelve los siguientes problemas.

1. ¿Cuál será la medida del cuarto vértice de un rectángulo cuyas coordenadas son $(1, 1)$, $(1, 6)$ y $(8, 1)$? ¿Cuál es el perímetro de este rectángulo? ¿Cuál es su área?
2. Si los vértices de la diagonal de un cuadrado son $(-7, 2)$ y $(-11, 6)$ y sus lados son paralelos al eje X y al eje Y, ¿cuál es su perímetro? ¿Cuál es su área?
3. La base de un triángulo isósceles tiene sus vértices en los puntos $A(-11, -2)$ y $B(-7, -2)$ y el punto $C(-9, 2)$ es su tercer vértice ¿Cuál es el área del triángulo?
4. Se tiene un triángulo rectángulo cuyos vértices que no están en el ángulo recto son $(2, 3)$ y $(10, -3)$.
 - a) ¿Cuál es la coordenada del vértice del ángulo recto?
 - b) ¿Cuál es el área y el perímetro de este triángulo?
5. Observa el triángulo ABC isósceles de base $\overline{AB}$:



¿Cuál será la coordenada del tercer vértice C si sabemos que su área es de $12,5 \text{ u}^2$?

6. Los tres vértices de un romboide son $A(-3, -4)$, $C(4, 2)$ y $D(-2, 2)$ ¿Cuáles son las coordenadas del vértice faltante? ¿Cuál es el perímetro del romboide? ¿Y su área?
7. Una circunferencia de centro $O(0, 0)$ pasa por el punto $P(0, -4)$. ¿Cuál es el perímetro de dicha circunferencia? ¿Cuál es su área?
8. Francisca debe calcular el volumen que ocupará una caja con forma de cubo. Ella dibuja en un plano cartesiano los vértices de la diagonal de una de sus caras, correspondientes a $A(2, 1)$ y $C(4, 3)$ ¿Cuál es la capacidad que tendrá la caja? Si ella debe cubrir la caja con lentejuelas de $0,5 \text{ mm}$ de diámetro, ¿cuál es la superficie que tendrá que rellenar? ¿Cuántas lentejuelas una al lado de la otra se tendrán que ocupar para rellenar la superficie del cubo? Ten en cuenta que la distancia entre cada punto del plano cartesiano considerada por Francisca es de 2 cm .
9. Juan quiere guardar bombones en una caja con forma de prisma triangular. Él ha dibujado las coordenadas de la base triangular en el plano cartesiano con vértices $A(-2, 1)$, $B(1, 2)$ y $C(-0,5; 3,6)$. Si la altura de la caja es de 20 cm , ¿cuál es el volumen de la caja considerando que la distancia entre cada punto del plano cartesiano es de $0,5 \text{ cm}$?

Reflexiona

- ¿Podrías haber determinado el valor de las longitudes del rectángulo sin tener que determinar todos los vértices de la figura?
- ¿Qué piensas del procedimiento utilizado para determinar coordenadas desconocidas? ¿Se puede extender a cualquier figura?

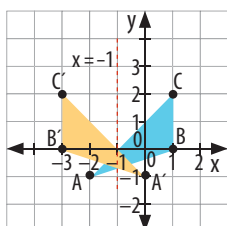
Palabra clave

➔ Congruencia.

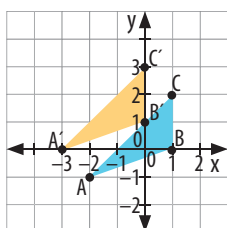
Repasa

Transformaciones isométricas

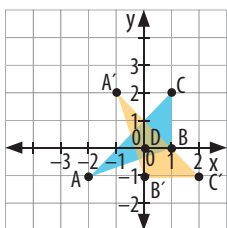
Reflexión $R_{x=-1}$ del $\triangle ABC$.



Traslación $T_{(-1, 1)}$ del $\triangle ABC$.



Rotación $R_{(0, 270^\circ)}$ del $\triangle ABC$.



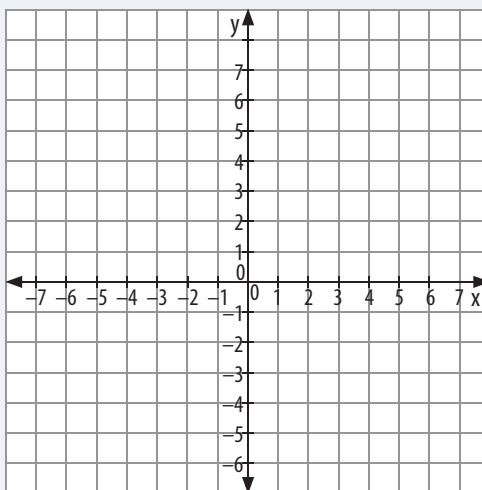
¿Cuándo dos figuras son congruentes?

- Si dibujaras una figura, ¿cómo podrías obtener una figura exactamente igual a esta sin calcarla?

Taller

Reúnanse en parejas y realicen la siguiente actividad.

- Dibujen en el plano cartesiano el triángulo de vértices $A(1, 2)$, $B(4, 2)$ y $C(4, 5)$ y apliquen la traslación $T_{(-3, 0)}$ para obtener el triángulo $A'B'C'$.



Materiales

- Transportador
- Regla

- Completen la tabla con las medidas de los lados y ángulos de los triángulos anteriores utilizando una regla y un transportador.

Lado AB		Lado A'B'		$\angle CBA$		$\angle C'B'A'$	
Lado BC		Lado B'C'		$\angle BAC$		$\angle B'A'C'$	
Lado CA		Lado C'A'		$\angle ACB$		$\angle A'C'B'$	

Razona

y comenta

- Al comparar las medidas de los lados de los triángulos, ¿qué sucede?
- Al comparar las medidas de los ángulos de los triángulos, ¿qué sucede?
- Calculen el área de cada triángulo y compárenlas. ¿Qué pueden concluir?

- Al triángulo ABC apliquen la reflexión R_x para obtener el triángulo $A''B''C''$. Utilicen el plano cartesiano anterior.

- Completen la tabla con las medidas de los lados y ángulos de los triángulos ABC y $A''B''C''$ utilizando una regla y un transportador.

Lado AB		Lado A''B''		$\angle CBA$		$\angle C''B''A''$	
Lado BC		Lado B''C''		$\angle BAC$		$\angle B''A''C''$	
Lado CA		Lado C''A''		$\angle ACB$		$\angle A''C''B''$	

Razona

y comenta

- Al comparar las medidas de los lados de los triángulos ABC y A''B''C'', ¿qué sucede?
- Al comparar las medidas de los ángulos de los triángulos ABC y A''B''C'', ¿qué sucede?
- Calculen el área del triángulo A''B''C'' y compárenla con el área del triángulo ABC, ¿qué pueden concluir?

- Al triángulo ABC apliquen la rotación $R_{(O, 180^\circ)}$ para obtener el triángulo A''B''C''. Utilicen el plano cartesiano anterior.
- Completen la tabla con las medidas de los lados y ángulos de los triángulos ABC y A''B''C'' utilizando una regla y un transportador.

Lado AB		Lado A''B''		$\angle CBA$		$\angle C''B''A''$	
Lado BC		Lado B''C''		$\angle BAC$		$\angle B''A''C''$	
Lado CA		Lado C''A''		$\angle ACB$		$\angle A''C''B''$	

Razona

y comenta

- Al comparar las medidas de los lados de los triángulos ABC y A''B''C'', ¿qué sucede?
- Al comparar las medidas de los ángulos de los triángulos ABC y A''B''C'', ¿qué sucede?
- Calculen el área del triángulo A''B''C'' y compárenla con el área del triángulo ABC, ¿qué pueden concluir?
- ¿Qué pueden concluir con respecto a los triángulo ABC, A'B'C', A''B''C'' y A'''B'''C'''?

Observa

Por lo general, se utilizan los siguientes símbolos en geometría:
 Δ : Triángulo. $\angle$: Ángulo.

Observa

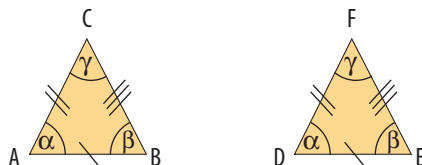
Los **elementos homólogos** son los que tienen la misma posición en figuras de igual forma. Por ejemplo, el lado $\overline{AB}$ es homólogo al lado $\overline{A''B''}$.

Observa

Dos segmentos son congruentes si tienen la misma longitud.
 Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida.

En resumen

Dos figuras geométricas se considerarán **congruentes** ($\cong$) si y solo si tienen la misma forma y tamaño. Utilizando transformaciones isométricas es posible obtener una figura congruente a otra dada. Se dirá que dos polígonos tienen igual forma y tamaño si todos los elementos de uno, es decir sus lados y ángulos son congruentes con los elementos correspondientes u homólogos del otro.



En este caso, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, lo que es distinto e incorrecto a $\triangle ABC \cong \triangle EFD$.

El lado $\overline{AB}$ es homólogo al lado $\overline{DE}$ y ambos tienen la misma medida, por lo tanto, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$.

El lado $\overline{BC}$ es homólogo al lado $\overline{EF}$ y ambos tienen la misma medida, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$.

El lado $\overline{CA}$ es homólogo al lado $\overline{FD}$ y ambos tienen la misma medida, $\overline{CA} \cong \overline{FD}$.

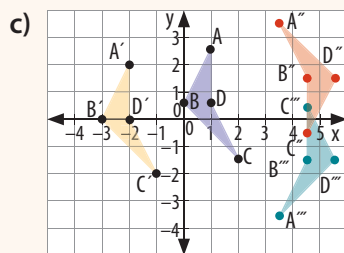
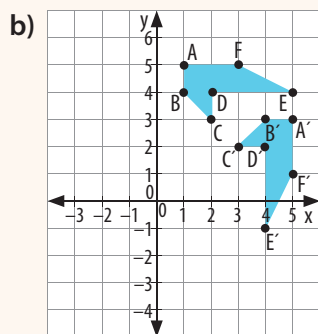
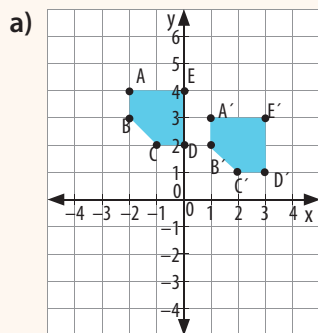
El $\angle BAC$ es homólogo al $\angle EDF$ y ambos miden α , por lo tanto, $\angle BAC \cong \angle EDF$.

El $\angle CBA$ es homólogo al $\angle FED$ y ambos miden β , por lo tanto, $\angle CBA \cong \angle FED$.

El $\angle ACB$ es homólogo al $\angle DFE$ y ambos miden γ , por lo tanto, $\angle ACB \cong \angle DFE$.

Repaso

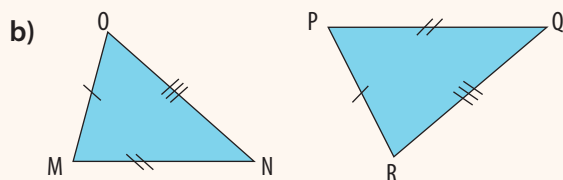
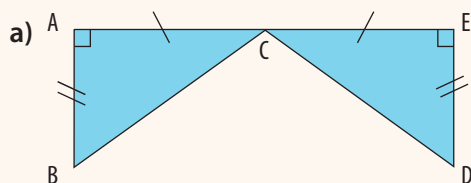
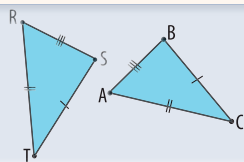
1. **Identifica** la transformación(es) isométrica(s) aplicada(s).



Práctica guiada

2. **Identifica** los lados y ángulos homólogos en cada par de triángulos.

$$\begin{aligned} \overline{RS} &\cong \overline{AB} & \angle RST &\cong \angle ABC \\ \overline{ST} &\cong \overline{BC} & \angle STR &\cong \angle BCA \\ \overline{TR} &\cong \overline{CA} & \angle TRS &\cong \angle CAB \end{aligned}$$



3. **Analiza** la situación a partir de dos hexágonos congruentes ABCDEF y PQRSTU.

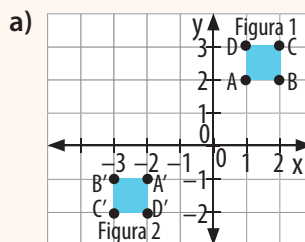
- Dibuja ambos polígonos. Luego compara tu representación con la de un compañero(a).
- ¿Qué ángulo es congruente con el ángulo BCD?
- ¿Cómo puedes saber, sin dibujarlo, qué ángulo es congruente con el ángulo de vértice E? Explica.
- Completa, según corresponda, la congruencia entre los elementos de los hexágonos.

$$\angle EFA \cong \angle ? \quad \overline{ED} \cong \overline{?}$$

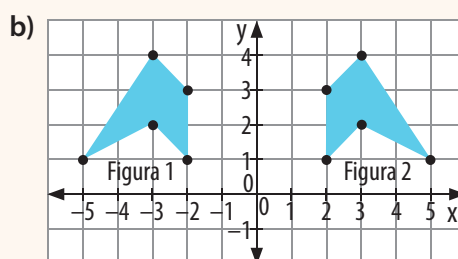
$$\angle DCB \cong \angle ? \quad \overline{BC} \cong \overline{?}$$

$$\angle FAB \cong \angle ? \quad \overline{SR} \cong \overline{?}$$

4. **Analiza** cada situación. Luego responde.



- ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices de la figura 1 y de la figura 2?
- ¿Qué transformación se aplicó sobre la figura 1 para obtener la figura 2?
- ¿Son congruentes la figura 1 y la figura 2? ¿Por qué?



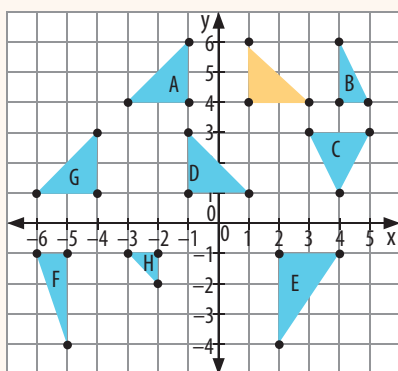
- ¿Qué transformación se aplicó sobre la figura 1 para obtener la figura 2?
- ¿Son congruentes? Justifica.

Aplico

5. **Resuelve** los siguientes problemas.

- Gabriela quiere saber si dos cuadrados son congruentes. El primer cuadrado tiene coordenadas A(4, 2), B(5, 2), C(5, 3) y D(4, 3) y el segundo E(-2, 4), F(-2, 5), G(-3, 5) y H(-3, 4). Miguel le propone que identifique alguna transformación isométrica que se le haya aplicado a uno de los cuadrados para obtener el otro.

- ¿Por qué Miguel le da este consejo a Gabriela?
 - ¿Existe esta transformación isométrica?
 - ¿Los cuadrados son congruentes?
- b) Camila está diseñando la teselación que tendrán los ventanales de una iglesia. Para ello utiliza un programa computacional que le permite trasladar la figura inicial y así repetir el modelo. El triángulo que formará el diseño tiene coordenadas $A(5, 1)$, $B(5, 3)$, $C(4, 1)$ y es trasladado por el vector $\vec{g} = (-1, 0)$. En una de las traslaciones se obtuvo la imagen de coordenadas $A'(4, 1)$, $B'(3, 2)$ y $C'(4, 3)$. Al ver estas coordenadas Camila señaló que el programa no funcionaba bien porque los triángulos no son congruentes.
- ¿Cómo supo ella que los triángulos no eran congruentes?
 - ¿Cuáles debían ser las coordenadas correctas de dicho triángulo?
- c) Antonio estaba realizando una tarea de Matemática en un procesador geométrico, la cual consistía en trasladar, rotar y reflejar un triángulo. Después de terminar la tarea se fue a tomar once con su papá. Al volver, su hermana Matilde había dibujado muchos triángulos sobre la tarea de Antonio, como lo muestra el dibujo.



Si el triángulo original es el de color amarillo:

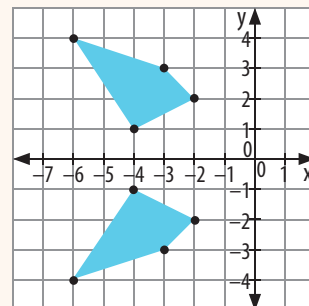
- ¿qué figuras debiera descartar Antonio para quedarse solo con las que se le aplicó alguna transformación isométrica?

Reflexiono

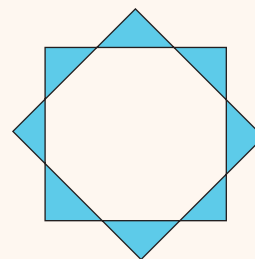
- ¿Qué características deben cumplir dos figuras para afirmar su congruencia?
- Si dos figuras tienen igual área ¿se puede afirmar que son congruentes?

- De las figuras que no descartaste, ¿qué transformación se le aplicó al triángulo original para obtener cada una de ellas?

6. **Conecta.** ¿En qué te fijarías para saber si un círculo es congruente con otro? ¿Cómo pueden utilizar las transformaciones isométricas en este caso?
7. **Descubre el error.** Se señala que todos los cuadrados son congruentes porque todos cumplen con la misma condición, tener lados de igual medida y ángulos rectos. ¿Cómo podrías demostrar a Gabriela que su proposición es incorrecta?
8. **Describe el procedimiento.** Describe el procedimiento que realizarías para establecer cuáles son los lados y los ángulos homólogos de dos cuadriláteros congruentes. Luego, traza las diagonales en cada cuadrilátero y describe cómo se establecen los lados y ángulos homólogos de los pares de triángulos congruentes que se forman.
9. **Argumenta.** Argumenta por qué los polígonos de la imagen son congruentes.



10. **Desafío.** Explica las condiciones que se deben cumplir para que los 8 triángulos sean congruentes y para que la figura del centro sea un octágono regular.



Refuerzo

Un cuadrado tiene un vértice en el origen y lado 3 unidades del plano cartesiano. La diagonal de otro cuadrado tiene vértices en los puntos $(5, 5)$ y $(8, 8)$. ¿Son congruentes ambos cuadrados? ¿Cómo podrías asegurar la congruencia?

Palabras clave

- ➔ Criterios de congruencia en triángulos.

¿Cuál es la mínima información para concluir que dos figuras son congruentes?

- Seguramente has escuchado hablar de la propiedad de triangulación en los polígonos ¿En qué figura se pueden descomponer los polígonos?

Taller

Reúnanse en parejas y realicen la siguiente actividad.

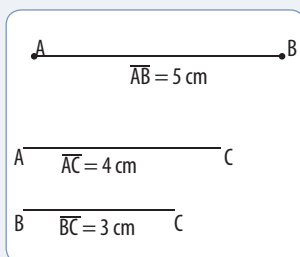
Criterio Lado-Lado-Lado (LLL)

1. Construyan un triángulo ABC cuyos lados midan 5 cm, 4 cm y 3 cm. Para esto sigan los pasos:

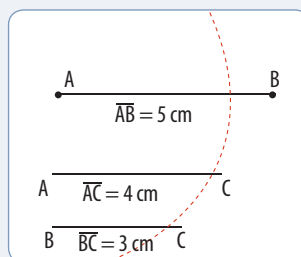
Materiales

- Transportador
- Regla
- Compás

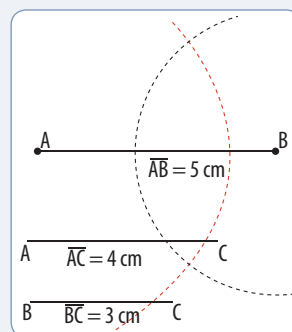
Paso 1 Tracen con la regla un segmento que mida 5 cm (segmento $\overline{AB}$), uno que mida 4 cm ($\overline{AC}$) y otro que mida 3 cm ($\overline{BC}$).



Paso 2 Tracen con el compás un arco de circunferencia con centro en A y radio 4 cm (segmento $\overline{AC}$).



Paso 3 Tracen con el compás un arco de circunferencia con centro en B y radio 3 cm (segmento $\overline{BC}$).



2. Marquen los puntos de intersección entre los arcos de circunferencia y nómbralos C y C'.

Razona

y comenta

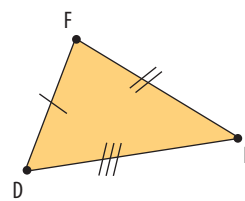
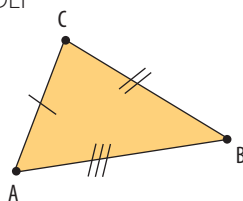
- Con respecto a los puntos C y C', ¿cuál de ellos podría corresponder al tercer vértice del triángulo? ¿Por qué?
- Al unir los puntos A y B con los puntos de intersección, ¿qué triángulos se forman? ¿Cómo son entre sí? Justifica.
- En conclusión, ¿es posible construir dos triángulos congruentes a partir de la medida de sus tres lados?

En resumen

Para determinar la congruencia entre triángulos puedes utilizar los **criterios de congruencia** que corresponden a la mínima información necesaria para asegurarla.

El criterio de congruencia **lado - lado - lado (LLL)** indica que dos triángulos son congruentes si tienen sus 3 lados respectivamente congruentes, es decir, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

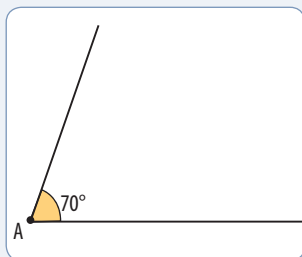
Entonces, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



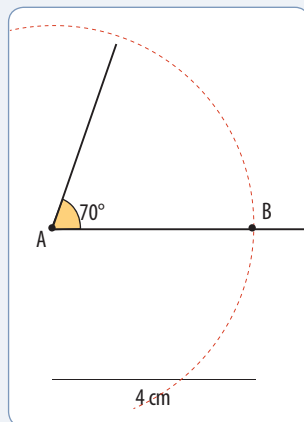
Criterio Lado-Ángulo-Lado (LAL)

1. Construyan un triángulo ABC con dos de sus lados de medidas 5 cm y 4 cm y el ángulo comprendido entre ellos $\alpha = 70^\circ$. Para esto sigan los pasos:

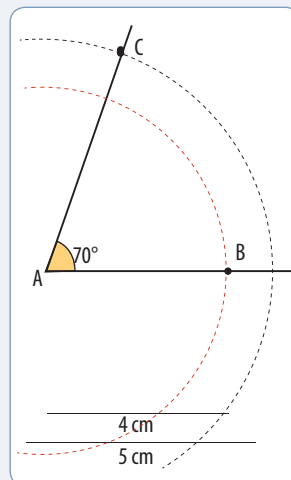
Paso 1 Construyan con el transportador el ángulo $\alpha = 70^\circ$ y nombren el vértice A.



Paso 2 Tracen con el compás un arco de circunferencia con centro en A y radio 4 cm para encontrar el punto B.



Paso 3 Tracen con el compás un arco de circunferencia con centro en A y radio 5 cm para encontrar el punto C.



2. Marquen los puntos de intersección entre los rayos del ángulo y los arcos de circunferencia.
3. Nombren B' y B a los puntos de intersección entre los rayos y la circunferencia de radio 4 cm.
4. Nombren C' y C a los puntos de intersección entre los rayos y la circunferencia de radio 5 cm.

Razona

y comenta

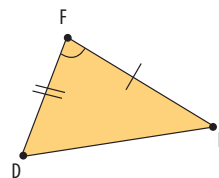
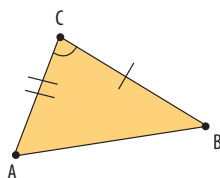
- Al unir los puntos A, B y C; y los puntos A, B' y C', ¿cuántos triángulos se pueden construir? ¿Por qué?
- ¿Cómo son entre sí estos triángulos? Justifica tu respuesta.
- En conclusión, ¿es posible construir dos triángulos congruentes a partir de la medida de dos lados y el ángulo comprendido entre ellos?

En resumen

El criterio **lado - ángulo - lado (LAL)** indica que dos triángulos son congruentes si tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos respectivamente congruentes, es decir,

$$\overline{CA} \cong \overline{FD}, \angle BCA \cong \angle FED, \overline{BC} \cong \overline{FE}$$

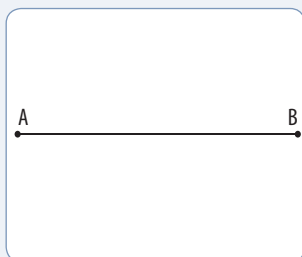
Entonces, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



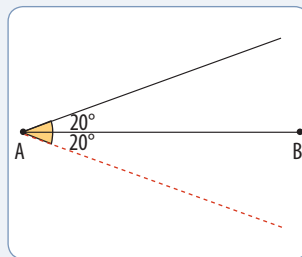
Criterio Ángulo - Lado - Ángulo (ALA)

1. Construyan un triángulo ABC con dos ángulos de medida $\alpha = 20^\circ$ y $\beta = 50^\circ$ y cuyo lado adyacente $\overline{AB}$ mida 5 cm. Para esto sigan los pasos:

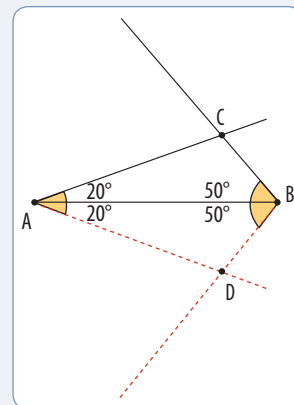
Paso 1 Tracen el segmento $\overline{AB}$ con la regla y que mida 5 cm.



Paso 2 Con el transportador construyan el ángulo $\alpha = 20^\circ$ con vértice en A.



Paso 3 Con el transportador construyan el ángulo $\beta = 50^\circ$ con vértice en B.



2. Marquen los puntos de intersección entre los rayos de los ángulos.

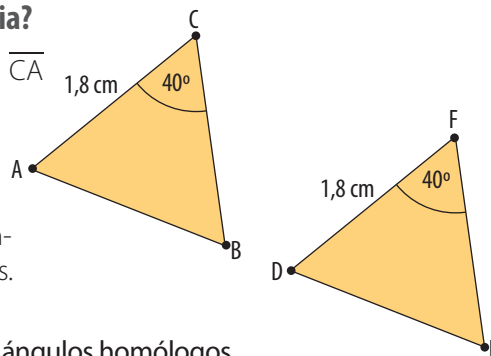
Razona**y comenta**

- Al marcar los puntos de intersección, ¿cuántos triángulos se forman? ¿Por qué?
- ¿Cómo son entre sí estos triángulos? Justifica tu respuesta.
- En conclusión, ¿es posible construir dos triángulos congruentes a partir de la medida de dos ángulos y el lado adyacente a ellos?

¿Cómo aplicar los criterios de congruencia?

El triángulo ABC es isósceles de base $\overline{CA}$ y el triángulo DEF es isósceles de base $\overline{FD}$. Los triángulos ABC y DEF, ¿serán congruentes?

Para determinar si los triángulos son congruentes puedes seguir los siguientes pasos.



Paso 1 Identificar los lados homólogos y ángulos homólogos.

El lado $\overline{CA}$ es homólogo al lado $\overline{FD}$.

El lado $\overline{BC}$ es homólogo al lado $\overline{EF}$.

El lado $\overline{AB}$ es homólogo al lado $\overline{DE}$.

El $\angle BCA$ es homólogo al $\angle EFD$.

El $\angle CAB$ es homólogo al $\angle FDE$.

El $\angle ABC$ es homólogo al $\angle DEF$.

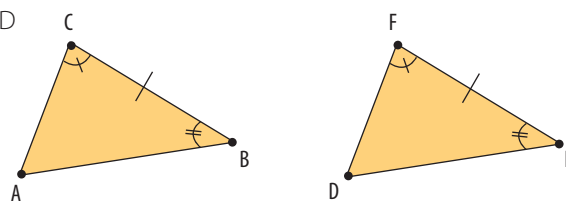
Ambos son bases de los triángulos isósceles.

En resumen

El criterio **ángulo – lado – ángulo (ALA)** indica que dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos y el lado adyacente a ellos respectivamente congruentes, es decir:

$$\angle ABC \cong \angle DEF, \overline{BC} \cong \overline{EF}, \angle BCA \cong \angle EFD$$

Entonces, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



Paso 2 Identificar los lados y ángulos que sean congruentes.

El lado $\overline{CA}$ es congruente al lado $\overline{FD}$, ya que ambos miden 1,8 cm.

El $\angle BCA$ es congruente al $\angle EFD$, ya que ambos miden 40° .

El $\angle CAB$ mide 40° porque está en la base del triángulo ABC isósceles, por lo tanto, su homólogo el $\angle FDE$ es congruente, ya que mide 40° por la misma razón.

Observa

Generalmente cuando se quiere aludir a una medida se denota $m(\text{objeto})$. Por ejemplo $m(\overline{AB})$ indica la medida del segmento o lado AB.

Paso 3 Identificar el criterio por el cual afirmar la congruencia.

Dado que se tienen los ángulos y el lado adyacente a ellos congruentes en los triángulos, se puede afirmar la congruencia por medio del criterio ALA.

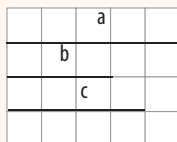
Por lo tanto, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Repaso

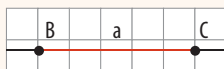
1. **Construye** un triángulo dadas las medidas de sus lados. Sigue los pasos indicados.

Triángulo de lados 5 cm, 3 cm y 4 cm.

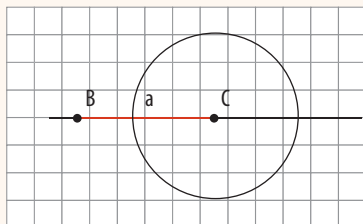
Paso 1: Dibuja tres segmentos con las medidas dadas y nómbralos (a, b y c).



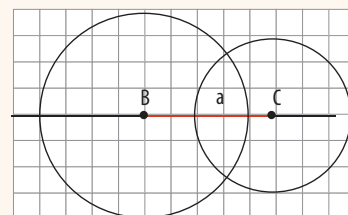
Paso 2: Dibuja una recta, y sobre ella copia el segmento **a** con el compás, colocando la punta del instrumento en uno de los extremos del segmento **a**, y abriendo el compás hasta llegar al otro extremo. Luego, copia la abertura del compás sobre la recta dibujada, marcando el inicio y el final de la abertura. Los extremos de este serán los vértices B y C del triángulo.



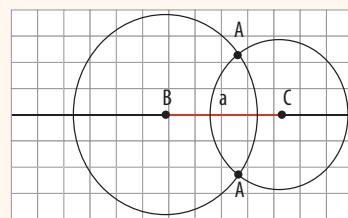
Paso 3: Mide con el compás el segmento **b**. Coloca la punta del compás en el vértice C y traza una circunferencia.



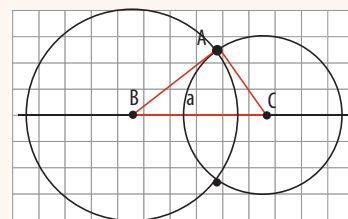
Paso 4: Mide con el compás el segmento **c**. Coloca la punta del compás en el vértice B y traza una circunferencia.



Paso 5: Los puntos de intersecciones de las circunferencias corresponden al vértice A del triángulo.



Paso 6: Escoge uno de dichos puntos para el vértice A, y desde ahí, une el vértice B y el vértice C, y obtendrás el triángulo ABC.

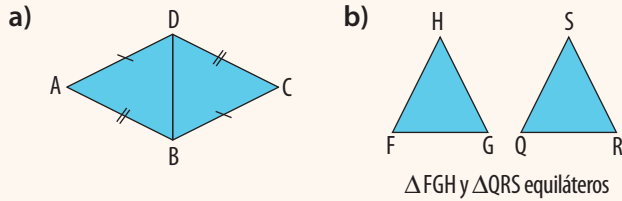
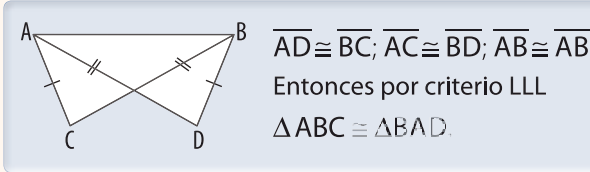


Realiza la construcción para los siguientes triángulos:

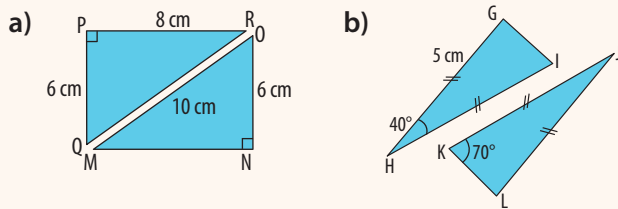
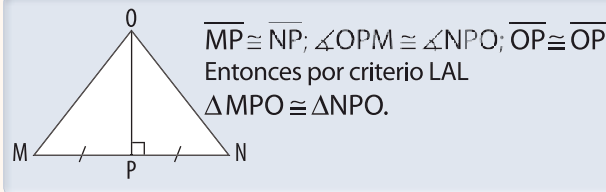
- a) Triángulo de lados 7, 9 y 10 cm.
- b) Triángulo de lados 2, 6 y 7 cm.
- c) Triángulo de lados 8, 13, 20 cm.

Práctica guiada

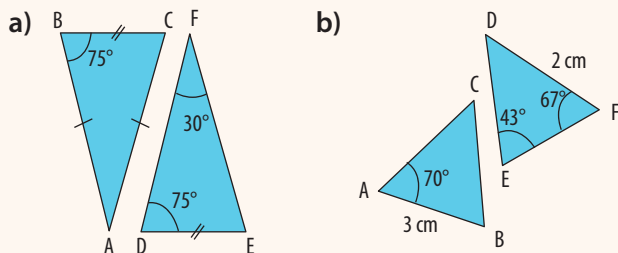
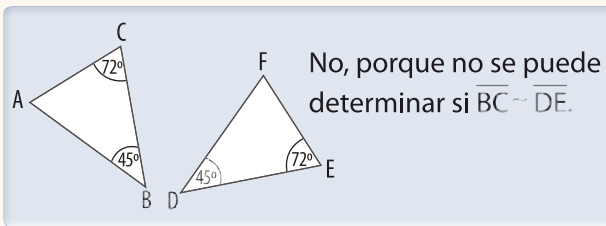
2. **Identifica** los pares de triángulos congruentes utilizando el postulado LLL.



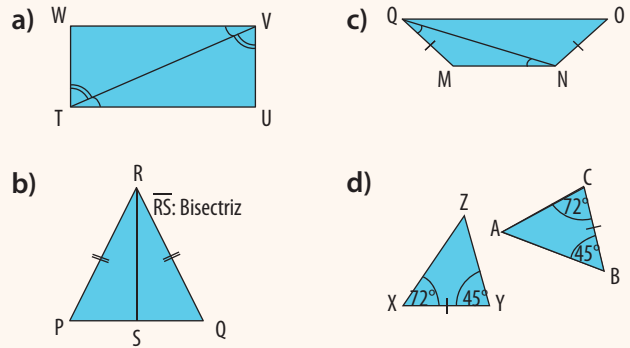
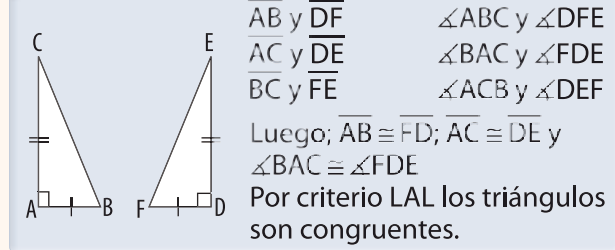
3. **Identifica** los pares de triángulos congruentes utilizando el postulado LAL.



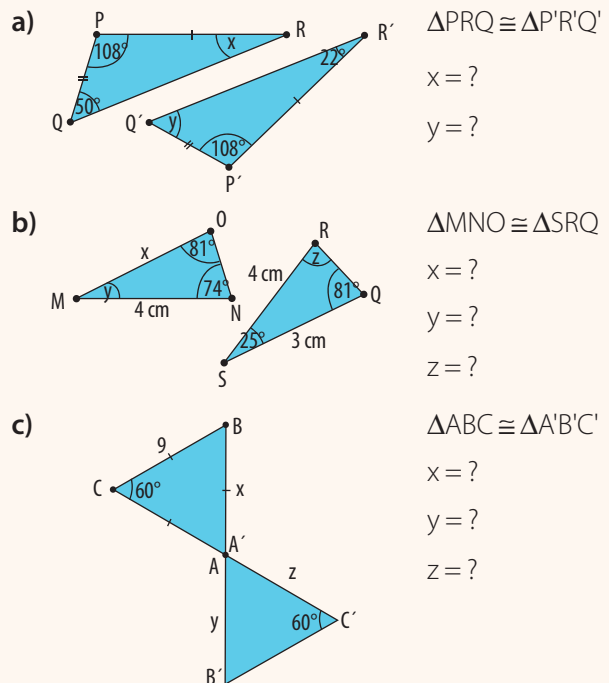
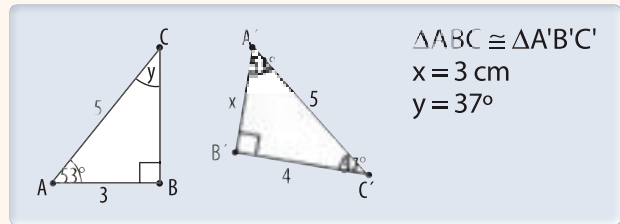
4. **Identifica** los pares de triángulos congruentes utilizando el postulado ALA.



5. **Identifica** los elementos homólogos en los siguientes pares de triángulos. Luego indica aquellos congruentes y el criterio que utilizaste.



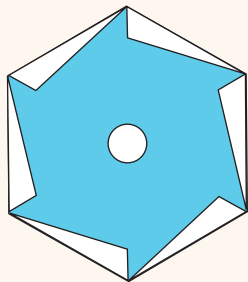
6. **Calcula** la medida pedida a partir de la congruencia de las figuras.



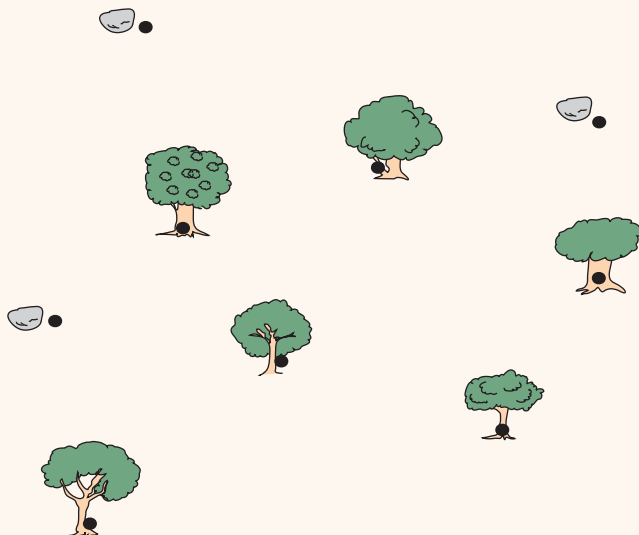
Aplico

7. Resuelve los siguientes problemas.

- a) La hoja de sierra que aparece en la imagen se confecciona a partir de un hexágono regular al que se le cortan 6 triángulos rectángulos.



- ¿Cuál es la mínima información que se necesita para determinar que los triángulos que se cortan son congruentes?
 - ¿Qué criterios de congruencia se pueden aplicar para argumentar lo anterior?
- b) La imagen a continuación representa el mapa de un tesoro. Para encontrar el lugar donde este se halla se debe identificar un triángulo formado por tres árboles, congruente al triángulo formado por las rocas que aparecen en el mapa. El tesoro se encuentra en el sector que comparten ambos triángulos.



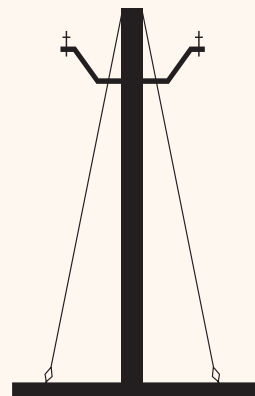
Reflexiono

- ¿Es correcto decir que todos los cuadrados son congruentes? ¿Por qué? Justifica tu respuesta.
- Investiga el nombre y las características de los cuerpos poliedros que se forman a partir de polígonos congruentes, por ejemplo, el tetraedro.

- Utiliza los criterios de congruencia para justificar la congruencia entre el triángulo formado por los árboles y el triángulo formado por las rocas.
- Marca con una x el lugar donde se encuentra el tesoro.

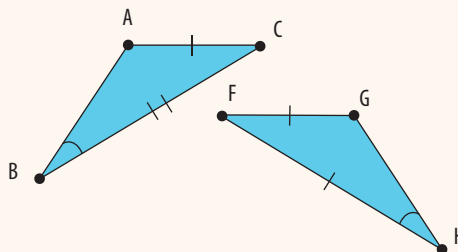
8. **Conecta.** Cuando se fotocopia una hoja, tres puntos arbitrarios A,B,C de la superficie de la hoja original corresponden a tres puntos A', B', C' de la hoja que resultó de la impresión ¿Qué relación hay entre el triángulo ABC y el triángulo A'B'C'?

9. **Desafío.** El poste de la luz de un tendido eléctrico es perpendicular al suelo. ¿Qué condiciones han de cumplirse para asegurar que los cables que parten desde el extremo superior del poste y se afirman a tierra sean de igual longitud?



10. **Descubre el error.** Para determinar si dos triángulos son congruentes Matías midió los segmentos y el ángulo que se muestra en la imagen.

A partir de esta información concluyó que los triángulos ABC y GHF eran congruentes por el criterio LLA. ¿Es correcto lo que señala Matías? Justifica.



Refuerzo

Jacinto quiere cortar un trozo de alfombra de forma triangular del mismo tamaño que otro que tiene en otra alfombra ¿Qué medidas son necesarias y suficientes para poder cortar el triángulo que necesita?

Palabra clave

➔ Demostración.

Repasa

Elementos secundarios de un triángulo

- **Bisectriz:** es el rayo que comienza en el vértice de uno de los ángulos y que divide a éste en dos ángulos congruentes.
- **Altura:** es el segmento de recta que une el vértice de un triángulo y es perpendicular al lado opuesto o prolongación de éste.
- **Transversal de gravedad:** es el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto de dicho vértice.
- **Simetral o mediatriz:** es la recta perpendicular al lado de un triángulo en su punto medio.
- **Mediana:** es un segmento de recta que une los puntos medios de los lados de un triángulo.

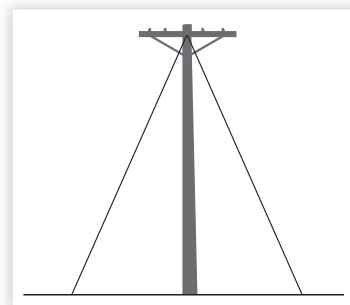
Observa

Teorema es una proposición que puede ser demostrada.

¿Cómo se realiza una demostración utilizando congruencia?

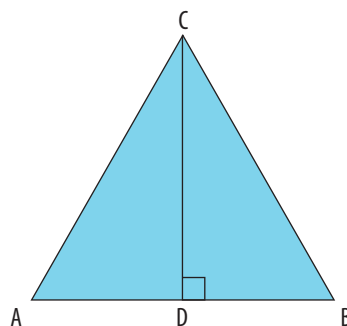
- El célebre matemático Euclides fue el primero en presentar la Geometría de una manera organizada y lógica, él demostró muchos teoremas mediante el razonamiento deductivo ¿Qué características tendrá este razonamiento?

Jaime está colocando un cableado para sostener un poste como muestra la figura. El poste forma con el suelo (horizontal) un ángulo recto.



Su amigo Mario le indica que si coloca el cable, que va en el suelo, dejando la misma longitud a ambos lados del poste, entonces los cables laterales que se unen en la parte superior del poste también serán de igual longitud. Jaime, un poco escéptico, le pide a su amigo que se lo demuestre antes de realizar el trabajo.

En realidad, lo que Mario debe demostrar es el teorema que dice: "Si en el $\triangle ABC$, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ y D es punto medio de $\overline{AB}$, entonces $\overline{AC} \cong \overline{BC}$."



Para realizar una demostración matemática de algún teorema o propiedad se pueden seguir los siguientes pasos.

Paso 1 ➔ Identificar la hipótesis y la tesis del teorema.

Hipótesis: En el $\triangle ABC$, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$.
D es punto medio de $\overline{AB}$.

Tesis: $\overline{AC} \cong \overline{BC}$

Paso 2 ➔ Realizar la demostración y justificar cada afirmación.

Afirmaciones	Justificaciones
Si $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ entonces $\angle ADC$ y $\angle BDC$ miden 90° .	Por hipótesis.
$\overline{CD}$ es lado común de $\angle BDC$ y $\angle ADC$.	Por construcción de ángulos.
Si D es punto medio entonces $\overline{AD} \cong \overline{BD}$.	Por hipótesis y por concepto de congruencia.
Los triángulos DCA y DCB son congruentes.	Por criterio LAL.
Entonces, $\overline{AC} \cong \overline{BC}$.	Queda demostrado (q. e. d.).

Por lo tanto, Jaime puede estar seguro que los cables laterales serán de igual longitud.

Razona

y comenta

- ¿Qué diferencia existe entre la hipótesis y la tesis?
- ¿Por qué piensas que es necesario justificar cada afirmación de la demostración?
- ¿Qué se debe obtener al finalizar una demostración?

Observa

Generalmente la proposición que se va a demostrar está de forma condicional, es decir, "Si p sucede, entonces q sucede", siendo p la hipótesis y q la tesis.

En resumen

Para realizar una demostración se deben realizar los pasos anteriormente descritos donde están involucrados los siguientes elementos:

- Hipótesis:** datos del enunciado de la proposición que se asumen verdaderos.
- Tesis:** lo que se quiere demostrar. Para llegar de la hipótesis a la tesis se utiliza un procedimiento llamado demostración.
- Demostración:** es una sucesión finita de afirmaciones fundamentadas por definiciones, axiomas y criterios ligados mediante un razonamiento lógico que conduce a la tesis.

Práctica guiada

1. **Identifica** la hipótesis y la tesis en cada uno de los siguientes enunciados.

En todo triángulo isósceles, la transversal de gravedad y la altura con respecto a la base son congruentes.

Hipótesis: En todo triángulo isósceles,

Tesis: la transversal de gravedad y la altura con respecto a la base son congruentes.

- Dos ángulos opuestos por el vértice son congruentes.
- La diagonal de un cuadrado lo divide en dos triángulos isósceles congruentes.
- Al trazar cualquier altura en un triángulo equilátero, se forman 2 triángulos congruentes.
- Las alturas correspondientes a los lados congruentes de un triángulo isósceles son congruentes.

2. **Completa** la tabla. Para ello, guíate por el ejemplo.

Proposición	Forma condicional
Ningún triángulo tiene dos ángulos rectos.	Si un polígono es un triángulo, entonces no tiene dos ángulos rectos.
Todo segmento es congruente consigo mismo.	
Las diagonales de un rectángulo son congruentes.	

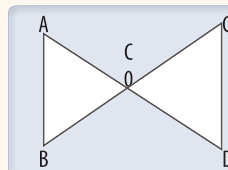
Reflexiono

- ¿Por qué piensas que es importante la demostración en Matemática?
Coméntalo con un compañero o compañera.

Los ángulos interiores opuestos de un trapecio isósceles son suplementarios.

Las diagonales de un rombo se intersectan en el punto medio.

3. **Completa** la demostración según corresponda.
Si O es punto medio de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, entonces el $\triangle ABO$ es congruente con el $\triangle DCO$.



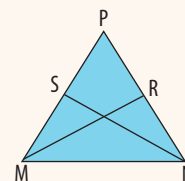
Hipótesis: O es punto medio de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$. $\overline{AO} \cong \overline{OD}$.
 $\overline{BO} \cong \overline{OC}$.

Tesis: $\triangle ABO \cong \triangle DCO$.

Afirmaciones	Justificaciones
1. $\overline{AO} \cong \overline{OD}$	Por hipótesis.
2. $\overline{BO} \cong \overline{OC}$	Por hipótesis.
3. _____	Por ser ángulos opuestos por el vértice.
4. $\triangle BOA \cong \triangle COD$	_____

4. **Realiza** la siguiente demostración

En el $\triangle MNP$ isósceles de base $\overline{MN}$, $\overline{MR}$ y $\overline{NS}$ son transversales de gravedad. Demuestra que $\overline{MR} \cong \overline{NS}$.



Refuerzo

Si se debe demostrar que "Las bisectrices de los ángulos de un triángulo isósceles tienen la misma medida." ¿Cuál es la hipótesis y la tesis?

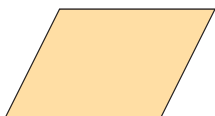
Palabras clave

- ➔ Demostración de propiedades de polígonos.

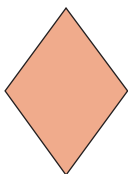
Repasa**Cuadriláteros**

Los cuadriláteros son figuras geométricas que tienen cuatro lados y cuatro ángulos. Se clasifican en paralelogramos, trapecios y trapezoides.

- Un paralelogramo tiene dos pares de lados opuestos paralelos. Por ejemplo:
- Romboide: tiene sus lados opuestos y sus ángulos opuestos congruentes.



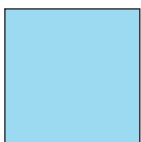
- Rombo: tiene sus cuatro lados congruentes y ángulos opuestos congruentes.



- Rectángulo: tiene sus lados opuestos congruentes y sus 4 ángulos interiores congruentes (90°).



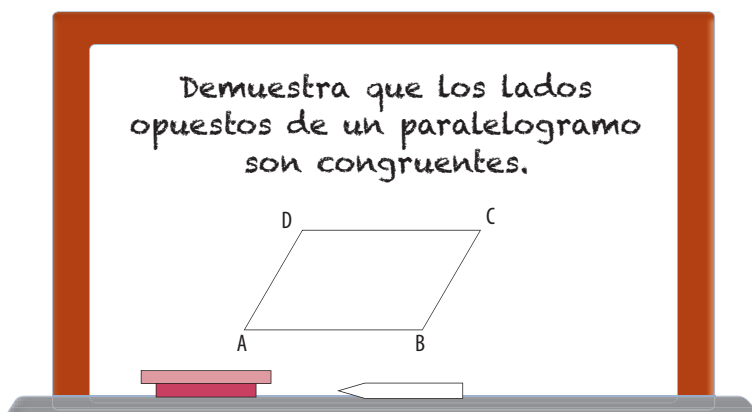
- Cuadrado: tiene sus cuatro lados y ángulos interiores congruentes (90°).



¿Cómo demostrar propiedades de algunos polígonos?

- Para deducir propiedades de figuras que no son triángulos, la demostración cobra importancia. ¿Cómo podrías demostrar que los lados opuestos de cualquier paralelogramo son congruentes?

La profesora de Sofía planteó la siguiente demostración en la pizarra:



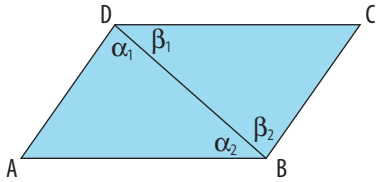
Para realizar esta demostración puedes seguir los siguientes pasos.

Paso 1 Identificar la hipótesis y la tesis de la propiedad.

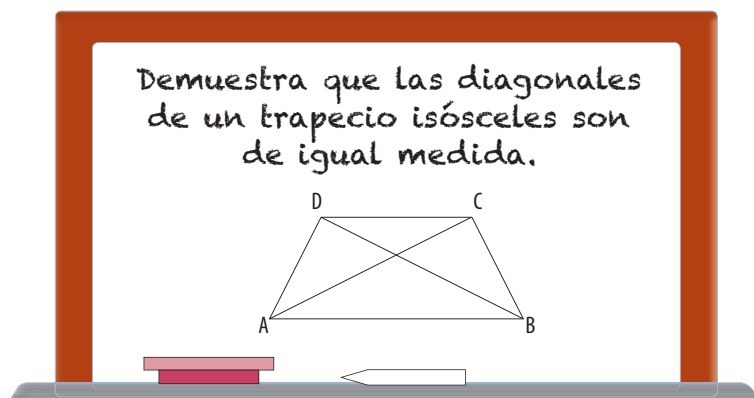
Hipótesis: $ABCD$ es paralelogramo.

Tesis: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{DA} \cong \overline{BC}$

Paso 2 Realizar la demostración y justificar cada afirmación.

Si se traza la diagonal $\overline{BD}$ se obtienen los triángulos ABD y CDB .	Por construcción de triángulos. 
$\alpha_1 \cong \beta_2$	Por ser ángulos alternos internos entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ que son paralelos.
$\alpha_2 \cong \beta_1$	Por ser ángulos alternos internos entre $\overline{DA}$ y $\overline{BC}$ que son paralelos.
$\overline{BD}$ es lado común de los triángulos ABD y CDB .	Por construcción de triángulos.
$\triangle ABD \cong \triangle CDB$	Por criterio ALA.
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	Lados opuestos a ángulos congruentes.
$\overline{DA} \cong \overline{BC}$	Lados opuestos a ángulos congruentes. (q. e. d).

La profesora de Sofía planteó otra demostración en la pizarra:



Para realizar esta demostración puedes seguir los siguientes pasos.

Paso 1 ▶ Identificar la hipótesis y la tesis de la propiedad.

Hipótesis: ABCD trapecio isósceles.
 $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ bases del trapecio.

Tesis: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

Paso 2 ▶ Realizar la demostración y justificar cada afirmación.

$\overline{DA} \cong \overline{BC}$ ya que el trapecio es isósceles de bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$	Por hipótesis.
$\angle DAB \cong \angle ABC$ ya que son los ángulos basales del trapecio.	Por hipótesis.
$\overline{AB}$ es lado común de los triángulos ABD y ABC.	Por construcción de triángulos.
$\triangle ABC \cong \triangle BAD$	Por criterio LAL.
$\overline{AC} \cong \overline{BD}$	Por ser lados homólogos. (q.e.d)

Razona y comenta

- En las demostraciones anteriores, ¿habrías cambiado alguna afirmación? ¿Podría existir más de una justificación para una afirmación?
- ¿Este tipo de demostración será la única? Investiga acerca de otros tipos de demostraciones y busca en qué casos se utilizan unos y otros.

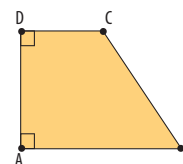
En resumen

Para **demostrar propiedades de polígonos** diferentes al triángulo, es posible utilizar criterios de congruencia de triángulos, ya que estos permiten organizar los argumentos de la demostración.

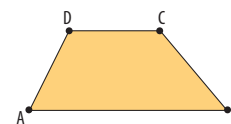
Repasa

Cuadriláteros

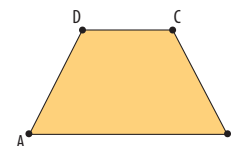
- El trapecio es un cuadrilátero con solo un par de lados paralelos. Los lados paralelos se llaman bases y la distancia entre ellos; altura.
- Un trapecio con dos ángulos interiores rectos se llama trapecio rectángulo.



- Un trapecio que no tiene lados de igual medida ni ángulos rectos se llama trapecio escaleno.



- Un trapecio isósceles es el que tiene los lados no paralelos de igual medida. Tiene dos ángulos internos agudos y dos obtusos, que son iguales entre sí. La suma de los ángulos opuestos es 180° .



Repaso

- Relaciona** las palabras trapecio isósceles, cuadrado, romboide y rectángulo según corresponda de acuerdo con sus propiedades.
 - Cuadrilátero cuyas diagonales no tienen la misma medida y no se intersectan perpendicularmente.

- Paralelogramo que tiene todos sus lados y ángulos iguales.
- Cuadrilátero que tiene solo un par de lados paralelos y la medida de sus lados no paralelos es igual.
- Cuadrilátero de lados paralelos de igual medida y sus diagonales son de igual medida.

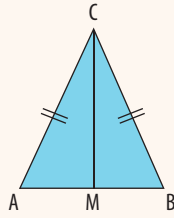
Práctica guiada

2. Completa cada demostración según corresponda.

- a) La altura correspondiente a un triángulo isósceles es también transversal de gravedad.

Hipótesis: $\triangle ABC$ isósceles de base $\overline{AB}$ y altura $\overline{CM}$.

Tesis: $\overline{CM}$ es transversal de gravedad.



Afirmaciones	Justificaciones
1. $\angle CAM \cong \angle CBM$	Por hipótesis.
2. _____	Por hipótesis.
3. $\overline{CM} \perp \overline{AB}$	Por ser $\overline{CM}$ altura.
4. _____	Por afirmación 3.
5. $\angle ACM \cong \angle BCM$	_____
6. $\triangle AMC \cong \triangle BMC$	_____
7. $\overline{AM} \cong \overline{BM}$	Por afirmación 6.
8. _____	Por afirmación 7. (q.e.d)

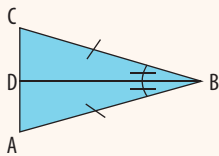
- b) La bisectriz del ángulo determinado por los lados congruentes de un triángulo isósceles divide al triángulo en dos triángulos congruentes.

Hipótesis: $\triangle ABC$ isósceles de base $\overline{CA}$.

$\overline{BD}$ bisectriz del $\angle ABC$.

$\angle CBD \cong \angle ABD$.

Tesis: $\triangle DBC \cong \triangle DBA$.

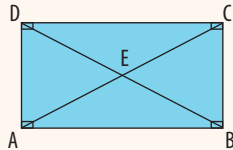


Afirmaciones	Justificaciones
1. $\angle CBD \cong \angle ABD$	Por hipótesis.
2. _____	Por hipótesis.
3. $\angle BCD \cong \angle BAD$	Por ser $\triangle ABC$ isósceles en B.
4. $\triangle DBC \cong \triangle DBA$	_____

- c) Las diagonales de un rectángulo son congruentes entre sí.

Hipótesis: Sea el rectángulo ABCD, con $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ diagonales.

Tesis: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$



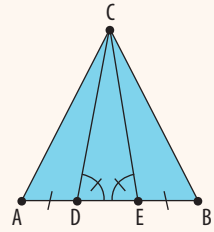
Afirmaciones	Justificaciones
1. $\overline{AD} \cong \overline{BC}$	_____
2. $\overline{AB} \cong \overline{BA}$	Por ser segmentos iguales.
3. $\angle BAD \cong \angle ABC$	_____
4. _____	Por afirmaciones 1, 2 y 3 y criterio LAL.
5. $\overline{AC} \cong \overline{BD}$	_____

- d) Los triángulos DCA y ECB son congruentes.

Hipótesis: $\overline{AD} \cong \overline{BE}$

$\angle EDC \cong \angle DEC$

Tesis: $\triangle DCA \cong \triangle ECB$



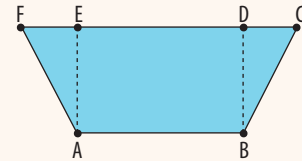
Afirmaciones	Justificaciones
1. _____	Por hipótesis.
2. $\angle EDC \cong \angle DEC$	Por hipótesis.
3. $\overline{DC} \cong \overline{EC}$	_____
4. _____	Por ser ángulos suplementarios de ángulos congruentes por afirmación 2.
5. $\triangle DCA \cong \triangle ECB$	_____

- e) Se cumple que $\overline{FA} \cong \overline{CB}$ en el trapecio, si $\overline{CD}$ y $\overline{FE}$ tienen la misma medida.

Hipótesis: Trapecio ABCF.

$\overline{CD} \cong \overline{FE}$

Tesis: $\overline{FA} \cong \overline{CB}$



Afirmaciones	Justificaciones
1. $\overline{CD} \cong \overline{FE}$	Por hipótesis.
2. $\overline{EA} \cong \overline{DB}$	_____
3. $\overline{AE} \perp \overline{FE}$ y $\overline{BD} \perp \overline{DC}$	Porque AE y EF son las alturas del trapecio.
4. _____	Por afirmación 3, los ángulos son rectos y de igual medida.
5. $\triangle AEF \cong \triangle BDC$	_____
6. _____	Por afirmación 5.

3. Demuestra las siguientes proposiciones, justificando cada una de tus afirmaciones.

- a) Las diagonales de un rombo se intersecan en el punto medio.
- b) Si las diagonales de un paralelogramo son congruentes, entonces el paralelogramo es un rectángulo o un cuadrado.

Aplico

4. Resuelve los siguientes problemas.

- a) Para demostrar que las diagonales de un rectángulo son congruentes, Isidora decide trazar la diagonal. Luego, aplica los criterios de congruencia para realizar la demostración.

- ¿Cuáles son la hipótesis y la tesis que debe demostrar Isidora?
- ¿Por qué los criterios de congruencia le permitirían a Isidora afirmar esta proposición?
- ¿Qué criterio podría establecer Isidora y cuál es la información necesaria y suficiente que necesita?

b) Lorena debe demostrar que las diagonales de un rombo dividen en dos los ángulos de los vértices correspondientes. Los pasos que siguió fueron:

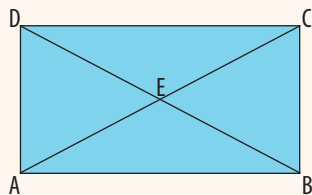


1. Trazo una diagonal
2. Los ángulos a y b son congruentes porque son alternos internos.
3. Los ángulos c y d son congruentes porque también son alternos internos.
4. ???

- ¿Cómo justificarías las afirmaciones 2 y 3?
- ¿Qué se debiera concluir en la afirmación 4?
- ¿Qué características tienen los triángulos que se forman al trazar la diagonal?
- Traza la otra diagonal y demuestra que las diagonales de un rombo se cortan en la mitad.

5. **Argumenta.** Observa la figura.

- a) Si ABCD es un rectángulo, ¿por qué $\triangle ABE$ es isósceles?
- b) ¿Qué podrías concluir acerca de las diagonales de un rectángulo?



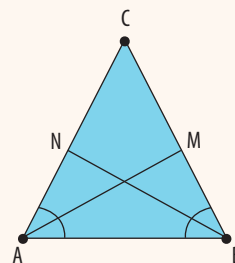
6. **Descubre el error.** Descubre el error al realizar la siguiente demostración: "Las bisectrices de los ángulos basales del triángulo isósceles tienen la misma medida".

Reflexiono

- ¿Cuál es la importancia de los criterios de congruencia a la hora de demostrar propiedades de los polígonos?

Hipótesis: ABC isósceles de base $\overline{AB}$; $\overline{BN}$ y $\overline{AM}$ bisectrices.

Tesis: $\overline{BN} \cong \overline{AM}$

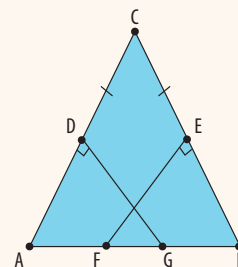


Demostración: para demostrar que $\triangle NBA \cong \triangle MAB$, primero se tiene que $\overline{AC} \cong \overline{CB}$. Como $\triangle ABC$ es isósceles, los ángulos basales son iguales, así como los obtenidos luego de trazar las bisectrices, es decir, $\angle CAM \cong \angle MAB \cong \angle CBN \cong \angle NBA$.

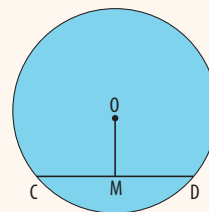
Entonces, se tiene que $\angle MAC \cong \angle NBA$; $\angle NAB \cong \angle MBA$, y el lado $\overline{AB}$ es un lado común de ambos triángulos. Utilizando el criterio ALA, $\triangle NBA \cong \triangle MAB$. Por lo tanto, $\overline{BN} \cong \overline{AM}$.

7. **Describe el procedimiento.** Describe los pasos que debes realizar para demostrar la siguiente afirmación:

"Si el $\triangle ABC$ es isósceles de base $\overline{AB}$, entonces $\triangle AGD \cong \triangle BFE$ ".



8. **Desafío.** En la circunferencia de centro O, $\overline{OM} \perp \overline{CD}$. Demuestra que M es punto medio de $\overline{CD}$.



9. **Investiga.** ¿Cuál es el teorema de congruencia llamado "cateto e hipotenusa"?

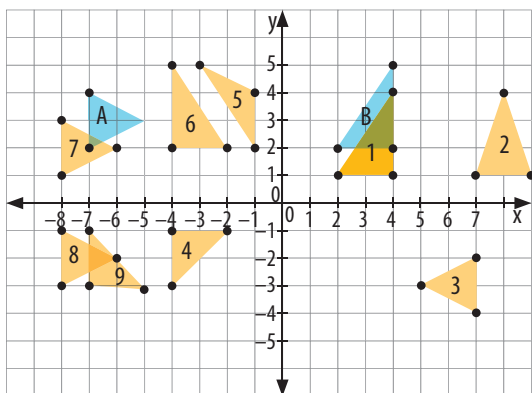
Refuerzo

Demuestra que los ángulos basales agudos de un trapecio isósceles son congruentes.



Comprender el concepto de congruencia y reconocer figuras congruentes a partir de los criterios de congruencia de triángulos (lecciones 35 y 36).

Observa la imagen para resolver los ejercicios 1 y 2.

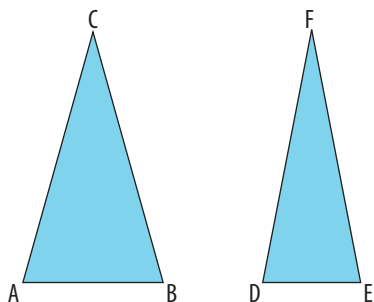


1 Identifica si los siguientes triángulos son congruentes al triángulo A o al triángulo B y determina la transformación isométrica involucrada entre ambas figuras.

- | | |
|----------------|----------------|
| a. Triángulo 1 | e. Triángulo 2 |
| b. Triángulo 3 | f. Triángulo 4 |
| c. Triángulo 5 | g. Triángulo 6 |
| d. Triángulo 7 | h. Triángulo 8 |

2 Identifica los lados homólogos entre cada par de triángulos congruentes encontrados en el ejercicio anterior. Píntalos del mismo color.

3 Analiza si los triángulos son congruentes a partir de la información dada.

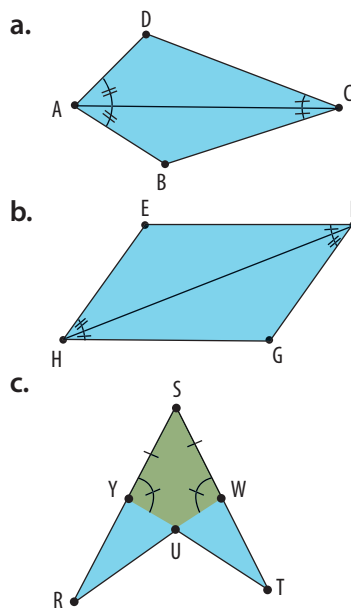


- $\overline{AC} \cong \overline{DE}$, $\overline{CB} \cong \overline{FE}$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$
- $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{CB} \cong \overline{FE}$, $\angle ABC \cong \angle DEF$
- $\angle CAB \cong \angle FDE$, $\angle ABC \cong \angle DEF$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$
- $\angle BCA \cong \angle EFD$, $\angle ABC \cong \angle DEF$, $\overline{CB} \cong \overline{FE}$
- $\angle CAB \cong \angle FDE$, $\angle ABC \cong \angle DEF$, $\angle BCA \cong \angle EFD$

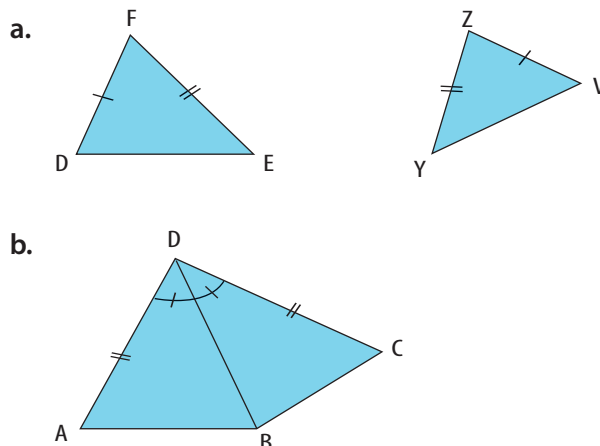
4 Identifica en la cancha de fútbol pares de figuras congruentes.



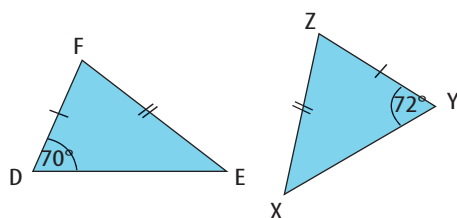
5 Identifica el criterio de congruencia involucrado en cada par de triángulos congruentes.



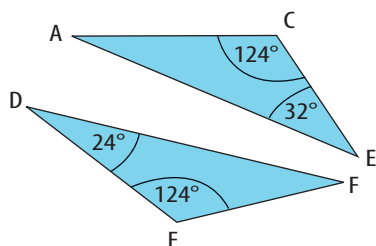
6 Identifica si los siguientes pares de triángulos son congruentes.



c.



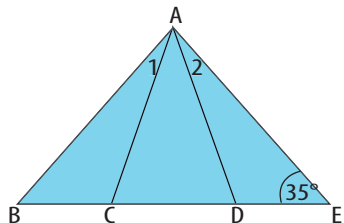
d.



Resolver problemas que involucren el cálculo de medidas en figuras planas y demostraciones de propiedades en polígonos a partir de los criterios de congruencia (Lecciones 37 y 38)

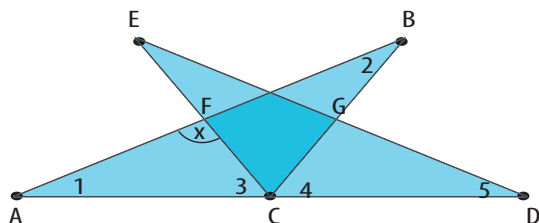
7 Calcula el valor de las incógnitas, haciendo uso de los criterios de congruencia.

- a. En la imagen se tiene que $\overline{AB} \cong \overline{AE}$, $\angle BAC \cong \angle EAD = 40^\circ$. ¿Cuál es la medida del ángulo ADC?

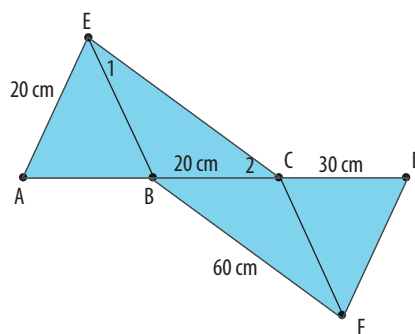


- b. Calcula la medida de x en la figura si:

- C es el punto medio del segmento $\overline{AD}$.
- $\angle 1 \cong \angle 2$
- $\angle 3 \cong \angle 4$
- $m(\angle 2) = 20^\circ$
- $m(\angle 3) = 70^\circ$

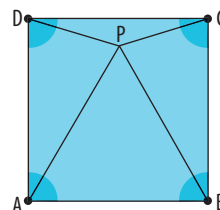


- c. ¿Cuál es el perímetro de la siguiente figura? Considera: $\triangle AEC \cong \triangle DFB$ y $\angle 1 \cong \angle 2$

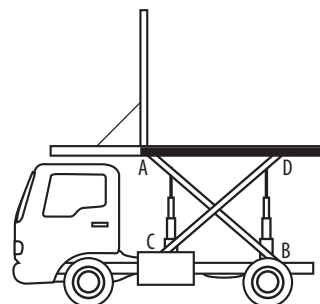


8 Demuestra las siguientes propiedades de los polígonos utilizando criterios de congruencia.

- Demuestra que si las diagonales de un cuadrilátero son perpendiculares y se midian, entonces el cuadrilátero puede ser un cuadrado.
- Demuestra que al trazar las diagonales de un rombo se forman cuatro triángulos congruentes entre sí.
- Demuestra que en un triángulo isósceles la bisectriz del ángulo del vértice es simetral respecto a la base.
- Demuestra que las diagonales de un deltoide son perpendiculares.
- Sean ABCD un cuadrado y ABP un triángulo equilátero. Demuestra que los triángulos APD y BPC son congruentes.

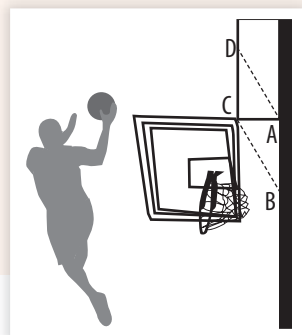


- f. La imagen muestra una plataforma de un camión. Los soportes, nombrados como $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se intersectan en el punto medio. Demuestra que la plataforma del camión es paralela a la base de este.



Problema

El tablero de básquetbol se desprendió al romperse uno de los soportes que lo afirmaba (segmento $\overline{DA}$). Carlos sabe que los soportes forman dos triángulos congruentes, ABC y CDA . Si se sabe que $\overline{AB}$ mide 60 cm y $\overline{CA}$ mide 45 cm, ¿cuál es la medida del soporte que se rompió?



Hypatia 370 – 415

Fue la primera mujer matemática documentada de la historia, como jefe de la escuela platónica de Alejandría, también enseñó filosofía y astronomía.

Muchas de las obras que se le atribuyen comúnmente se cree que han sido obras en colaboración con su padre, Teón Alexandricus. Su trabajo más conocido tiene relación con las Cónicas de Apolonio, en donde se corta un cono por un plano dando origen a distintas figuras, como las parábolas, hipérbolas y elipses.

Sus contribuciones a la ciencia tienen fama de incluir el trazado de los cuerpos celestes y la invención del hidrómetro, que se utiliza para determinar la densidad relativa (o densidad) de líquidos.

[http://www.agnesscott.edu/
lriddle/women/hypatia.htm](http://www.agnesscott.edu/lriddle/women/hypatia.htm)

Paso 1 **Comprendo** ¿Qué entendiste del problema?

Se debe determinar la medida del segmento $\overline{DA}$ y justificar este resultado utilizando los criterios de congruencia.

Paso 2 **Planifico** ¿Qué harías para resolver el problema?

- Identificar los datos entregados en el problema.

Analizar la congruencia involucrada.

Identificar los lados homólogos de los triángulos congruentes.

Cómo los triángulos son rectángulos, calcular la hipotenusa utilizando el teorema de Pitágoras.

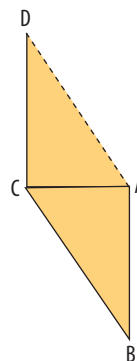
Luego, determinar la medida del segmento buscado utilizando lo anterior.

Paso 3 **Resuelvo** ¿Cómo ejecutarías la estrategia?

$$\bullet \triangle ABC \cong \triangle CDA$$
$$m(\overline{AB}) = 60 \text{ cm}$$
$$m(\overline{CA}) = 45 \text{ cm}$$

Lados homólogos: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$; $\overline{DA}$ y $\overline{BC}$

Lado común: $\overline{CA}$



Por otra parte, los triángulos ABC y CDA son rectángulos en A y C respectivamente, por lo tanto, calculamos la hipotenusa para el triángulo ABC.

Según el teorema de Pitágoras:

$$\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 \rightarrow 60^2 + 45^2 = \overline{BC}^2$$

$$3600 + 2025 = \overline{BC}^2$$

$$5625 = \overline{BC}^2$$

$$\sqrt{5625} = \overline{BC}$$

$$75 = \overline{BC}$$

Y como $\overline{DA}$ y $\overline{BC}$ son lados homólogos de triángulos congruentes, entonces la medida de $\overline{DA}$ es 75 cm.

Paso 4 ▶ **Reviso** ¿Cómo saber que es correcto el resultado?

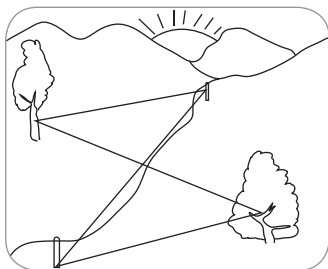
Se puede visualizar en el dibujo que los segmentos $\overline{DA}$ y $\overline{BC}$ son paralelos y $\overline{CA}$ es la transversal que los intersecta, entonces $\angle ACB$ y $\angle DAC$ son congruentes por ser alternos externos. Además, sabemos que $\angle CAB$ y $\angle DCA$ son congruentes y rectos, y como $\overline{CA}$ es lado común de los triángulos, por criterio ALA se tiene que los triángulos son congruentes, por lo tanto las medidas de $\overline{DA}$ y $\overline{BC}$ son iguales por ser lados homólogos. Si $\overline{BC}$ mide 75 cm entonces $\overline{DA}$ también medirá 75 cm.

Paso 5 ▶ **Comunico** ¿Cómo interpretas el resultado obtenido?

El soporte que se rompió en el tablero de la cancha de básquetbol mide 75 cm.

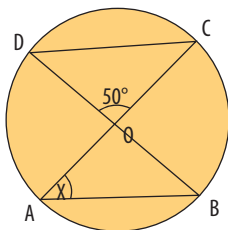
Resuelve los siguientes problemas.

1. En la imagen la cuerda que une el árbol y el arbusto mide 2 m, la que une las dos estacas mide 3 m, y la que une la estaca con el árbol mide 2 m.



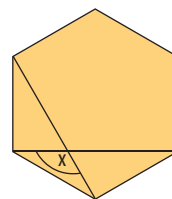
Si las cuerdas que se cruzan se cortan en la mitad, ¿cuál es la medida de la cuerda que une la estaca con el arbusto?

2. En la figura $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son diámetros y $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ cuerdas de la circunferencia ¿Cuánto mide el ángulo x ?

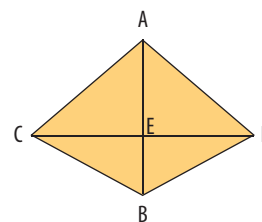


3. Si se traza una bisectriz perpendicular desde un vértice de un triángulo hasta el lado opuesto de dicho vértice, entonces ¿los triángulos que se forman son isósceles?

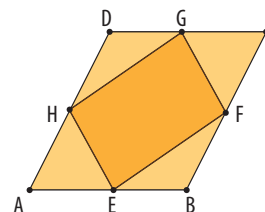
4. El polígono de la imagen es un hexágono regular. ¿Cuánto mide el ángulo x ?



5. En la figura $\overline{AB}$ es bisectriz de los ángulos $\angle CAD$ y $\angle DBC$ y $\overline{AB} \perp \overline{CD}$. ¿Qué se puede afirmar con respecto a los triángulos que se forman? Justifica.



6. A un cuadrado ABCD se le marcan los puntos medios de cada lado y se unen formando un cuadrilátero. Este cuadrilátero, ¿es un cuadrado?
7. ABCD es un rombo y E, F, G, H son puntos medios. El cuadrilátero EFGH, ¿es un rectángulo?



Reflexiona

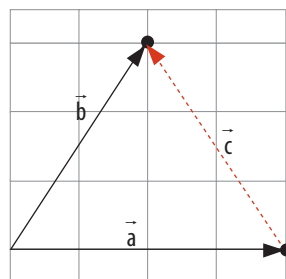
- ¿Qué similitudes y diferencias tiene el resolver este tipo de problemas y las demostraciones en geometría?
- ¿Cuál es la importancia del concepto de congruencia a la hora de resolver este tipo de problemas?



Representar adiciones de vectores

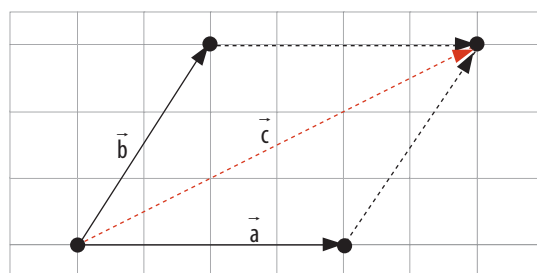
¿Cuál de las siguientes representaciones de la suma de vectores fue realizada correctamente? Compara los procedimientos.

Caso 1



Se unieron los inicios de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ para representar el vector $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Caso 2



Se replicaron los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ para formar un paralelogramo cuya diagonal corresponde al vector $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

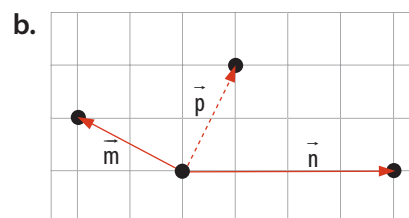
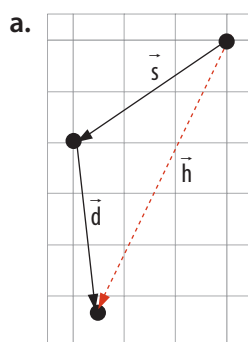
Toma nota

- Para resolver este tipo de ejercicio es recomendable observar cómo están dispuestos los vectores en el plano. Si comparten el origen se debe aplicar el método del paralelogramo.
- Recuerda que el algoritmo para sumar vectores es sumar las componentes x de cada vector y luego las componentes y .

Razona y comenta

- ¿Qué procedimiento es correcto? ¿Por qué?
- ¿Cómo influye en el resultado el error cometido en el procedimiento?

1 Analiza si la representación de la suma de vectores es correcta. De no serlo, explica el error y corrígela.



2 Representa las siguientes sumas de vectores, considerando $\vec{f} = (1, 2)$; $\vec{g} = (0, 1)$ y $\vec{h} = (-2, 2)$.

a. $\vec{f} + \vec{g}$

b. $\vec{g} + \vec{h}$

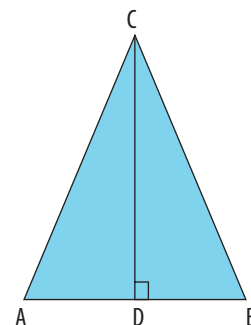
Demostración de congruencia de triángulos

¿Cuál de las siguientes demostraciones fue realizada correctamente? Compara los argumentos.

Si en el triángulo ABC, $\overline{AD} \cong \overline{DB}$ y $\overline{AB} \perp \overline{DC}$, probar que $\triangle DAC \cong \triangle DBC$.

Caso 1	Afirmaciones	Justificaciones
1.	$\overline{AD} \cong \overline{DB}$	Por hipótesis.
2.	$\overline{AB} \perp \overline{DC}$	Por hipótesis.
3.	$\angle CDA$ y $\angle CDB$ son rectos.	Por afirmación 2.
4.	$\angle CDA \cong \angle CDB$	Por afirmaciones 3.
5.	$\overline{CD} \cong \overline{DC}$	Por ser el mismo segmento.
6.	$\triangle DAC \cong \triangle DBC$	Por afirmaciones 1, 4 y 5 y criterio LAL.

Caso 2	Afirmaciones	Justificaciones
1.	$\overline{AD} \cong \overline{DB}$	Por hipótesis.
2.	$\overline{AB} \perp \overline{DC}$	Por hipótesis.
3.	$\overline{CD} \cong \overline{DC}$ y $\overline{CA} \cong \overline{CB}$	Por el dibujo de la figura.
4.	$\triangle DAC \cong \triangle DBC$	Por afirmaciones 1, 2 y 3 y criterio LLL.



Razona y comenta

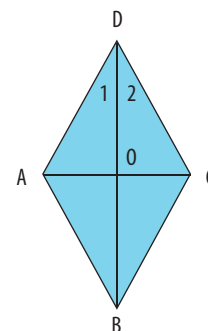
- ¿Qué procedimiento es correcto? ¿Por qué?
- En el procedimiento equivocado, ¿cuál(es) de la(s) afirmación(es) tienen error? ¿Por qué?
- ¿Cómo influye en el resultado el error cometido en el procedimiento?

1 Analiza e identifica la demostración que fue realizada correctamente. En el caso incorrecto explica el error.

Si $\overline{DB}$ biseca al ángulo $\angle CDA$ y $\overline{DB} \perp \overline{AC}$, probar que $\triangle ACD$ es isósceles de base $\overline{AC}$.

Caso 1	Afirmaciones	Justificaciones
1.	$\angle 1 \cong \angle 2$	Por hipótesis.
2.	$\overline{DA} \cong \overline{DC}$	Definición de bisectriz y por afirmación 1.
3.	$\triangle ACD$ es isósceles	Por afirmaciones 1 y 2.

Caso 2	Afirmaciones	Justificaciones
1.	$\angle 1 \cong \angle 2$	Por hipótesis.
2.	$\overline{OD} \cong \overline{DO}$	Por ser el mismo segmento.
3.	$\angle AOD \cong \angle COD$	Por ser $\overline{DB} \perp \overline{AC}$
4.	$\triangle AOD \cong \triangle COD$	Por afirmaciones 1, 2 y 3 y criterio ALA.
5.	$\overline{AD} \cong \overline{DC}$ y $\angle OAD \cong \angle OCD$	Por afirmación 4.
6.	$\triangle ACD$ es isósceles.	Por afirmación 5.



Reflexiona

- ¿Cuál es el error que cometes con frecuencia al resolver este tipo de ejercicios? ¿Coinciden con los mostrados en esta página?
- ¿Qué harás para evitar errores cuando te enfrentes a ejercicios de este tipo?

Toma nota

- Antes de comenzar recuerda identificar la hipótesis y la tesis de cada demostración.

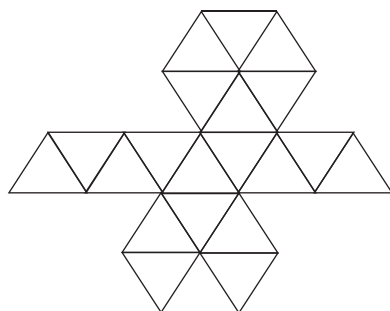


¿Qué es un domo geodésico?

Un **domo geodésico** es una estructura semiesférica compuesta por un complejo grupo de triángulos. Es considerada la estructura más ligera, fuerte y eficiente en cuanto a costo y comodidad de construcción. Un domo geodésico es capaz de cubrir más espacio sin apoyos internos que cualquier otra cubierta.



Un domo estándar se basa en un sólido llamado icosaedro que es un cuerpo poliedro compuesto por 20 triángulos equiláteros. Si no se consideran los cinco triángulos de la base de la red resulta la estructura de un domo.



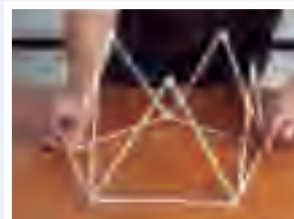
En una estructura de domo real, cada triángulo equilátero de esta red se subdivide en triángulos más pequeños.

Materiales

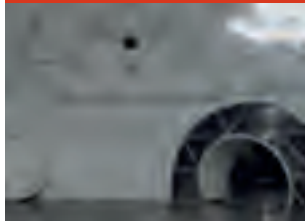
- Bombillas
- Corchetera

Taller

Con un compañero o compañera construye un domo geodésico a partir de la red del icosaedro mostrada anteriormente. Sigue los pasos que aparecen a continuación.



Para saber más...



Domos en Chile

Esta es la vista de un domo desde dentro. Se encuentra en el teatro Mori ubicado en la calle Constitución 183 del barrio Bellavista de la comuna de Providencia. Cada vez son más recurrentes este tipo de construcciones en nuestro país, ya que permiten aprovechar el espacio utilizando una estructura sólida, fácil de montar y con buena ventilación.

Reflexiona

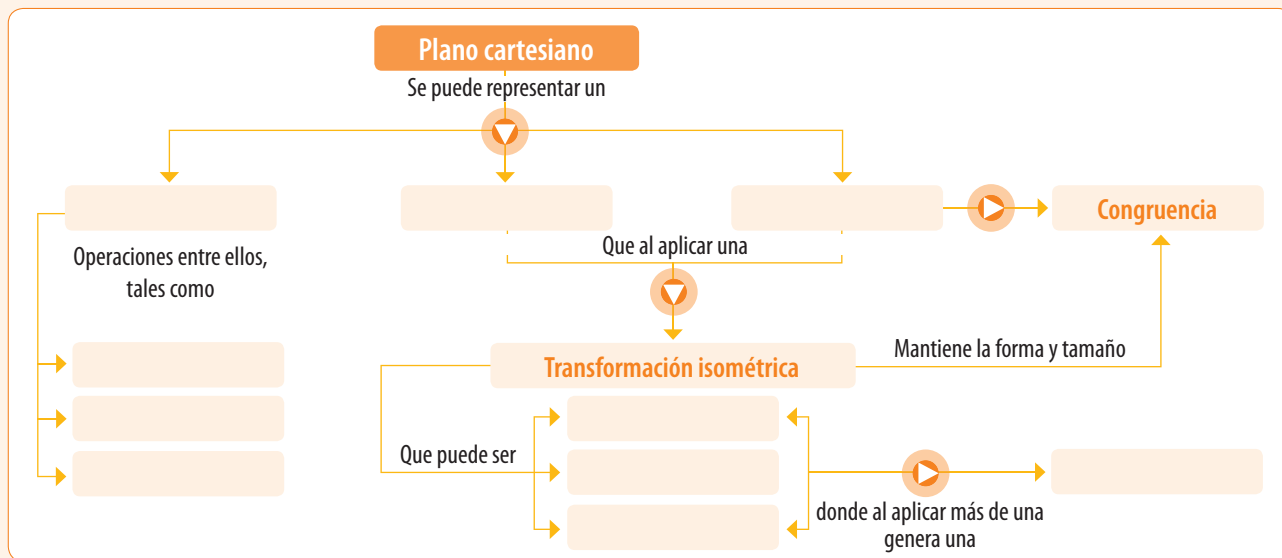
- ¿Por qué crees que los triángulos son las estructuras más resistentes y fuertes?
- ¿Qué transformaciones aplicarías a un triángulo rectángulo para generar la plantilla de un icosaedro que te permita construir un domo a pequeña escala?



¿Cómo se llama?

- Organiza las siguientes palabras en el mapa conceptual.

Polígono – Rotación – Composición de transformaciones – Adición Sustracción – Traslación – Vector – Reflexión – Producto por escalar – Punto

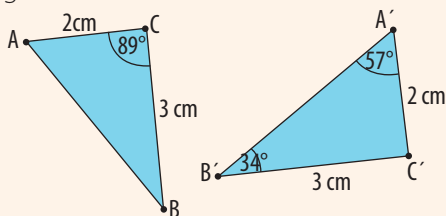


¿Cómo se hace?

- Para **sumar** o **restar** los vectores $\vec{u} = (3, -5)$ y $\vec{v} = (-2, -6)$ puedes realizar lo siguiente:

$$\begin{aligned}\vec{u} + \vec{v} &= (3, -5) + (-2, -6) \\ &= (3 + (-2) + (-5 + (-6))) = (1, -11) \\ \vec{u} - \vec{v} &= (3, -5) - (-2, -6) \\ &= (3 - (-2) - (-5 - (-6))) \\ &= (3 + 2, -5 + 6) = (5, 1)\end{aligned}$$

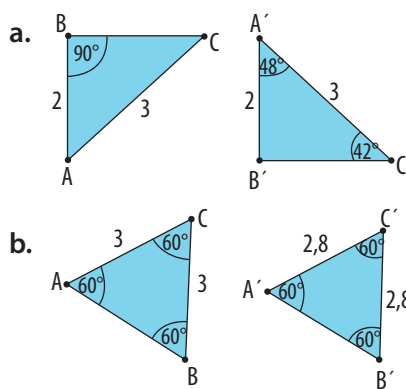
- Para identificar si los siguientes triángulos son **congruentes** puedes realizar lo siguiente:



Como $34^\circ + 57^\circ = 91^\circ$ y $180^\circ - 91^\circ = 89^\circ$, entonces el $\angle BCA \cong \angle B'C'A'$. Además se tiene que $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ y $\overline{CA} \cong \overline{C'A'}$. Por criterio LAL $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

Ahora refuerza

- Calcula las sumas y restas según los $\vec{u} = (8, -1)$, $\vec{v} = (9, 6)$, $\vec{w} = (-2, -7)$.
 - $\vec{u} + \vec{v}$
 - $\vec{u} - \vec{v}$
 - $\vec{u} + \vec{w}$
 - $\vec{v} - \vec{w}$
 - $\vec{v} + \vec{w}$
 - $\vec{u} - \vec{w}$
 - $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
 - $\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$
- Reconoce si los siguientes pares de triángulos son congruentes e indica el criterio que justifica tu respuesta. Considera las medidas en centímetros.



Tips para estudiar

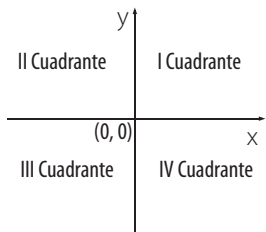
- Para representar una figura en el plano cartesiano debes identificar las coordenadas de cada vértice de la figura.
- Para trasladar, rotar o reflejar un punto, debes considerar las regularidades de estas transformaciones en el plano cartesiano.
- Para demostrar propiedades que cumplen los polígonos puedes utilizar criterios de congruencia de triángulos.

Reflexiona

- ¿Estás de acuerdo con los conceptos que se eligieron para construir el mapa conceptual? ¿Por qué? ¿Cuáles habrías descartado y cuáles agregado? Compara con un compañero(a) los principales conceptos elegidos.



La ubicación de los **cuadrantes** en un plano cartesiano es:



Identificar y representar puntos y figuras en el plano cartesiano. (Lección 27)

1 Representa los siguientes puntos en el plano e indica en qué cuadrante se ubican.

a. $A(3, 2)$

d. $B\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

g. $D(-3, 5)$

b. $A(0,5; 1)$

e. $C(-2, -5)$

h. $D(-2, 0)$

c. $B(1, -1)$

f. $C(0, 1)$

i. $E(4, -2)$

Los **vectores** se pueden denotar mediante sus componentes que resultan de la sustracción entre las coordenadas **x** e **y** respectivas de los puntos que dan el inicio y término del vector.

Representar adiciones, sustracciones de vectores y multiplicaciones de un vector por un escalar. (Lecciones 28, 29 y 30)

2 Calcula las componentes de los vectores que se piden, a partir de los siguientes puntos.

$K(-5, 3); M(-1, 1); N(1, 3); O(2, 1); P(2, -2); Q(4, 4); R(5, 1)$

a. $\overrightarrow{KM}$

c. $\overrightarrow{QR}$

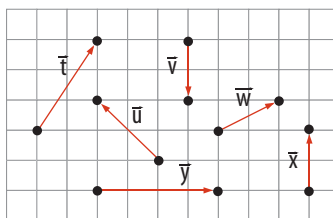
e. $\overrightarrow{MN}$

b. $\overrightarrow{PQ}$

d. $\overrightarrow{QP}$

f. $\overrightarrow{OO}$

Observa los siguientes vectores y luego resuelve los ejercicios 3 y 4.



3 Representa y calcula las siguientes sumas y restas de vectores.

a. $\vec{t} + \vec{y}$

c. $\vec{w} + \vec{u}$

e. $\vec{t} - \vec{v}$

b. $\vec{x} + \vec{u} + \vec{y}$

d. $\vec{v} + \vec{x}$

f. $\vec{x} - \vec{v}$

4 Representa y calcula las siguientes multiplicaciones de un vector por un escalar.

a. $2\vec{w}$

c. $3\vec{u}$

e. $-\vec{v}$

b. $0,5\vec{y}$

d. $0\vec{x}$

f. $-2\vec{t}$

La **suma** de vectores se puede representar por medio de la **regla del paralelogramo** o uniendo el extremo de un vector con el inicio de otro.

La **multiplicación** de un vector por un escalar se puede representar como la dilatación o contracción de éste, las veces que el número (escalar) lo señale.

Identificar regularidades en la aplicación de transformaciones isométricas a figuras en el plano cartesiano. (Lecciones 31, 32 y 33)

En las **transformaciones isométricas** aplicadas a figuras planas se conservan la forma y el tamaño de la figura original. Por lo tanto, este tipo de transformaciones permite obtener otra figura a partir de una dada. La figura que se obtiene luego de aplicar una transformación isométrica se denomina figura imagen. Ejemplos de transformaciones isométricas son las traslaciones, rotaciones y reflexiones.

5 Identifica las coordenadas de la imagen que resultan al trasladar cada punto o figura por el vector dado.

a. Aplica al punto $B(2, 4)$ la traslación $T_{(-2, 1)}$.

b. Aplica al segmento de extremos $C(0, 5)$ y $D(2, 3)$ la traslación $T_{(0, 3)}$.

c. Aplica al triángulo de vértices $E(-3, 2)$, $F(-2, 4)$ y $G(1, 3)$ la traslación $T_{(3, -2)}$.

6 Identifica el ángulo de rotación a partir de la preimagen y la imagen de una rotación con centro en el origen del plano cartesiano.

a. $F(4, 5)$ y $F'(-4, -5)$

b. $H(0, 5)$ y $H'(-5, 0)$

c. $G(-2, -3)$ y $G'(3, -2)$

Una **composición de transformaciones isométricas** consiste en aplicar sucesivamente dos o más isometrías.

Componer transformaciones isométricas en el plano cartesiano. (Lección 34)

7 Resuelve los siguientes problemas.

- Al punto $D(3, 8)$ se le aplica una rotación $R_{(O, 90^\circ)}$ y al punto resultante se le aplica un reflexión R_V . ¿Cuáles son las coordenadas de la imagen resultante?
- A un punto $P(0, -3)$ se le aplicó un isometría obteniéndose $P'(0, 3)$. Posteriormente se le aplicó una segunda isometría y se obtuvo $P''(3, 0)$. ¿Qué isometrías se aplicaron para obtener esas imágenes?

Una figura es **congruente** con otra cuando la medida de sus lados y ángulos homólogos son iguales.

Establecer el concepto de congruencia a partir de las transformaciones isométricas y conjeturar acerca de los criterios de congruencia en triángulos. (Lecciones 35 y 36)

8 Analiza si las siguientes figuras son congruentes. Justifica.

- Triángulo de coordenadas $W(3, 1)$, $X(4, 3)$, $Y(6, 2)$ y el triángulo de coordenadas $B(5, 2)$, $C(6, 4)$, $D(8, 3)$.
- Observa la Figura 1. El segmento $\overline{DB}$ es bisectriz del ángulo $\angle CDE$. Además, los lados $\overline{CD}$ y $\overline{DE}$ miden lo mismo. ¿Son congruentes los triángulos $\triangle CDB$ y $\triangle EDB$?

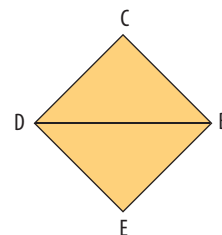
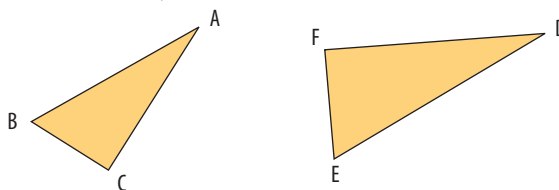


Figura 1

9 Analiza la información del recuadro. Luego, responde.

Dados el $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ rectángulos en C y F , respectivamente.



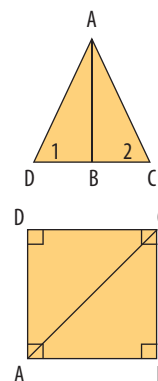
- Si $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, ¿es cierto que el $\triangle ABC \cong \triangle DEF$? ¿Por qué?
- Si $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, ¿ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$? ¿Por qué?
- Y si se cumplen las condiciones **a.** y **b.**, ¿los triángulos ABC y DEF son congruentes? ¿Por qué?

Para **demostrar** una proposición debes organizar tus argumentos utilizando toda la información que aporta la hipótesis, y utilizar los criterios de congruencia de triángulos para obtener nueva información que ayude a demostrar la tesis.

Resolver problemas relativos a cálculos de vértices y lados de figuras geométricas del plano cartesiano y a la congruencia de triángulos. (Lecciones 37 y 38)

10 Demuestra las siguientes afirmaciones.

- En la figura el segmento $\overline{AB}$ es bisectriz del ángulo $\angle CAD$ y el ángulo $\angle 1$ es congruente con el ángulo $\angle 2$. Demuestra que el ángulo $\angle ABD$ es recto.
- La diagonal de un cuadrado divide a este, en dos triángulos isósceles congruentes.





I. Marca con una x la alternativa correcta.

Identificar y representar puntos, figuras y vectores en el plano cartesiano. (Lecciones 27 y 28)

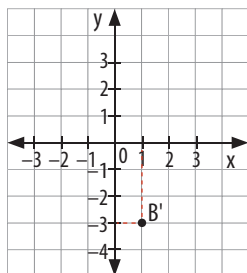
- 1** ¿Cuál de los siguientes puntos se ubica en el segundo cuadrante del plano cartesiano?
- A. $P(8, 1)$ C. $P(-8, -1)$ E. $P(-7, 1)$
- B. $P(8, -1)$ D. $P(-7, -1)$
- 2** ¿En cuál de los siguientes puntos la abscisa corresponde a las tres cuartas partes de la ordenada?
- A. $P(3, 8)$ C. $R(6, 8)$ E. $T(4, 3)$
- B. $Q(4, 8)$ D. $S(8, 6)$

Representar en el plano cartesiano, adiciones, sustracciones de vectores y multiplicaciones de un vector por un escalar. (Lecciones 29 y 30)

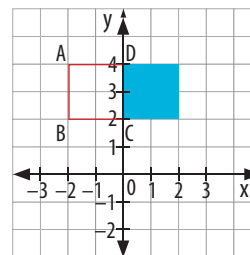
- 3** Un camión se traslada 2 km al este, y luego 1 km al norte, para luego trasladarse 5 km al oeste y 9 km al sur ¿Cuáles son las componentes del vector $\vec{v}$ que representa la trayectoria más corta que puede realizar?
- A. $\vec{v} = (-3, -8)$
- B. $\vec{v} = (7, 10)$
- C. $\vec{v} = (-8, -3)$
- D. $\vec{v} = (3, -8)$
- E. $\vec{v} = (10, 7)$

Identificar las regularidades al aplicar transformaciones isométricas en el plano cartesiano. (Lecciones 31, 32 y 33)

- 4** El punto B' fue obtenido luego de aplicarle al punto B una reflexión con respecto al eje X ¿Cuáles son las coordenadas del punto B ?
- A. $(3, 1)$
- B. $(1, 3)$
- C. $(1, -3)$
- D. $(-3, -1)$
- E. $(-1, -3)$



- 5** Un punto A , al ser rotado en -180° con respecto al origen del plano cartesiano, queda ubicado en el punto $A'(4, -2)$ ¿Cuál era su ubicación antes de la rotación?
- A. $(-4, 2)$ C. $(-2, 4)$ E. $(2, -4)$
- B. $(4, 2)$ D. $(-2, -4)$
- 6** Si el punto $A(x, y)$ es trasladado según el vector $\vec{v} = (-4, -1)$, su nueva ubicación es el punto $A'(5, -3)$ ¿Cuáles eran sus coordenadas originales?
- A. $(1, -4)$ C. $(9, -2)$ E. $(-1, 4)$
- B. $(-9, -2)$ D. $(-9, 2)$
- 7** El cuadrado ABCD de la figura ha sido trasladado según un vector dado, y se obtuvo el cuadrado de color celeste. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones(es) es(son) VERDADERAS?



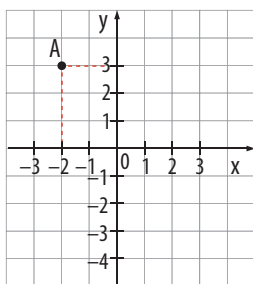
- I. El vector de traslación tiene por componentes $(2, 0)$.
- II. Las coordenadas de los vértices del cuadrado no varían.
- III. El área del cuadrado permanece constante.
- A. Solo I. C. I y III. E. I, II y III.
- B. I y II. D. II y III.
- 8** Se dibuja en el plano cartesiano un segmento $\overline{AB}$ y se le aplica una traslación, obteniéndose el segmento $\overline{A'B'}$. Se pueden determinar las coordenadas del vector de traslación si:
- A. Se conocen las coordenadas de A y A' .
- B. Se conocen las coordenadas de A y B' .
- C. Se conocen las coordenadas de A' y B .
- D. Se conocen las coordenadas de A' y B' .
- E. No es posible determinar las coordenadas del vector de traslación.

Realizar composiciones de transformaciones isométricas reconociendo la figura resultante. (Lección 34)

- 9 Si el punto $N(1, -2)$ es rotado en 90° con respecto al origen del plano cartesiano y luego, desde esta nueva posición, se traslada según el vector $\vec{s} = (-2, -1)$, ¿cuáles son las nuevas coordenadas de dicho punto?

- A. $N''(-1, -2)$ D. $N''(-2, 1)$
 B. $N''(2, 1)$ E. $N''(0, 0)$
 C. $N''(1, 2)$

- 10 Si al punto A de la figura se le aplica una rotación con centro en el origen y ángulo de rotación -90° , ¿qué coordenadas tiene el punto luego de ser rotado?



- A. (3, 2) C. (-2, 3) E. (-2, -3)
 B. (-3, 2) D. (-3, -2)

- 11 Si el punto $A(-6, -1)$ es trasladado según el vector $\vec{v} = (4, -2)$ se obtiene el punto A' . ¿Cuáles deben ser las componentes de otro vector de traslación $\vec{u}$ para que A' se ubique sobre el origen?

- A. $\vec{u} = (-2, -3)$ D. $\vec{u} = (2, -3)$
 B. $\vec{u} = (2, 3)$ E. $\vec{u} = (0, 0)$
 C. $\vec{u} = (-2, 3)$

- 12 Si a un triángulo se le aplica una traslación, luego una rotación y finalmente una simetría axial, ¿qué sucede con su área?

- A. Se triplica
 B. Se reduce a su tercio
 C. Se reduce en un tercio
 D. Se mantiene constante
 E. Falta información

Comprender el concepto de congruencia y reconocer figuras congruentes a partir de los criterios de congruencia de triángulos. (Lecciones 35 y 36)

- 13 Si se aplica una traslación $T_{\vec{u}}(x, y)$ con $\vec{u} = (-1, -1)$ a un triángulo escaleno ABC , ¿qué figura resulta?

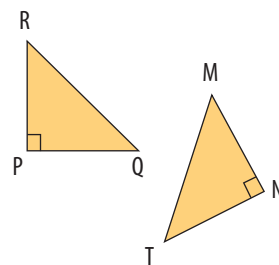
- A. Un rectángulo de igual área al ΔABC .
 B. Un triángulo isósceles de igual área al ΔABC .
 C. Un triángulo rectángulo de igual área al ΔABC .
 D. Un triángulo congruente al triángulo ABC .
 E. Ninguna de las anteriores.

- 14 Si se quiere construir un rectángulo congruente a otro dado, ¿qué información es necesaria para dicha construcción?

- A. El área del rectángulo.
 B. El perímetro del rectángulo original.
 C. La medida de las diagonales del rectángulo original.
 D. Los ángulos que se forman en la intersección de sus diagonales.
 E. En todos los casos falta información.

- 15 Si $\Delta PQR \cong \Delta NMT$, entonces ¿cuál de las siguientes proposiciones es FALSA?

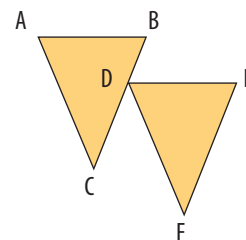
- A. $\overline{PQ} \cong \overline{NT}$
 B. $\overline{PR} \cong \overline{NM}$
 C. $\overline{QR} \cong \overline{TM}$
 D. $\angle QRP \cong \angle TMN$
 E. $\angle PQR \cong \angle TMN$



Resolver problemas que involucren el cálculo de medidas en figuras planas y demostraciones de propiedades en polígonos a partir de los criterios de congruencia. (Lecciones 37 y 38)

- 16 Si en la figura, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ con $D \in \overline{BC}$, $\overline{AC} \parallel \overline{DF}$, $m(\angle BDE) = 80^\circ$ y $m(\angle ACB) = 40^\circ$, ¿cuál es la medida del $\angle DEF$?

- A. 40°
 B. 60°
 C. 80°
 D. 90°
 E. No se puede determinar

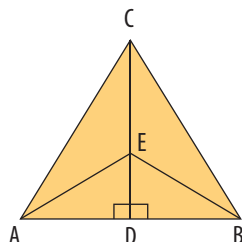




- 17 El triángulo ABC es isósceles de base $\overline{AB}$ y $\overline{AD} \cong \overline{DB}$. Entonces, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) VERDADERA(S)?

- I. $\triangle ADE \cong \triangle BDE$
- II. $\triangle AEC \cong \triangle BEC$
- III. $\triangle ADC \cong \triangle BDC$

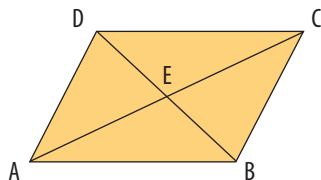
- A. Solo I
- B. Solo II
- C. Solo III
- D. I y II
- E. I, II y III



- 18 Si el cuadrilátero de la figura es un romboide con $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ sus diagonales, ¿cuál(es) de la(s) siguiente(s) relación(es) de congruencia es(son) VERDADERA(S)?

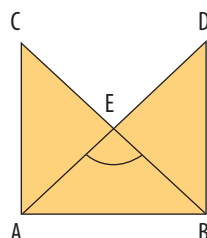
- I. $\triangle ABC \cong \triangle ADC$
- II. $\triangle AED \cong \triangle CEB$
- III. $\triangle CED \cong \triangle AEB$

- A. Solo I.
- B. Solo II.
- C. I y II.
- D. II y III.
- E. I, II y III.



- 19 Los triángulos ABC y BAD son congruentes. ¿Qué dato es necesario para conocer la medida del $\angle BEA$?

- A. $m(\angle BCA) = 40^\circ$
- B. $m(\angle BDA) = 40^\circ$
- C. $m(\angle BAD) = 40^\circ$
- D. $m(\angle CAE) = 40^\circ$
- E. $m(\angle ABD) = 90^\circ$



II. Resuelve los siguientes problemas.

Identificar y representar puntos, figuras y vectores en el plano cartesiano. (Lecciones 27 y 28)

- 1 El plan de seguridad de una villa ha ubicado en coordenadas cartesianas las casas de sus moradores. De acuerdo con el plano, la caseta de seguridad se ubica en el origen, el almacén, en el punto (3, 2), la veterinaria, en el (-4, 0), el restaurante, en el (-2, 2), la casa de la presidenta de la junta de vecinos, en el (-7, 1) y su oficina, en el (2, 3) y la peluquería, en el (-7, 2).

- a. Dibuja un plano cartesiano y ubica cada punto
- b. ¿Qué lugar se encuentra más cerca de la caseta de seguridad?
- c. Si una persona se ubica en la peluquería, ¿qué vector representaría su desplazamiento hasta el veterinario?
- d. La presidenta de la junta de vecinos va a informar a la caseta de seguridad sobre una actividad que se realizará en la villa. Luego se devuelve a su hogar. ¿Cuáles son las componentes de los vectores que representan este desplazamiento? ¿Qué características tienen?

- 2 En una carrera de video juegos, un auto avanza de acuerdo con el vector $\vec{p} = (2, 3)$ cada vez que pasa un árbol, y de acuerdo al vector $\vec{n} = (0, 1)$ cada vez que pasa un poste. Miguel está jugando con su amigo Francisco y ambos parten desde el punto (0, 0).

- a. Si el auto que conduce Matías ha pasado por un árbol y un poste, ¿cuáles serían las componentes que representan este desplazamiento?
- b. Si Francisco ha pasado 5 árboles, ¿cuáles son las componentes del vector que representa este desplazamiento?
- c. Al finalizar la carrera Miguel ha pasado 5 árboles y 4 postes, mientras que Francisco ha pasado 4 árboles y cinco postes. ¿Quién de ellos avanzó más hacia el norte?

Identificar las regularidades al aplicar transformaciones isométricas en el plano cartesiano. (Lecciones 31, 32 y 33)

- 3 Isidora descargó un programa para su teléfono que le permite ubicarse en el plano de su ciudad. De acuerdo con este el auto que maneja se ubica en el punto (-1, 5).

- a. Si el vector con el que se desplaza su auto es $\vec{c} = (4, 8)$, ¿en qué punto del plano se ubicará luego de trasladarse?
- b. Si desde el punto en que se ubica el auto originalmente gira en 90° con respecto a (0, 0). ¿en qué punto del plano se ubicará posteriormente?
- c. El supermercado se ubica en el punto (-1, -5). ¿Con que transformación isométrica podría Isidora llegar hasta ese punto?

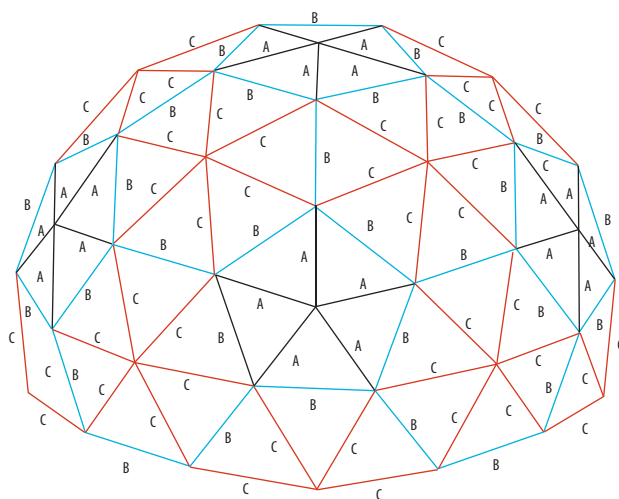
Realizar composiciones de transformaciones isométricas reconociendo la figura resultante. (Lección 34)

- 4** En una nueva modalidad del juego tetric, se deben hacer calzar figuras en un plano cartesiano. Una de estas figuras se ubica en los puntos A(10, 4), B(10, 5), C(12, 5), D(12, 3), E(11, 3).

- Si se le aplica una $R_{(O, 180^\circ)}$ y luego una $T_{(-1, 5)}$, ¿cuál será la ubicación de los vértices de la figura?
- Si el vértice B, debe ubicarse en la coordenada $(-10, 5)$, ¿qué composición de transformaciones permitiría a la figura llegar hasta ese punto?

Comprender el concepto de congruencia y reconocer figuras congruentes a partir de los criterios de congruencia de triángulos. (Lecciones 35 y 36)

- 5** Dibuja un cuadrilátero cuyas diagonales se dividan (intersecten en el punto medio de cada diagonal), sean perpendiculares y midan 6 cm y 8 cm, respectivamente.
- ¿Qué figuras geométricas se forman en el interior del cuadrilátero?
 - ¿Qué elementos son homólogos en las figuras formadas? Escribe al menos cuatro.
 - ¿Son congruentes? ¿Por qué?
- 6** Un domo geodésico está compuesto por al menos tres tipos de triángulos diferentes, pero que se replican por sectores para armar la estructura, como se muestran en la imagen.



Los triángulos tienen tres medidas diferentes de lados representados por las letras A, B y C.

- Haciendo uso de las transformaciones isométricas, marca los triángulos que serían congruentes y justifica por qué lo son.
- Identifica al menos un hexaedro en la imagen y señala qué transformación aplicarías para obtener el más cercano.

Resolver problemas que involucren el cálculo de medidas en figuras planas y demostraciones de propiedades en polígonos a partir de los criterios de congruencia. (Lecciones 37 y 38)

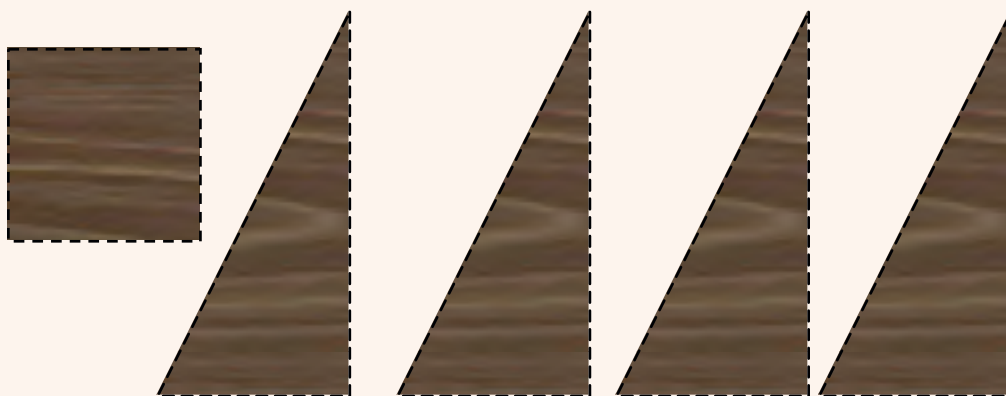
- 7** Demuestra que cualquier punto P de la bisectriz de un ángulo se encuentra a igual distancia de sus lados.

Desafío

La cuadratura del triángulo

El carpintero Mateo tiene que tapar un hueco cuadrado, pero no le queda ningún trozo de madera del mismo tamaño. Solo dispone de cuatro triángulos rectángulos y el cuadrado mostrados en la figura.

¿Cómo debe colocar los cinco trozos de madera para formar un cuadrado?





Estadística y probabilidad

Ideas previas

La imagen muestra recién nacidos en una maternidad de un hospital de Valdivia.

En la maternidad, se pesó y midió a cada bebé, y se obtuvieron los siguientes resultados.

Nombre del bebé	Peso (kg)	Estatura (cm)
Florencia	1,7	45
Maximiliano	2,6	47,5
Paz	2,3	46,2
Rodrigo	3,1	49,1
Agustina	3	50

- Según las gráficas, ¿quiénes se encuentra en estatura y peso normales?
- ¿Por qué Florencia no se encuentra en un estado normal respecto a todos los bebés nacidos? ¿Cómo lo puedes comprobar?
- ¿Qué significa pertenecer al percentil 50?

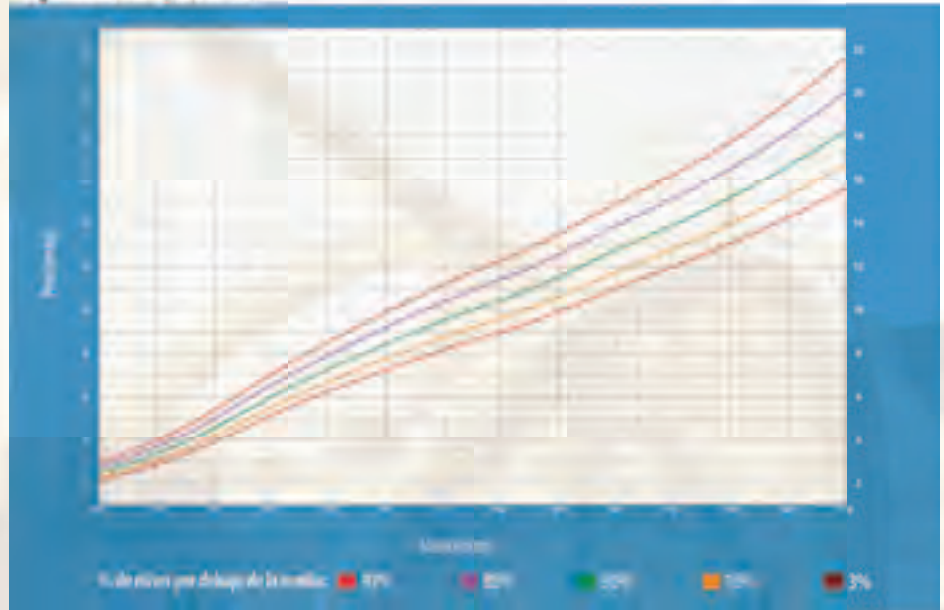
Palabras clave

- ➔ Histograma
- ➔ Polígono de Frecuencia
- ➔ Medidas de tendencia central
- ➔ Medidas de posición
- ➔ Técnicas de conteo
- ➔ Relación entre las medias muestrales y la media poblacional
- ➔ Probabilidad teórica y experimental



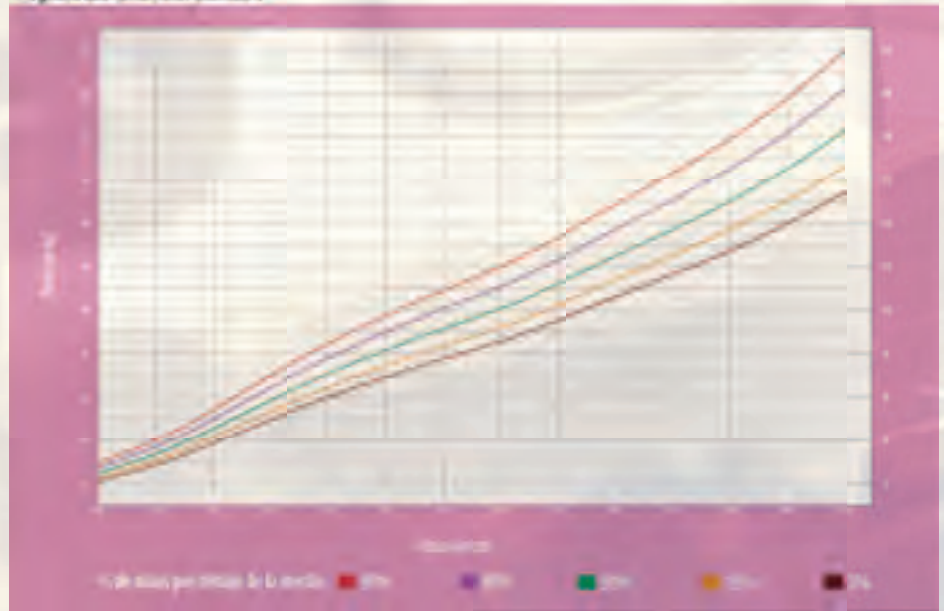
Para los niños: ¿Cuánto debe pesar para su altura?

Segundo año de vida (en Promedios)



Para las niñas: ¿Cuánto debe pesar para su altura?

Segundo año de vida (en Promedios)





Repaso mis conocimientos previos

Las tablas de datos agrupados permiten ordenar y representar datos continuos o que toman muchos valores distintos.

Interpretar información a partir de gráficos y tablas de frecuencias.

1 Analiza la información de la tabla y responde.

Cantidad de palabras leídas en un minuto por estudiantes de 1° Medio	
Cantidad de palabras	Frecuencia
[201; 300]	12
[301; 400]	15
[401; 500]	20
[501; 600]	14
[601; 700]	2

- ¿Cuál es la amplitud de los intervalos de la tabla?
- ¿Cuál es el rango de los datos?
- ¿Cuáles son las marcas de clase de cada intervalo?
- ¿Cuántos alumnos fueron entrevistados?
- ¿Cuántos alumnos leen más de 300 palabras y menos de 501?
- ¿Qué porcentaje de los alumnos lee más de 500 palabras por minuto?

Calcular la media aritmética y moda para datos agrupados en intervalos.

2 Analiza la información de la tabla y responde.

En la siguiente tabla se muestra la masa de un conjunto de estudiantes de cinco escuelas (E) distintas.

Distribución de las masas de los estudiantes de diferentes Escuelas (E)					
Masa (kg)	Cantidad de alumnos				
	E1	E2	E3	E4	E5
[40; 45[	100	30	100	10	65
[45; 50[	80	40	80	20	65
[50; 55[	90	50	50	30	65
[55; 60[	70	60	30	200	65
[60; 65[	60	70	30	200	65
[65; 70[	50	80	50	30	65
[70; 75[	40	90	80	20	65
[80; 85[	30	100	100	10	65

- ¿Qué escuela tiene un promedio de masa mayor?
- ¿Todas las escuelas de la tabla tienen moda? ¿Por qué?
- ¿Qué escuela tiene la moda mas alta? ¿Cuál es la moda de todas las escuelas?
- ¿Cuál es el promedio de todos los datos de la tabla?

La media aritmética y la moda se conocen como medidas de tendencia central.

La media aritmética o promedio en tablas de datos agrupados se calcula como:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i \cdot x_i}{n}$$

Donde f_i es la frecuencia absoluta del intervalo i ; x_i la marca de clase del intervalo i , i es el i -ésimo intervalo y n la cantidad total de datos de la tabla.

Una **muestra** es un subconjunto de individuos de una población. A través de las muestras se pueden inferir datos de la población.

Comprender el concepto de población y muestra.

3 Analiza si las siguientes muestras son representativas de la población de estudio.

- Se seleccionan al azar 100 estudiantes, de un colegio de 300 alumnos, para calcular el promedio de notas de la población.
- Se les pregunta sobre la calidad del servicio a las primeras 100 personas que toman el metro en la mañana.
- Se escogen los niños más altos y los más bajos de un curso para determinar el promedio de la estatura de los alumnos.

Dos o más sucesos son **equiprobables** si tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

Identificar experimentos aleatorios y eventos equiprobables.

4 Identifica en cuál de estos experimentos los eventos son equiprobables.

- Se lanza un dado y se define el evento "obtener el número dos".
- Se lanza una moneda y se define el evento "obtener cara".
- Se extrae una bolita desde una urna con 4 bolitas de color azul y una bolita de color verde, y se define el evento "extraer una bolita verde".
- Se lanzan dos dados y se define el evento "la suma de los valores de los dados".

El **espacio muestral** es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.

Identificar el espacio muestral de un experimento aleatorio.

5 Determina el espacio muestral en los siguientes experimentos aleatorios.

- Lanzar una moneda y un dado y anotar los resultados.
- Sacar una bolita de una urna con 10 bolitas numeradas del 0 al 9 y anotar el número.
- Escoger a una persona en la calle al azar y anotar su género.
- Lanzar dos dados y anotar la suma de sus caras.
- Escoger un número entero positivo del conjunto de los números enteros.
- Escoger al azar un vértice de un triángulo ABC y se anotan sus coordenadas.

La **regla de Laplace** indica que la probabilidad de un suceso A en un experimento aleatorio equiprobable es:

$$P(A) = \frac{\text{Nº casos favorables}}{\text{Nº casos totales}}$$

Relacionar la probabilidad teórica y el modelo de Laplace.

6 Resuelve los siguientes problemas.

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener tres caras al lanzar tres monedas?
- Si se lanzan dos dados, ¿es más probable que la suma de las caras de los dados sea 10 o 7?
- En una bolsa hay 2 bolitas rojas, 15 amarillas y 12 verdes. Si se saca una bolita al azar, calcula cuál es la probabilidad de:
 - Extraer una bolita roja.
 - Extraer una bolita amarilla.
 - Extraer una bolita verde.
 - Extraer una bolita roja o amarilla.
- Se lanza un dado cargado cuyas caras tienen las siguientes probabilidades, $P(1) = P(2) = P(3) = 2a$, $P(4) = 5a$, $P(5) = 6a$ y $P(6) = a$:
 - ¿Cuál es el valor de a ?
 - ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número menor o igual que 3?

Palabras clave

- ➔ Construcción de tablas con datos agrupados, histogramas y polígonos de frecuencia.

Repasa

- El **rango** es la diferencia entre el dato máximo y el dato mínimo.
- La **amplitud** de un intervalo es la diferencia entre el límite superior e inferior.
La amplitud (A) de los intervalos puede calcularse mediante la expresión:

$$A = \frac{\text{Rango}}{\text{n}^\circ \text{ de intervalos}}$$

- La **marca de clase** de un intervalo corresponde al promedio entre el límite inferior y el límite superior.
- Tabla de frecuencias** es un tipo de representación que permite organizar datos.
- Frecuencia absoluta (f)**: es el número de veces que se repite un dato o el número de datos incluidos en un determinado intervalo.

Observa

La cantidad de intervalos varía entre 3 y 8. Esta elección dependerá de la cantidad de datos que se estén agrupando. A menor cantidad de datos menor cantidad de intervalos y viceversa.

¿Cómo representar datos agrupados?

- Por lo general, cuando se realiza un estudio o una encuesta, la información obtenida se organiza en tablas y gráficos ¿Por qué piensas que es necesario presentarla de esta manera?

En varios colegios de una comuna se encuestó a los estudiantes de educación media y se les preguntó si eran usuarios de celular. La encuesta arrojó la cantidad de celulares que poseen los estudiantes por curso y los resultados fueron los siguientes:

40	35	41	34	44	37	44	45	39	30	41	32	31	45	43	32
35	39	38	39	43	20	32	33	34	38	37	48	35	27	40	30
29	25	30	45	18	25	25	19	14	26	30	45	37	34	14	17
14	39	39	25	16	24	19	30	53	22	15	10	15	29	13	

¿Cuál es la variable involucrada en la encuesta? ¿Cómo organizarías la información para realizar un informe que dé cuenta del uso de celulares en los colegios?

La variable involucrada en la encuesta es la cantidad de celulares que hay por cada curso encuestado. Para organizar la información se puede construir una tabla de frecuencias con datos agrupados, ya que los valores de la variable son muy distintos entre sí y una tabla simple quedaría con muchas categorías. Para construir una tabla de datos agrupados puedes seguir los siguientes pasos:

Construcción de Tabla de frecuencia para datos agrupados

Paso 1 ➔ Determinar los intervalos de la tabla de frecuencias.

$$\text{Rango: } \text{Máx} - \text{Mín} = 53 - 10 = 43$$

$$\text{Cantidad de intervalos: } 5$$

$$\text{Amplitud: } 43 \div 5 = 8,6 \approx 9$$

Primer intervalo:

$$[10, 10 + 9[\rightarrow [10, 19[$$

Segundo intervalo:

$$[19, 19 + 9[\rightarrow [19, 28[\dots$$

Cantidad de celulares	Frecuencia absoluta
[10, 19[	10
[19, 28[	11
[28, 37[	18
[37, 46[	22
[46, 55]	2
Total	63

Luego se calcula la cantidad de datos que hay en cada intervalo que corresponde a la frecuencia absoluta.

Paso 2 ➔ Calcular la marca de clase de cada intervalo.

Lo logras, calculando la semisuma de los extremos del intervalo, es decir,

$$\frac{10+19}{2} = 14,5$$

Cantidad de celulares	Marca de clase	Frecuencia absoluta
[10, 19[	14,5	10
[19, 28[	23,5	11
[28, 37[	32,5	18
[37, 46[	41,5	22
[46, 55]	50,5	2
Total		63

Paso 3 Calcular las frecuencias absoluta acumulada, relativa y relativa acumulada.

F: frecuencia acumulada.

$$10 + 11 = 21$$

$$10 + 11 + 18 = 39 \dots$$

fr: frecuencia relativa.

$$\frac{10}{63} \approx 0,16 \quad \frac{21}{63} \approx 0,33$$

Fr: frecuencia relativa acumulada.

$$0,16 + 0,17 = 0,33 \dots$$

Cantidad de celulares	Marca de clase	f	F	f _r	F _r
[10, 19[	14,5	10	10	0,16	0,16
[19, 28[	23,5	11	21	0,17	0,33
[28, 37[	32,5	18	39	0,29	0,62
[37, 46[	41,5	22	61	0,35	0,97
[46, 55]	50,5	2	63	0,03	1
Total		63			

Repasa

- **Frecuencia absoluta acumulada (F):** es la suma de las frecuencias absolutas de los valores menores o iguales al valor de la variable en cuestión. El último valor de esta debe ser igual al número total de datos.
- **Frecuencia relativa (f_r):** es el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de datos. Puede ser expresada en fracción, decimal o porcentaje.
- **Frecuencia relativa acumulada (F_r):** es la suma de las frecuencias relativas de los valores menores o iguales al valor de la variable en cuestión. El último valor de esta debe ser igual a 1.

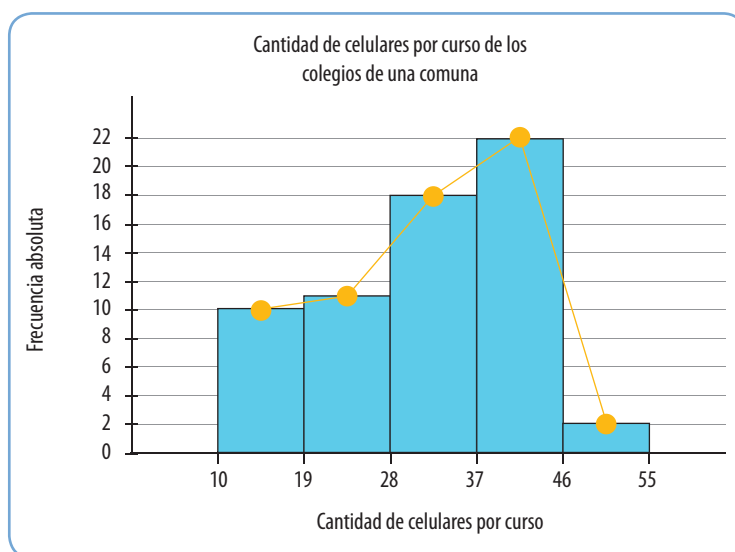
Histograma y polígono de frecuencias

¿Qué gráfico permitiría visualizar la concentración de los datos? ¿Qué gráfico muestra directamente que en la mayoría de los cursos hay aproximadamente 41,5 celulares?

A través de un histograma es posible visualizar la concentración de los datos, y con el polígono de frecuencias podemos observar que la marca de clases que posee la mayor frecuencia absoluta es 41,5. Para construir estos gráficos puedes seguir los siguientes pasos.

Paso 1 Representar en el eje horizontal los intervalos de la variable cantidad de celulares por curso.

Paso 2 Representar en el eje vertical las frecuencias absolutas de cada intervalo.



Paso 3 Construir las barras para cada intervalo cuya altura dependerá de la frecuencia absoluta correspondiente.

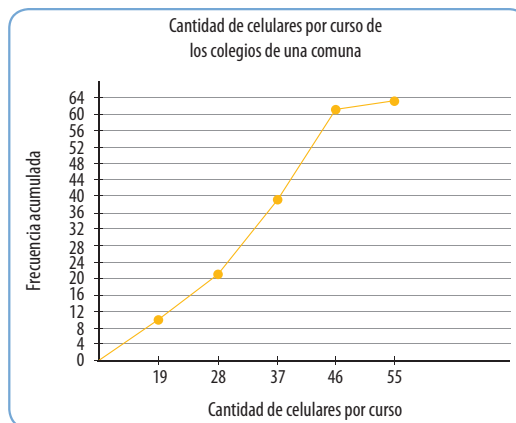
Paso 4 Para obtener el polígono de frecuencias se unen las marcas de clase de cada intervalo de acuerdo con su frecuencia absoluta.

Razona y comenta

- ¿Por qué piensas que se organizaron los datos en 5 intervalos? ¿Cuántos intervalos habrías puesto tú? ¿Por qué?
- Si se quisiera averiguar qué porcentaje de los cursos tiene menos de 30 celulares, ¿qué columna de la tabla serviría para obtener la respuesta directamente?
- ¿Qué gráfico permitiría visualizar directamente la cantidad de celulares que posee el 70% de los cursos?

Paso 5 Graficar el polígono de frecuencias acumuladas.

Para graficar el polígono de frecuencias acumuladas, debes considerar en el eje vertical la frecuencia acumulada y en el eje horizontal los límites superiores de los intervalos.



En resumen

Los datos agrupados en intervalos se pueden **representar** a través de una tabla de frecuencias, de un histograma, de un polígono de frecuencias y/o de un polígono de frecuencias acumulada.

Un **histograma** es una representación gráfica en forma de barras, en las que sus alturas son proporcionales a la frecuencia absoluta de los intervalos representados.

Un **polígono de frecuencias** corresponde a la línea poligonal, que se obtiene al unir los puntos referidos a las marcas de clase y frecuencias absolutas de cada intervalo.

El **polígono de frecuencias acumulada** se representa uniendo los puntos referidos al límite superior y frecuencia acumulada de cada intervalo. También se conoce con el nombre de Ojiva.

Repaso

- Se realizó una encuesta de **Elige vivir sano** para saber cuántas veces por semana los alumnos de un curso practican deporte. Los resultados fueron los siguientes.

2	3	1	0	5	4	3	2	2	2	3	3	4	0	0
1	1	1	0	1	2	2	1	3	3	0	0	1	0	0
2	3	1	0	4	2	2	3	1	1	0	1	2	3	3

- Representa la información entregada por la encuesta en una tabla de frecuencias de datos no agrupados.
- ¿Cuántos alumnos no practican deporte en la semana?
- ¿Cuántos alumnos practican deporte al menos dos veces por semana?
- Construye un gráfico de barras con los datos de la tabla.

- ¿Qué fracción representan los alumnos que practican una vez por semana deporte con respecto al total de alumnos?

Práctica guiada

- Evalúa** si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Justifica las falsas.

V Mediante un gráfico de barras no se puede representar una tabla de datos agrupados.

- ____ No es necesario utilizar tablas de datos agrupados para ordenar una gran cantidad de datos discretos.
- ____ Existen tablas de frecuencias que no se pueden representar mediante un gráfico.
- ____ En las tablas de datos agrupados, un dato se puede repetir en dos intervalos diferentes.
- ____ Una tabla de datos agrupados es más precisa si se aumenta la cantidad de intervalos.

Aplico

3. **Construye** una tabla de datos agrupados en intervalos a partir del grupo de datos entregados. Determinar en ambos casos el número de intervalos.

- a) Los puntajes obtenidos en una prueba de matemática.

25	12	9	36	15	18	13	8	20	21	25	27
35	34	30	40	25	26	32	38	28	40	37	10
19	21	28	35	38	29	13	17	9	26	5	

- b) Las edades de las personas que asistieron al teatro.

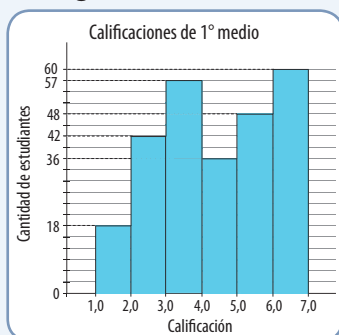
15	19	21	25	64	51	60	23	28	36	32
35	42	45	24	27	31	37	46	48	56	26
33	51	65	49	52	25	21	36	40	62	70

- c) Construye el histograma y el polígono de frecuencia asociado a cada una de la tablas de frecuencias construidas en a) y b).

4. **Construye** el histograma, polígono de frecuencia y de frecuencia acumulada para la siguiente tabla.

Cantidad de agua consumida en un mes por cada familia de un edificio	
Cantidad de agua (m ³)	Nº de familias
[10, 13[	5
[13, 16[	6
[16, 19[	9
[19, 22[	10
[22, 25[	8
[25, 28[	4
[28, 31]	2

5. **Construye** una tabla de datos agrupados en intervalos a partir del gráfico.



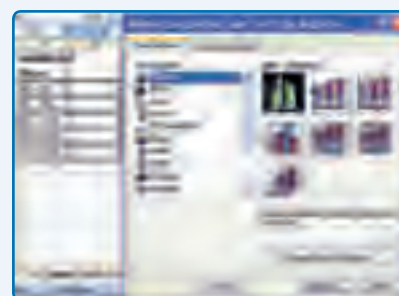
Reflexiono

- ¿Para qué situación es necesario construir un histograma? Da un ejemplo en que este sea necesario y otro en que no.
- ¿Qué diferencia hay entre la construcción de un polígono de frecuencias y un polígono de frecuencias acumuladas?

6. **Construye** en una planilla de cálculo un histograma a partir de los siguientes pasos.

Distribución de discos	
Cantidad de discos	f
[80, 90[	4
[90, 100[	8
[100, 110[	4
[110, 120[	4
[120, 130]	5

- Paso 1:** Copia la tabla en la planilla de cálculo. Luego, presiona el icono  y selecciona **columnas**.



- Paso 2:** Elige el **rango de datos** que quieres graficar y luego selecciona la opción **Filas** y aparecerá el gráfico pedido.



7. **Construye** un polígono de frecuencias en una planilla de cálculo siguiendo los pasos:

- Paso 1:** Copia la tabla de la actividad 6 en la planilla de cálculo. Luego selecciona **líneas** en la opción **tipo de gráfico**. Se agregarán dos filas para poder generar el polígono.

- Paso 2:** Elige el rango de datos que quieres graficar y luego selecciona la opción **Columnas** y aparecerá el gráfico pedido.

Refuerzo

- Describe los pasos que se deben seguir para construir la tabla de datos agrupados a partir de un polígono de frecuencias acumuladas.
- Realiza lo anterior para un histograma.

Palabras clave

- ➔ Interpretación de histogramas, polígonos de frecuencia y tablas con datos agrupados.

¿Cómo interpretar gráficos y tablas de datos agrupados?

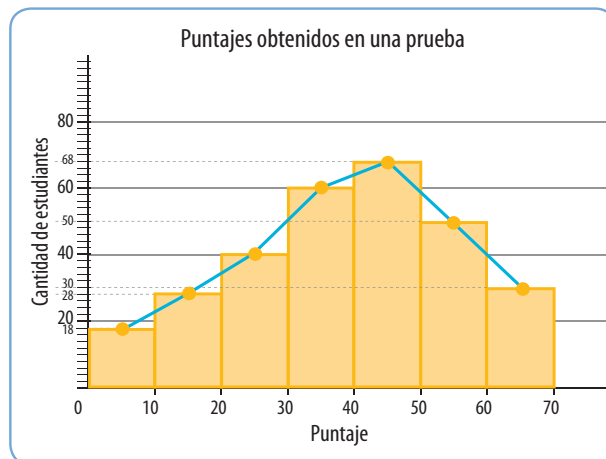
- En los medios de comunicación aparecen distintos tipos de gráficos y tablas, ¿cómo podemos interpretar la información que nos entregan?

Interpretación de histogramas y polígono de frecuencias

En una prueba realizada a 300 estudiantes de 1.º medio se obtuvo el siguiente histograma y polígono de frecuencia.

¿En qué puntaje se concentran el mayor número de estudiantes? ¿Cómo fue el rendimiento de los estudiantes?

Una manera de interpretar la información que aparece en el histograma y responder la pregunta, es a través de los siguientes pasos.



Paso 1 ➔ Identificar las variables representadas en cada eje.

- En el eje horizontal están representados los intervalos de puntajes.
- En el eje vertical está representada la cantidad de estudiantes que fueron evaluados.

Paso 2 ➔ Identificar el tipo de gráfico que representa los datos.

- El gráfico corresponde a un **histograma**, ya que se están representando datos agrupados en intervalos. Las barras están pegadas unas a otras. Además, está trazado el **polígono de frecuencia** correspondiente al histograma indicado por la línea azul que une las marcas de clase de cada intervalo.

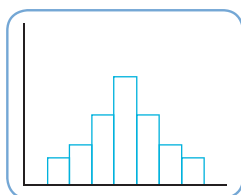
Paso 3 ➔ Analizar la relación entre las variables representadas en el gráfico.

- La altura de cada barra indica la cantidad de estudiantes que obtuvo un puntaje de acuerdo con el intervalo que le corresponde.

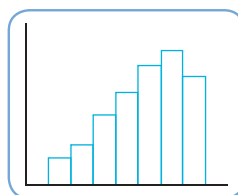
En resumen

Podemos **interpretar un histograma** a partir de la forma de la distribución o concentración de los datos. Según esto se pueden diferenciar dos tipos:

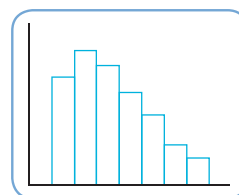
Distribuciones simétricas



Distribuciones asimétricas negativas



Distribuciones asimétricas positivas



Paso 4 ▶ Comparar las barras y responder las preguntas.

- Es posible observar en el polígono de frecuencia que la mayoría de los estudiantes (alrededor de 70) obtuvo un puntaje aproximado de 45 puntos.
- Si se suma la cantidad de estudiantes que obtuvieron un puntaje sobre 45 se obtiene, aproximadamente, 155, en cambio los que obtuvieron menos de 45 puntos fueron 145 estudiantes. Se podría concluir que más del 50% de ellos obtuvo un puntaje sobre el 60% de exigencia.

Por lo tanto, los datos están concentrados en el intervalo $[40, 50[$ y la distribución de los datos es aproximadamente simétrica.

Interpretación de tablas con datos agrupados

La siguiente tabla muestra las notas que obtuvieron en el examen de Lenguaje 180 estudiantes de 1° Medio. ¿Cuántos estudiantes obtuvieron nota inferior a 4,0?

Para interpretar la información que aparece en la tabla y responder la pregunta, puedes seguir los siguientes pasos.

Calificación final de 180 estudiantes			
Calificación	Marca de clase	f	F
$[1,0; 2,0[$	1,5	4	4
$[2,0; 3,0[$	2,5	6	10
$[3,0; 4,0[$	3,5	17	27
$[4,0; 5,0[$	4,5	101	128
$[5,0; 6,0[$	5,5	40	168
$[6,0; 7,0]$	6,5	12	180

Paso 1 ▶ Identifica la variable involucrada.

La variable involucrada es la calificación, cuyas clases son los intervalos de notas, y la cantidad de estudiantes está representada por la frecuencia absoluta (f). El resto de las columnas se obtienen de las ya mencionadas.

Paso 2 ▶ Identificar las clases.

Las clases o intervalos de notas tienen una amplitud de 1,0, las marcas de clase de cada intervalo aparecen en la segunda columna, siendo los representantes de cada clase, por ejemplo, para el intervalo $[5,0; 6,0[$ su representante es 5,5.

Paso 2 ▶ Interpretar cada clase de acuerdo con su frecuencia.

Al asociar a cada intervalo su frecuencia absoluta (f) podemos interpretar que 4 alumnos obtuvieron nota entre 1,0 y 2,0; 6 entre 2,0 y 3,0 y 17 entre 3,0 y 4,0.

Al observar la frecuencia acumulada (F) podemos responder a la pregunta, ya que 27 estudiantes obtuvieron nota menor a 4,0.

Links

Para reforzar la representación de datos en tablas y gráficos visita:
<http://goo.gl/1ARBS>



En resumen

Una **tabla de frecuencias** es un tipo de representación que permite organizar datos.

De acuerdo a la información que se desea obtener debemos observar la columna que sea más útil. Por ejemplo, si se desea conocer un porcentaje, la columna de la frecuencia relativa nos entregaría esta información más directamente, en cambio si se quisiera conocer la acumulación de datos hasta cierto intervalo, la columna que nos entrega esta información corresponde a la de la frecuencia acumulada.

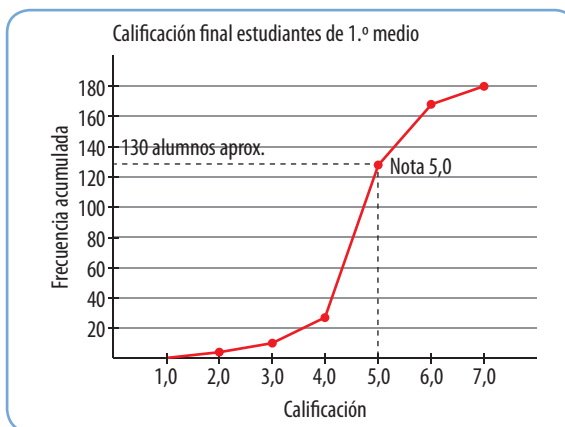
Razona y comenta

- ¿Cuál es la diferencia entre un gráfico de barras y un histograma?
- ¿Para qué tipo de variables se utiliza un histograma?
- ¿Cuándo es necesario utilizar el polígono de frecuencia? ¿Y el polígono de frecuencia acumulada?

Interpretación de polígono de frecuencia acumulada

El colegio implementará un programa de reforzamiento si la mayoría de los estudiantes tienen nota menor o igual a 5,0. El colegio, ¿tendrá que implementar el plan para estos alumnos?

Para responder interpretaremos el polígono de frecuencia acumulada asociada a la tabla.



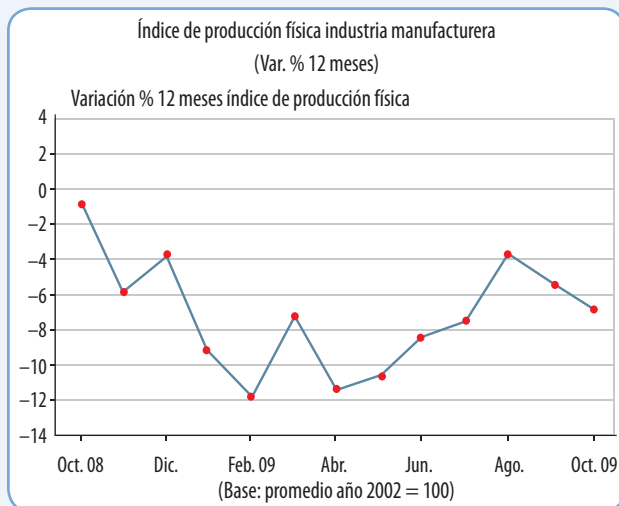
Por lo tanto, alrededor de 130 estudiantes obtuvieron calificación menor o igual 5,0 versus 50 estudiantes que obtuvieron sobre esa nota. Entonces, el colegio tendrá que implementar el programa de reforzamiento.

En resumen

La **interpretación de un polígono de frecuencias** se utiliza para visualizar la frecuencia de los distintos intervalos en que están agrupados los datos. A su vez, en el polígono de frecuencias acumuladas es posible observar donde se concentran las observaciones.

Repaso

1. Analiza el siguiente gráfico. Luego, responde.



- ¿En qué meses la variación fue positiva?
- ¿En qué meses la variación es negativa?

Práctica guiada

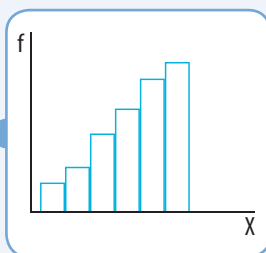
2. Evalúa si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Justifica las falsas.

V Un histograma puede representar una **distribución simétrica y asimétrica de los datos.**

- Un polígono de frecuencias es una representación de datos que muestra solo datos distribuidos asimétricamente.
- En un histograma se pueden representar solo datos agrupados en intervalos.
- Un polígono de frecuencias acumuladas muestra la concentración de los datos.

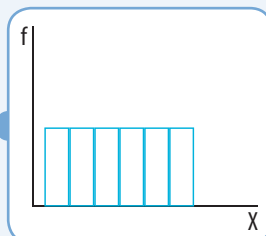
3. **Relaciona** la tabla de datos con el gráfico que mejor lo represente.

X	f
[10, 20[	9
[20, 30[	4
[30, 40[	2
[40, 50[	3
[50, 60[	6
[60, 70[	8



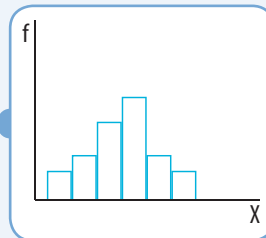
a)

X	f
[10, 20[	2
[20, 30[	3
[30, 40[	4
[40, 50[	7
[50, 60[	3
[60, 70[	1



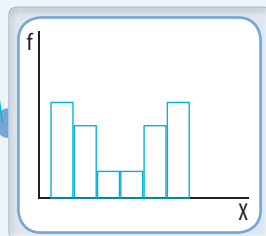
b)

X	f
[10, 20[	2
[20, 30[	3
[30, 40[	4
[40, 50[	5
[50, 60[	6
[60, 70[	7



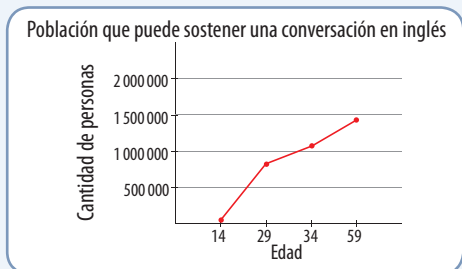
c)

X	f
[10, 20[	6
[20, 30[	6
[30, 40[	6
[40, 50[	6
[50, 60[	6
[60, 70[	6



Aplico

4. **Analiza** el gráfico que muestra la población que puede llegar a sostener una conversación en inglés de acuerdo a la edad, según el Censo 2012 y responde las preguntas.



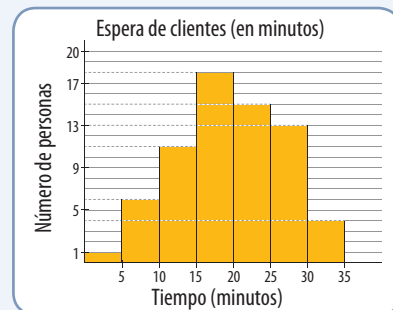
Reflexiono

- ¿Cuál es la importancia de aprender a interpretar gráficos y tablas? ¿Por qué?

- a) ¿Cuántas personas menores de 30 años sostienen conversaciones en inglés?
- b) ¿Cómo es la distribución de los datos del polígono de frecuencias acumuladas? ¿Por qué?

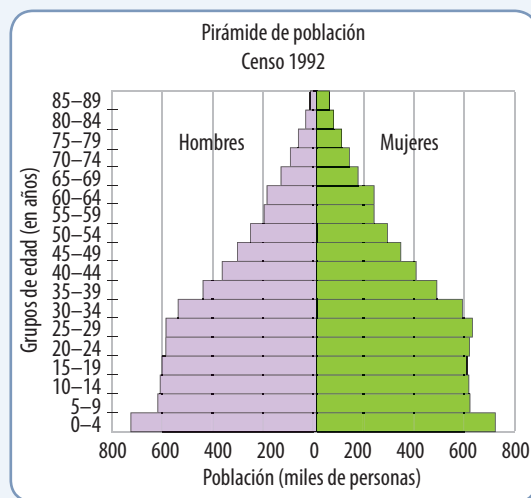
5. **Interpreta** los siguientes gráficos y evalúa si las afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F).

- a) El histograma representa los minutos de espera de los clientes de una tienda comercial.



- La mayoría de los clientes espera entre 15 y 25 minutos en la tienda comercial.
- Existen entre 11 y 15 personas que esperan 10 a 25 minutos en la tienda.

- b) El histograma representa la cantidad de habitantes que hay según el grupo de edad establecido.



- Entre los 45 y 49 años, no existe diferencia entre la cantidad de hombres y mujeres.
- Según el Censo 1992, la mayor cantidad de personas se encuentra en el tramo de 0 a 4 años de vida, tanto en hombres como en mujeres.

Refuerzo

- ¿Cómo están distribuidos los datos del histograma de la pregunta 4?

Palabras clave

- ➔ Media aritmética.
- ➔ Moda.
- ➔ Mediana.

Repasa**Medidas de tendencia central**

La **media aritmética** o promedio es el valor central (no la mitad) del conjunto de datos.

Para datos no agrupados la media se calcula como:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \text{ donde } x_i \text{ corresponde al dato "i" de los "n" datos.}$$

La **moda** es el valor que más se repite (que tiene la mayor frecuencia) dentro de un conjunto de datos. Puede existir más de una moda o ninguna moda.

La **mediana** es el valor que se ubica en el centro del conjunto de datos cuando éstos fueron previamente ordenados de menor a mayor o de mayor a menor, de manera que el 50 % de ellos son menores o iguales que la mediana, y el otro 50 % son mayores o iguales.

¿Cómo calcular medidas de tendencia central?

- Al finalizar un semestre escolar ¿de qué manera calculas el promedio de tus calificaciones? ¿Cómo puedes saber tu rendimiento durante el año?

Un nutricionista debe implementar un programa alimenticio para dos escuelas que tienen la misma cantidad de alumnos. Él decide efectuar el programa a partir del índice de masa corporal (IMC) de los estudiantes. Los resultados del IMC se encuentran en las siguientes tablas.



Si la media aritmética o promedio de cada escuela supera los 25 kg/m², o la moda y mediana de los datos superan al promedio respectivo de cada curso, el nutricionista solicitará la implementación del plan alimenticio. ¿Cuál de las dos escuelas necesitará el nuevo programa alimenticio?

Escuela N° 1			Escuela N° 2		
IMC (kg/m ²)	Marca de clase	f	IMC (kg/m ²)	Marca de clase	f
[13, 17[	15	10	[13, 17[	15	60
[17, 21[	19	15	[17, 21[	19	50
[21, 25[	23	25	[21, 25[	23	40
[25, 29[	27	40	[25, 29[	27	30
[29, 33[	31	50	[29, 33[	31	20
[33, 37]	35	70	[33, 37]	35	10

Media aritmética o promedio

Para responder a la pregunta de la situación calcularemos la media aritmética o promedio de los datos agrupados en intervalos de cada curso, llevando a cabo los siguientes pasos:

- Paso 1** ➔ Calcular la suma de los productos entre la frecuencia absoluta y la marca de clase de cada intervalo, tal como se indica en las siguientes tablas.

Escuela N° 1				Escuela N° 2			
IMC	Marca de clase	f	f • MC	IMC	Marca de clase	f	f • MC
[13, 17[	15	10	150	[13, 17[	15	60	900
[17, 21[	19	15	285	[17, 21[	19	50	950
[21, 25[	23	25	575	[21, 25[	23	40	920
[25, 29[	27	40	1080	[25, 29[	27	30	810
[29, 33[	31	50	1550	[29, 33[	31	20	620
[33, 37]	35	70	2450	[33, 37]	35	10	350
Total		210	6090	Total		210	4550

- Paso 2** ➔ Dividir la suma obtenida en el paso anterior en la cantidad de datos.

Escuela N° 1	Escuela N° 2
$\bar{x} = \frac{6090}{210} = 29$	$\bar{x} = \frac{4550}{210} \approx 22$

Por lo tanto, el nutricionista solicitará que en la escuela N°1 se implemente el plan nutricional considerando en este caso que la media aritmética de la escuela es superior a 25 kg/m².

Observa

El índice de masa corporal (IMC) mide el exceso de peso relacionando la altura y la masa de una persona.

Moda

Se necesita saber si en la escuela N°2 la moda supera a la media aritmética, por lo tanto, el nutricionista efectúa los siguientes pasos.

Escuela N° 2		
IMC (kg/m ²)	MC	f
[13, 17[	15	60
[17, 21[	19	50
[21, 25[	23	40
[25, 29[	27	30
[29, 33[	31	20
[33, 37]	35	10

Paso 1 ➔ Determinar el intervalo modal, es decir, el intervalo con mayor frecuencia absoluta. En este caso la mayor frecuencia es 60 alumnos que corresponde al intervalo [13, 17[.

Paso 2 ➔ Determinar el límite inferior del intervalo modal. El límite inferior del intervalo modal es $L = 13$

Paso 3 ➔ Calcular la diferencia entre la frecuencia del intervalo modal y la frecuencia anterior a esta. La frecuencia del intervalo modal es 60 y no hay intervalo anterior. Por lo tanto, $D1 = 60 - 0 = 60$

Paso 4 ➔ Calcular la diferencia entre la frecuencia del intervalo modal y la frecuencia posterior a esta.

La frecuencia del intervalo modal es 60 y la frecuencia posterior es 50. Por lo tanto, $D2 = 60 - 50 = 10$

Paso 5 ➔ Calcular la amplitud del intervalo modal. $A = 17 - 13 = 4$

Paso 6 ➔ Remplazar los datos obtenidos en la fórmula.

$$Mo = 13 + \frac{60}{60 + 10} \cdot 4 \approx 16,43$$

Como conclusión, la moda no supera a la media ($16,43 \text{ kg/m}^2 < 22 \text{ kg/m}^2$), es decir, la mayoría de los estudiantes tiene un IMC menor que el promedio de los alumnos de la escuela.

En resumen

Para calcular **medidas de tendencia central** en datos agrupados se puede obtener una aproximación de estas a partir de las siguientes expresiones:

- La **media aritmética** o promedio para datos agrupados se calcula como:

$$\bar{x} = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + \dots + f_k \cdot x_k}{n} \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i \cdot x_i}{n} \quad \text{siendo } x_i \text{ la marca de clase de cada intervalo, } f_i \text{ es la frecuencia absoluta de cada intervalo e } i \text{ es el } i\text{-ésimo intervalo.}$$

- La **moda** para datos agrupados se calcula como: $Mo = L + \frac{D1}{D1 + D2} \cdot A$

L: Límite inferior del intervalo modal.

D1: Diferencia entre la frecuencia del intervalo modal y la frecuencia del intervalo anterior a éste.

D2: Diferencia entre la frecuencia del intervalo modal y la frecuencia del intervalo posterior a éste.

A: Amplitud del intervalo modal.

Razona y comenta

- ¿Cómo deberían variar los datos de la tabla del escuela N° 1 para que la media aritmética disminuya?
- ¿Es necesario cambiar todos los valores de la tabla? Justifica tu respuesta.

Mediana

Para tomar la decisión final, el nutricionista calculará la mediana de la escuela N°2, y la comparará con el promedio para lo cual realiza los siguientes pasos:

Límite inferior del intervalo de la mediana.

IMC	MC	f	F
[13, 17[	15	60	60
[17, 21[	19	50	110
[21, 25[	23	40	150
[25, 29[	27	30	180
[29, 33[	31	20	200
[33, 37]	35	10	210
	Total	210	

60 es la frecuencia acumulada anterior al intervalo de la mediana.

50 es la frecuencia absoluta del intervalo de la mediana.

Paso 1 ➔ Determinar el intervalo de la mediana, es decir, aquel en el que se ha acumulado el 50% de los datos.

El 50% de los datos es $210 : 2 = 105$, y la frecuencia acumulada mayor o igual a 105 se da en el intervalo [17, 21[.

Paso 2 ➔ Determinar el límite inferior del intervalo de la mediana.

El límite inferior del intervalo de la mediana es $L = 17$.

Paso 3 ➔ Calcular la diferencia entre mitad de la cantidad de datos $\left(\frac{n}{2}\right)$ y la frecuencia acumulada del intervalo anterior (F) al intervalo de la mediana.

$$\frac{n}{2} = \frac{210}{2} = 105$$

y $F = 60$

Paso 4 ➔ Determinar la frecuencia absoluta del intervalo de la mediana.

La frecuencia absoluta del intervalo de la mediana es $f = 50$.

Paso 5 ➔ Calcular la amplitud del intervalo de la mediana.

$$A = 21 - 17 = 4$$

Paso 6 ➔ Remplazar los datos obtenidos en la fórmula.

$$Me = 17 + \frac{105 - 60}{50} \cdot 4 \approx 20,6$$

Luego, el 50% de los estudiantes está bajo o sobre un IMC de 20,6 kg/m², y este valor no supera a la media del colegio: 22 kg/m². Por lo tanto, en la escuela N° 2 no se tendrá que implementar el plan, ya que la moda y la mediana no superan al promedio del IMC de los estudiantes de la escuela.

En resumen

La **mediana** para datos agrupados se calcula como:

$$Me = L + \frac{\frac{n}{2} - F}{f} \cdot A$$

L: Límite inferior del intervalo de la mediana.

F: Frecuencia acumulada del intervalo anterior al intervalo de la mediana.

f: Frecuencia absoluta del intervalo de la mediana.

A: Amplitud del intervalo de la mediana.

n: Número total de datos

Repaso

1. **Evalúa** las proposiciones y escribe V si son verdaderas o F si son falsas. Justifica las falsas.

- Los datos cualitativos no tienen promedio.
- Un conjunto de datos no puede tener dos modas.

- Un conjunto de datos cuantitativos siempre tiene promedio.
- Un conjunto de datos cuantitativos siempre tiene mediana.
- La moda de un conjunto de datos cualitativos no se puede determinar.

Práctica guiada

2. **Calcula** la media aritmética, la moda y la mediana para los datos de las siguientes tablas.

Cantidad de hermanos	
Número de hermanos	f
0	2
1	4
2	3
3	7

$M_o = 3$
 $M_e = 2$
 $\bar{x} \approx 2$

a)

Distancia de salto		
Longitud de salto (m)	Marca de clase	f
[0,3; 0,6[	0,45	2
[0,6; 0,9[	0,75	3
[0,9; 1,2[	1,05	5
[1,2; 1,5[	1,35	12
[1,5; 1,8[	1,65	13

b)

Libros leídos en un año		
Cantidad de libros leídos	f	F
[0, 2[	100	100
[2, 4[	80	180
[4, 6[	50	230
[6, 8]	20	250

Aplico

3. **Analiza** la tabla y luego responde.

Masa corporal estudiantes de primero medio	
Masa corporal (kg)	Cantidad de estudiantes
[50, 55[	6
[55, 60[	13
[60, 65[	9
[65, 70[	13
[70, 75]	4

- a) ¿Cuál es la moda de los datos en la tabla anterior? ¿Cómo justificarías lo sucedido?
- b) Si ingresan tres alumnos nuevos al curso con masas entre los 70 y los 75 kg, ¿cuál es la media aritmética de la masa corporal del curso?

Reflexiono

- ¿Por qué crees que es necesario realizar estudios estadísticos para tomar algunas decisiones?

4. **Analiza** la información y responde.

Un grupo de scouts quiere participar en dos ferias artesanales, pero solamente tienen dinero para la inscripción en una de ellas. Para decidir en cuál participar analizan los siguientes datos sobre las edades de los asistentes a cada una de las ferias durante los años anteriores.

Rango de edades	Feria A	Feria B
[10, 15[	20	20
[15, 20[	50	30
[20, 25[	70	20
[25, 30[	21	60
[35, 40[	30	56
[45, 50]	25	55

- a) ¿En qué feria les conviene participar si los productos que pretenden vender están dirigidos a niños menores de 10 años?
- b) ¿Y si los productos estuvieran orientados a clientes entre 15 y 30 años? Argumenta mediante el cálculo de las medidas de tendencia central.
- c) ¿Crees que con estos datos es suficiente para tomar una decisión sobre el tipo artesanía que se debería vender en cada feria? ¿Qué datos crees que es necesario considerar y que no están presentes en la tabla?

5. **Descubre el error.** Para una tarea de Educación Física Manuel diseñó una encuesta que le permitiera conocer la estatura de sus compañeros. Después organizó los datos recogidos en la siguiente tabla:

Estaturas	f	F
[1,55; 1,60[	13	13
[1,60; 1,65[	12	25
[1,65; 1,70[	3	28
[1,70; 1,75[	2	30
[1,75; 1,80[	6	36
[1,80; 1,85]	4	40

Al sacar las conclusiones, Manuel afirma que, en promedio, el curso mide aproximadamente 1,66 cm, la estatura que más se repite está cerca del 1,61 cm y que sobre el 50% de los alumnos tiene una estatura superior a 1,63 cm ¿Cuál fue el error de Manuel en una de sus conclusiones?

Refuerzo

Construye una tabla de datos de cinco intervalos que tenga como promedio 23,5 unidades.

Palabras clave

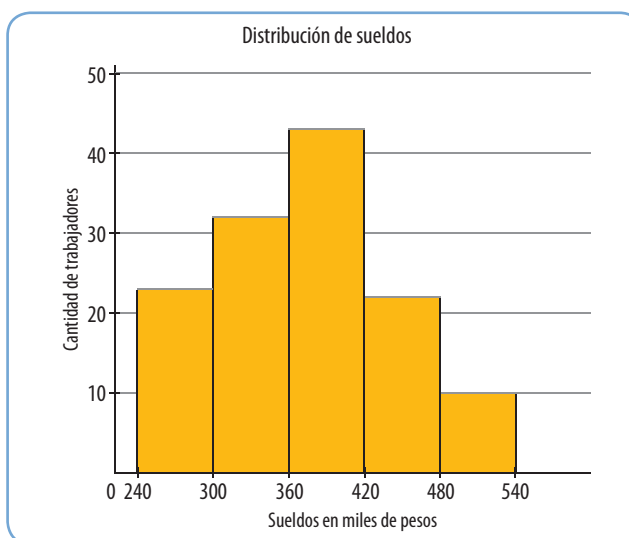
- ➔ Interpretación de media aritmética.
- ➔ Moda.
- ➔ Mediana.

¿Cómo interpretar medidas de tendencia central?

- Cuando calculas el promedio, ¿qué representa este de tus calificaciones? ¿Qué crees que significan frases como: En promedio, los buses llegan con 2 minutos de retraso?

En la empresa Labor trabajan 180 personas, de las cuales, 130 no tienen cargos administrativos y el resto sí. El contador desea obtener un valor que sea representativo del sueldo de los trabajadores de acuerdo al área en donde se desempeñan analizando la tabla de datos agrupados, el histograma y las medidas de tendencia central (MTC) de los sueldos de mayo en cada área.

Caso 1: Trabajadores que no tienen cargos administrativos.

**Observa**

La **distribución** o concentración de los datos de una muestra o población corresponde a la tendencia que siguen los datos de acuerdo a su frecuencia.

Relaciona

¿A qué intervalo pertenece la moda calculada para datos agrupados? ¿Cómo puedes verificar que el cálculo de este valor está correcto?

Sueldos de trabajadores		
Sueldo en miles de pesos	Frecuencia absoluta	MTC
[240, 300[	23	Media: $\bar{x} = 373,38$ Mediana: $M_e = 373,95$ Moda: $M_o = 380,625$
[300, 360[	32	
[360, 420[	43	
[420, 480[	22	
[480, 540]	10	

Para determinar qué valor de las MTC es más representativo del sueldo de los trabajadores, se pueden seguir los siguientes pasos.

Paso 1 ➔ Comparar cada MTC con respecto a la concentración de los datos.

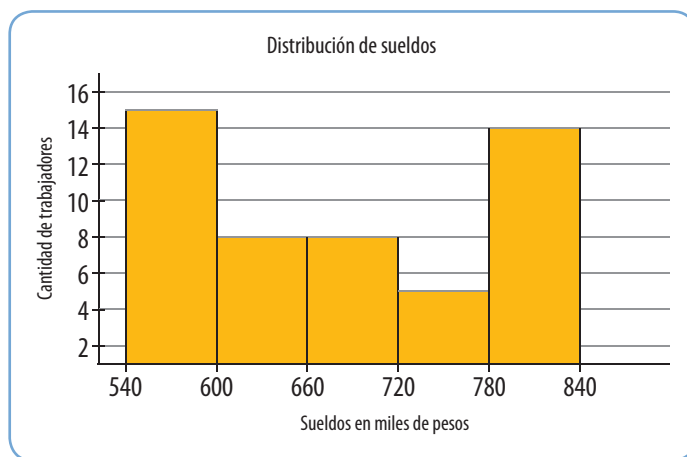
- La **media** pertenece al intervalo en donde se concentran la mayoría de los datos, por lo tanto, podría ser un valor que represente mejor el conjunto de datos.
- La **mediana** también describe el conjunto de datos, ya que la mayor parte de estos se acumula alrededor de este valor.
- Al observar el histograma vemos que la concentración de los datos está alrededor de la **moda**, por lo tanto esta medida también es un buen representante del conjunto de datos.

Paso 2 ➤ Comparar las MTC entre sí.

Al comparar las MTC se puede concluir que son valores bastante cercanos y esto se debe a que los datos son homogéneos entre sí. El histograma nos muestra que los datos siguen una distribución aproximadamente simétrica lo que reafirma la conclusión anterior.

En conclusión, el contador puede utilizar cualquiera de la MTC como un representante para este conjunto de datos.

Caso 2: Trabajadores que tienen cargos administrativos.



Salarios de trabajadores administrativos		
Sueldo en miles de pesos	Frecuencia absoluta	MTC
[540, 600[	15	Media: $\bar{X} = 684$ Mediana: $M_e = 675$ Moda: $M_o = 580,91$
[600, 660[	8	
[660, 720[	8	
[720, 780[	5	
[780, 840]	14	

Paso 1 ➤ Comparar cada MTC con respecto a la distribución de los datos.

- La mayoría de los datos se concentra en el intervalo [540; 600[, aunque la media está por sobre los valores de ese intervalo, por lo tanto no es un valor que describa mejor el conjunto de datos.
- La mayor parte de los datos se concentra alrededor del valor de la mediana, por lo tanto, esta medida describe mejor el conjunto de datos.
- La moda representa, aproximadamente, solo a 15 de las 50 personas, por lo tanto, no describe al conjunto de datos.

Paso 2 ➤ Comparar las MTC entre sí.

Al comparar las MTC se puede concluir que la media y la mediana son valores cercanos, pero la moda está muy distanciada. Esto se debe a que los datos son heterogéneos entre sí. El histograma nos muestra que estos siguen una distribución no simétrica, ya que la mayoría se encuentra en los extremos.

Razona

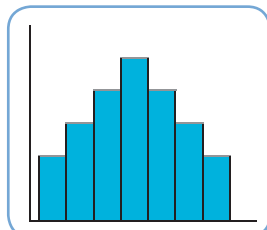
y comenta

- ¿Cómo influyen los valores extremos en las medidas de tendencia central de un conjunto de datos?
- ¿En qué situación la moda es un valor representativo del conjunto de datos? Busca un contexto relacionado con preferencias y analiza los datos.
- Si no se incluyeran los sueldos de los administrativos que ganan menos de \$600 000 y más de \$780 000, ¿qué medida de tendencia central describirían de mejor manera los datos? ¿En qué cambiarían las conclusiones obtenidas anteriormente?

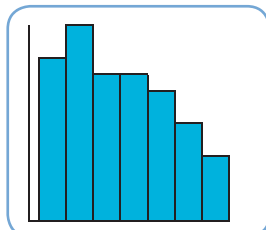
En resumen

Para interpretar las medidas de tendencia central podemos considerar lo siguiente:

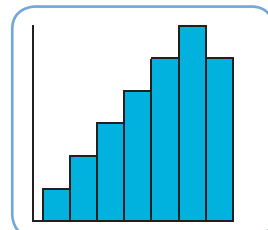
Si las medidas de tendencia central son valores cercanos, es decir, $\bar{x} \approx M_e \approx M_o$, entonces el conjunto de datos tiene una distribución simétrica.



El caso de distribuciones asimétricas, puede existir asimetría positiva, es decir, cuando el valor de la media es mayor que el valor de la mediana y la moda menor a la mediana. Ejemplo:



Cuando la distribución tiene una asimetría negativa, se dice que la media es menor a la mediana y la moda es mayor a la mediana.



Repaso

1. **Verifica** si las siguientes proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F). Justifica las falsas.

- Es necesario utilizar tablas de datos agrupados para ordenar una gran cantidad de datos discretos.
- Existen tablas de frecuencias que no se pueden representar mediante un histograma.
- En las tablas de datos agrupados, un dato se puede repetir en tres intervalos diferentes.
- Una tabla de datos agrupados es más precisa si disminuye la cantidad de intervalos.

2. **Resuelve** los siguientes problemas.

- Pablo no recuerda una de sus 6 calificaciones de Biología. Si su promedio fue 5,3 y sus otras notas fueron: 4,5; 5,0; 6,0; 6,0; 5,5, ¿cuál es la calificación que falta?
- En el siguiente conjunto de datos:

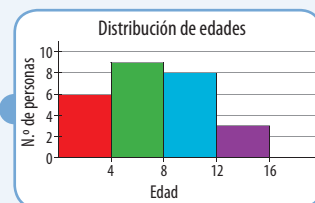
2, 4, 5, 6, 2, 3, 12, x

 - ¿Cuál podría ser el valor de x para que el conjunto de datos no tenga una moda?
 - ¿Cuál debería ser el valor de x para que el conjunto de datos tenga dos modas?
 - ¿Cuál debería ser el valor de x para que el conjunto de datos tenga promedio 5?

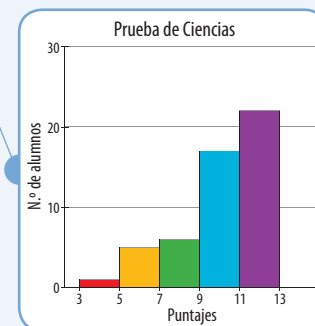
Práctica guiada

3. **Relaciona** las medidas de tendencia central con el gráfico asociado más adecuado.

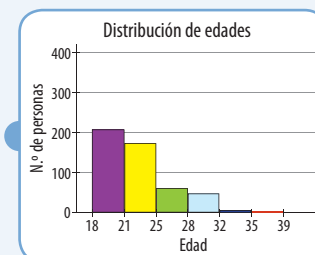
$$\begin{aligned}\bar{x} &= 9,07 \\ M_e &= 11,22 \\ M_o &= 11,94\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\bar{x} &= 7,23 \\ M_e &= 7,11 \\ M_o &= 7\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\bar{x} &= 23,40 \\ M_e &= 22,65 \\ M_o &= 20,63\end{aligned}$$



Aplico

4. Analiza la siguiente información y responde.

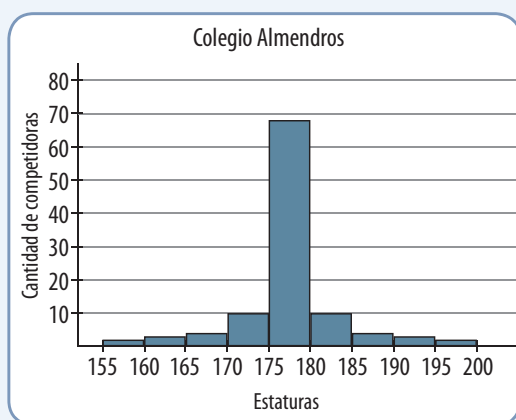
- a) La siguiente información corresponde a las medidas de tendencia central sobre los atrasos registrados durante 30 días por los buses de las compañías "Buen viaje" y "Trayecto seguro".

Compañía Buen viaje			Compañía Trayecto seguro		
Media	Mediana	Moda	Media	Mediana	Moda
2 horas	4 horas	1 hora	3 horas	2 horas	30 Min

- Basándote únicamente en los datos de arriba, ¿qué compañía escogerías para viajar? ¿Por qué?
 - ¿Piensas que con las medidas de tendencia central entregadas puedes tomar una decisión de este tipo? ¿Por qué?
- b) Mariela y Esteban deben realizar un informe respecto a la estatura de las competidoras de unas olimpiadas escolares en la que participan tres colegios. Ellos cuentan con los histogramas de cada colegio y las medidas de tendencia central, pero desconocen cuáles medidas corresponden a qué establecimiento.

Las medidas de tendencia son:

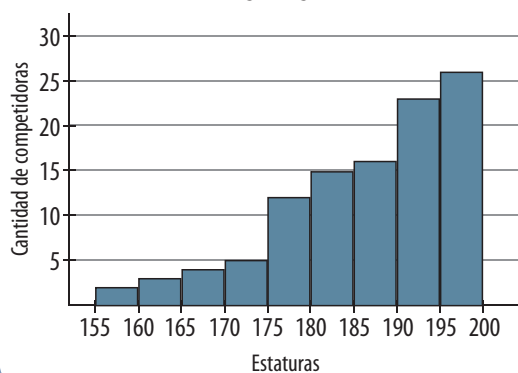
Medias	Moda	Mediana
186 cm	197 cm	177 cm
162 cm	157 cm	162 cm
177 cm	177 cm	187 cm



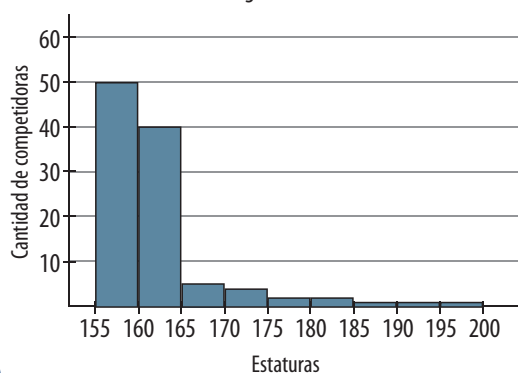
Reflexiono

- ¿Qué se puede inferir a través de las medidas de tendencia central de una muestra acerca de características de una población?

Colegio Nogal



Colegio Alerce



- ¿A cuál colegio pertenece cada una de las medidas de tendencia central?
- ¿Cuál es el colegio que tiene a las competidoras con mayor estatura?
- ¿Qué puedes concluir respecto a la estatura de las competidoras de cada colegio a partir de los histogramas y las MTC?

Refuerzo

1. Si un conjunto de datos es homogéneo, ¿cuál o cuáles medidas de tendencia central son más representativas?
2. Si la mediana es más representativa de un conjunto de datos, ¿qué características tiene este conjunto?

Palabras clave

➔ Percentiles, cuartiles y quintiles.

¿Cómo calcular medidas de posición?

- Si tienes un hermanito o hermanita o conociste a un recién nacido, probablemente has escuchado hablar que el peso o la estatura de este corresponde a un percentil. ¿Qué significará que el recién nacido tenga un peso en el percentil 75?

Una municipalidad está realizando un estudio acerca de los ingresos de las familias de la comuna para una asignación de beneficios. Obteniendo los resultados que aparecen en la tabla.

Ingreso del grupo familiar					
Ingreso (miles \$)	Marca de clase	f	F	f_r	F_r
[180, 220[	200	50	50	0,14	0,14
[220, 260[	240	75	125	0,20	0,34
[260, 300[	280	88	213	0,24	0,58
[300, 340[	320	93	306	0,25	0,83
[340, 380[	360	40	346	0,11	0,94
[380, 420]	400	24	370	0,06	1,00

Si la distribución de los datos se divide en 4 partes iguales, ¿cuál es el primer cuartil? Y si se divide en 5 partes iguales, ¿cuál es el primer quintil? Y si se divide en 100 partes iguales, ¿a qué percentil corresponden los valores anteriores?

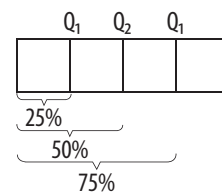
Las **medidas de posición** como los cuartiles, quintiles y percentiles dividen a una distribución ordenada en partes iguales.

- Los **cuartiles** (Q_n) son los tres valores de la variable de una distribución que la dividen en cuatro partes iguales.
- Los **quintiles** son los cuatro valores de la variable de una distribución que la dividen en cinco partes iguales.
- Los **percentiles** (P_n) son los noventa y nueve valores de la variable de una distribución que la dividen en cien partes iguales.

En resumen

Para calcular medidas de posición podemos considerar lo siguiente:

- El **1er cuartil** (Q_1) es el valor de la variable que supera a lo más el 25% de los datos y es superado por a lo más el 75% de ellos en la distribución ordenada de menor a mayor. El **2do cuartil** (Q_2) es un valor que supera a lo más al 50 % de los datos y es superado por a lo más el 50% de ellos, es decir, Q_2 coincide con la mediana. El **3er cuartil** (Q_3) es un valor que supera a lo más al 75 % de los datos y es superado por a lo más el 25% de ellos.
- El **1er quintil** es el valor de la variable separa el 20% de los datos de la distribución ordenada de menor a mayor, el **2do quintil** separa el 40%, el **3er quintil** separa el 60% y el **4to quintil** el 80%.
- El **percentil** p (P_p) es un valor de la variable tal que el $p\%$ de la muestra está por debajo y el $(100-p)\%$ está sobre.



Para responder a las preguntas calcularemos percentiles y a partir de estos determinaremos los cuartiles y los quintiles.

Paso 1 ➔ Se determina el intervalo al cual pertenece el percentil por calcular.

Si queremos calcular el primer cuartil, que corresponde al valor que separa el 25% de la distribución, entonces esto equivale a calcular el percentil 25 (P_{25}).

Entonces determinamos el intervalo al que pertenece P_k de la siguiente manera.

$$\frac{k \cdot n}{100} \rightarrow \text{En este caso } k = 25 \text{ y } n = 370, \text{ entonces } \frac{25 \cdot 370}{100} = 92,5.$$

Buscamos este valor en la columna de la frecuencia acumulada que corresponde al segundo intervalo $[220, 260[$.

Paso 2 ➔ Determinar el límite inferior del intervalo en el que se encuentra k .
 $l_i = 220$

Paso 4 ➔ Determinar la frecuencia acumulada anterior al intervalo donde se encuentra k . $F_{i-1} = 50$

Paso 6 ➔ Remplazar los datos obtenidos en la fórmula.

$$P_{25} = 220 + 40 \cdot \frac{\frac{25 \cdot 370}{100} - 50}{75} \approx 242,67$$

Paso 3 ➔ Determinar la frecuencia absoluta del intervalo en el que se encuentra k . $f_i = 75$

Paso 5 ➔ Calcular la amplitud del intervalo donde se encuentra k .
 $a_i = 260 - 220 = 40$

Paso 7 ➔ Interpretar este resultado.
El percentil 25 es el valor aproximado de \$242 670 es decir, el 25% de las familias tienen un ingreso menor o igual a esta cantidad. Este valor también corresponde al primer cuartil (Q_1).

Para calcular el primer quintil se puede determinar el percentil P_{20} . Realízalo en tu cuaderno.

En resumen

Para calcular el percentil P_k correspondiente al $k\%$ de los datos puedes utilizar la siguiente fórmula:

l_i : Límite inferior del intervalo donde se encuentra el $k\%$ de los datos.

a_i : Amplitud del intervalo donde se encuentra el $k\%$ de los datos.

f_i : Frecuencia absoluta del intervalo donde se encuentra el $k\%$ de los datos.

F_{i-1} : Frecuencia acumulada anterior al intervalo donde se encuentra el $k\%$ de los datos.

n : Total de datos.

$$P_k = l_i + a_i \cdot \frac{\frac{k \cdot n}{100} - F_{i-1}}{f_i}$$

Observa

La mediana de una distribución de datos coincide con Q_2 y con P_{50} .

Razona y comenta

- ¿Las medidas de posición corresponden a valores exactos de la variable de estudio? ¿Por qué?
- ¿A qué percentiles corresponden Q_2 y Q_3 ?
- ¿A qué percentiles corresponden el segundo, tercero y cuarto quintil?
- Si se calcula el 10% de una distribución, ¿el valor obtenido corresponderá al P_{10} ? ¿Por qué?

Repaso

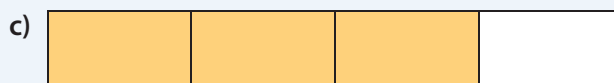
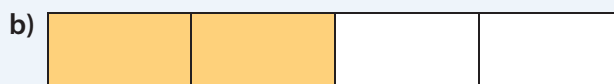
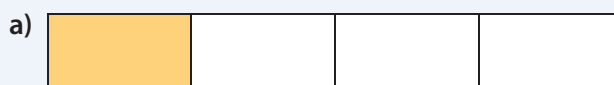
1. **Calcula** y completa la tabla. Luego responde las preguntas.

Longitud de un trozo de madera						
Longitud (cm)	f	F	f_r	F_r	f%	F%
$[0, 50[$	20					
$[50, 100[$		35				87,5%
$[100, 150[$				0,95	7,5%	
$[150, 200]$	2		$\frac{2}{40}$			

- a) ¿Cuál es el porcentaje de trozos de madera de 50 a 100 cm con respecto al total?
- b) ¿Cuál es el porcentaje de trozos de madera que miden hasta 150 cm con respecto al total?

Práctica guiada

2. **Identifica** el cuartil representado en el diagrama.



3. **Identifica** los quintiles representado en el diagrama.



Aplico

4. Analiza cada situación y luego calcula lo pedido.

- a) Tomás tiene un local de venta de ropa **Presence**. La cantidad de ventas realizadas durante 21 días se muestran a continuación:

Tienda Presence						
61	94	97	103	111	113	130
180	194	198	210	213	221	241
248	257	269	270	274	275	250

- Calcula el Q_2 y el P_{80} .
 - Calcula el cuarto quintil.
 - ¿Cuál es el máximo de ventas de ropa para el 50% de los días en la tienda Presence?
 - ¿Cuál es el mínimo de ropa que se vende en el 60% de los días?
- b) Durante una prueba realizada a un grupo de 100 alumnos se toma el tiempo que los alumnos demoran en responder toda la prueba. Los resultados se encuentran en la siguiente tabla:

Tiempo (horas)	0	1	2	3	4	5
Frecuencia	2	34	45	11	4	4

- Calcula el Q_3 y el P_{20} .
 - Calcula el tercer quintil.
 - ¿Cuál es el máximo de horas que se demora el 45% de los alumnos que rindieron la prueba?
 - ¿En cuál percentil se encuentran los alumnos que se demoraron 2 horas o menos en responder la prueba?
 - ¿En qué percentil se encuentran los alumnos que se demoran 4 horas o menos?
- c) Una fábrica de luces de árbol de navidad, realiza un estudio sobre la cantidad de horas que duran sus luces, los resultados de una muestra de 50 luces se muestran en la siguiente tabla:

Cantidad de horas	Frecuencia absoluta
[100, 150[	5
[150, 200[	15
[200, 250[	11
[250, 300[	9
[300, 350]	10

- Calcula el quintil 4 y el P_{60} .
- ¿Cuál es el percentil 58 de la tabla de datos?
- ¿Bajo qué hora se encuentra el 60% de los datos?
- ¿Sobre qué horas se encuentra el percentil 45 de la cantidad de luces?

- ¿Entre qué cantidad de horas se encuentra el percentil 35 y percentil 70 de los datos de la muestra?
- El administrador de la fábrica decide realizar una optimización en el proceso de fabricación si existe una mayor diferencia entre el mínimo y la mediana que entre la mediana y el máximo de los datos. ¿Se realizará la optimización? Justifica.

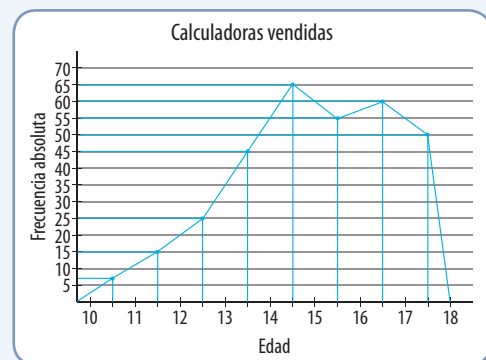
5. Completa la tabla de frecuencias. Luego, responde.

En un estudio se han tabulado los ingresos de un grupo de familias, obteniéndose los siguientes resultados.

Ingresos (miles \$)	MC	f	F	f_r	F_r
[190, 230[			36		
[230, 270[			61		
[270, 310[		20			
[310, 350[		17			
[350, 390[				$\frac{12}{120}$	
[390, 430]					
Total					

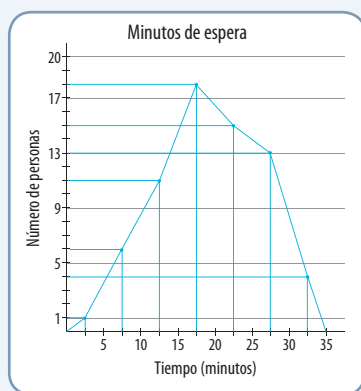
- a) ¿Cuál es el Q_3 ? ¿Cómo se interpreta?
- b) Aproximadamente, ¿qué cantidad de personas están por sobre P_{60} ?
- c) ¿Cuál es la diferencia entre el segundo y tercer quintil? ¿Qué puedes interpretar a partir de ello?
- d) Escribe 2 conclusiones con respecto a Q_1 .
6. Analiza cada situación y responde las preguntas.

- a) El siguiente gráfico representa la cantidad de calculadoras compradas en una determinada tienda de acuerdo a la edad de los compradores.

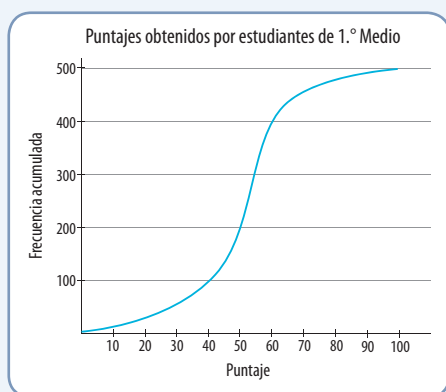


- ¿Cuál es el valor de P_{10} ? ¿qué representa?
- ¿Qué valor corresponde a Q_3 ? ¿Cómo se puede interpretar?
- Escribe 3 conclusiones con respecto al P_{50} .

- b) El gráfico representa los minutos que deben esperar los clientes de una determinada tienda comercial.



- Calcula P_{19} . ¿Qué representa?
 - ¿Qué valor corresponde a Q_2 ? ¿Cómo se puede interpretar?
 - Escribe dos conclusiones con respecto al Q_3 .
- c) Los 500 estudiantes de 1.º medio de los colegios de una municipalidad rindieron una prueba. El gráfico muestra los puntajes, de un total de 100, obtenidos por los estudiantes.



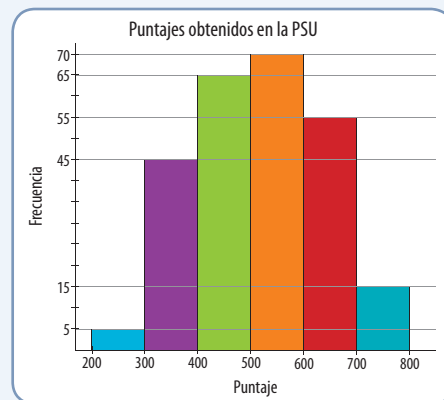
- Determina en el gráfico los 4 quintiles. ¿A qué puntajes corresponde?
- A los estudiantes que se ubican sobre el percentil 80 se les regalará un libro. ¿A cuántos alumnos les corresponderá el regalo?
- Los estudiantes que se encuentran bajo el primer cuartil irán a un curso de nivelación. ¿Cuántos alumnos deberán ir a ese curso?

Reflexiono

- Las medidas de posición ¿se pueden calcular para cualquier tipo de datos? ¿Por qué?
- Las medidas de posición, ¿se ven afectadas por valores extremos? ¿Por qué?

- d) El siguiente histograma representa los puntajes obtenidos en una prueba PSU de Matemáticas por alumnos de cuarto medio.

- ¿Cuál es el percentil 35?
- ¿Cuál es el tercer cuartil?
- ¿Cómo se interpreta el percentil 75?



7. **Conecta.** La beca Bicentenario que entrega el Ministerio de Educación consiste en financiar el arancel de referencia anual de la carrera a aquellos estudiantes pertenecientes al 60% de menores ingresos del país que hayan tenido un buen rendimiento académico y que se matriculen en una carrera regular de alguna de las 25 Universidades del Consejo de Rectores. Uno de los requisitos para postular, es que el estudiante pertenezca al **primer, segundo o tercer quintil** de ingreso socioeconómico de la población del país. ¿Qué significado tiene el requisito para postular?
8. **Describe el procedimiento.** En la siguiente tabla de frecuencias, se muestra la cantidad de hijos de 100 grupos familiares.

Cantidad de hijos de 100 familias		
Número de hijos	f	F
0	5	5
1	30	35
2	40	75
3	25	100

Describe el procedimiento para calcular el P_{25} , el tercer quintil y el Q_2 .

Refuerzo

Calcula los percentiles 59 y 80 del siguiente conjunto de datos.

43 – 47 – 10 – 14 – 5 – 34 – 11 – 11 – 5 – 37 – 41 – 11 – 24 – 9 – 10 – 12 – 25 – 31 – 3 – 34 – 16 – 17 – 20 – 38 – 32 – 12

Palabras clave

- ➔ Medidas de posición, polígonos de frecuencia acumulada.
- ➔ Diagramas de caja.

Repasa**Porcentaje**

Para calcular el P % de N utiliza la siguiente expresión:

$$x = \frac{P}{100} \cdot N$$

Ejemplo: Calcular el 5% de 40.

$$x = \frac{5}{100} \cdot 40$$

$$x = \frac{5}{100} \cdot \frac{40}{1} = \frac{200}{100} = 2$$

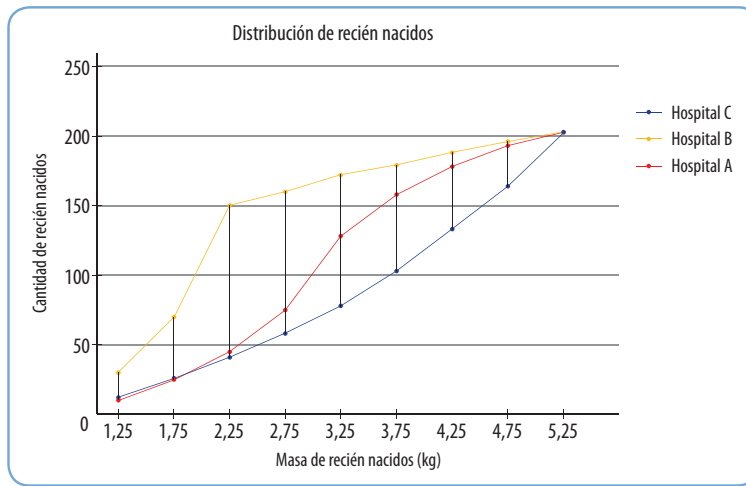
Es decir, el 5% de 40 es 2.

¿Cómo se interpretan las medidas de posición?

- Es posible que hayas conocido a recién nacidos que han nacido con una estatura por sobre el normal de los niños y lo más probable es que el doctor haya mencionado que está en el percentil 90. ¿Cómo interpretas esta información?

Interpretación de medidas de posición a partir de polígonos de frecuencias acumuladas

Milena es la nutricionista encargada de estudiar las masas de los recién nacidos en tres hospitales. Para realizar su estudio analiza el polígono de frecuencias acumuladas en el que se ha utilizado la marca de clase.



Milena determina que se debe proporcionar una incubadora al hospital donde el P_{10} es menor que 2,25 kg, ¿cuál o cuáles hospitales deben recibirla?

Además, Milena está diseñando un programa de seguimiento a todos los niños y niñas que al momento de nacer, lo hicieron con una masa hasta el primer cuartil de cada hospital. ¿Bajo qué masa deben estar los recién nacidos para pertenecer al programa?

- Paso 1** ➔ Calcular los porcentajes respectivos a las medidas de posición requeridas. P_{10} corresponde al valor bajo el cual está el 10% de los recién nacidos. $P_{25} = Q_1$ corresponde al valor bajo el cual está el 25% de los recién nacidos. Luego, calculamos estos porcentajes:

Total: 200

10% de 200 es 20

25% de 200 es 50

- Paso 2** ➔ Estimar el valor de las medidas de posición respectivas a los porcentajes anteriores.

Veamos para el hospital A, para determinar el valor de las medidas de posición debemos ubicar en la frecuencia absoluta los porcentajes encontrados. Las estimaciones requeridas corresponderán a los valores de la variable correspondientes a las frecuencias encontradas.

- Al ubicar la frecuencia 20, la curva de color rojo pasa por 1,8 kg, por lo tanto, el P_{10} corresponde, aproximadamente, a ese valor.
- Al ubicar la frecuencia 50, la curva de color rojo pasa por la masa 2,3 kg, por lo tanto, el primer cuartil corresponde, aproximadamente, a ese valor.

Repitiendo el procedimiento para los otros hospitales se tienen las siguientes medidas de posición.

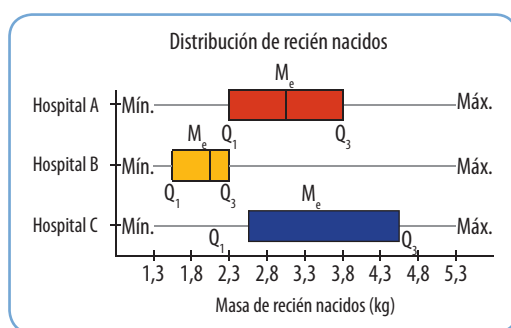
	Hospital A	Hospital B	Hospital C
P_{10}	1,8 kg	1,25 kg	1,8 kg
$P_{25} = Q_1$ (1er cuartil)	2,3 kg	1,5 kg	2,5 kg

Al determinar P_{10} se observa que en todos los hospitales este es menor que 2,25 kg, por lo tanto, los tres deberían recibir la incubadora.

Por otra parte, los recién nacidos que pertenecerán al programa del hospital A deben estar bajo los 2,25 kg. Los del hospital B deben estar bajo el 1,75 kg y los del hospital C, bajo los 2,25 kg, todos en forma aproximada.

Interpretación de medidas de posición a partir de diagramas de cajas o Boxplot

Para su estudio, Milena necesita comparar la mediana de las masas de los recién nacidos y determinar en qué hospital el rango intercuartil es menor. Para esto consulta el siguiente boxplot o diagrama de cajas donde se muestra la distribución de los datos según el hospital.



Paso 1 Comparar las medianas en los diagramas de caja.
Al comparar las medianas se concluye que el Hospital B es el que tiene un valor menor (aproximadamente 1,75 kg) y el Hospital C el que tiene un mayor valor de (aprox. 3,75 kg).

Paso 2 Comparar el rango intercuartil para cada boxplot.
Al comparar el tamaño de las cajas se observa que el hospital B presenta un rango intercuartil menor que los otros hospitales.

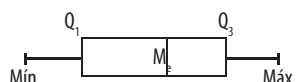
Razona y comenta

- ¿Cuál es la utilidad de un diagrama de caja?
- ¿Qué se puede inferir sobre un conjunto de datos al analizar este tipo de gráfico?
- ¿Cuál es la diferencia entre rango y rango intercuartil? ¿Cuál de las dos medidas dice más sobre la concentración de los datos?

En resumen

Podemos **interpretar** las medidas de posición a partir de un polígono de frecuencia acumulada o de un **diagrama de cajas o Boxplot** que es un gráfico que muestra la distribución de los datos, dividiendo estos en cuatro partes iguales mediante los cuartiles.

Para construir un **Boxplot** se dibuja una caja que va desde Q_1 hasta Q_3 . Dentro de ella se traza una línea vertical en la mediana. Luego, se trazan líneas desde la caja a los valores mínimo y máximo.



Se llama **rango intercuartil** a la diferencia entre el tercer cuartil (Q_3) y el primer cuartil (Q_1).

Repaso

1. Analiza la información presentada en la tabla y luego responde.

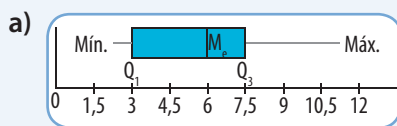
Andrea realiza un estudio sobre la cantidad de hermanos que tienen los alumnos de tres cursos, y resume la información en la siguiente tabla.

Número de hermanos	Curso A	Curso B	Curso C
0	4	4	66
1	15	5	9
2	25	7	7
3	29	9	7
4	15	24	5
5	10	49	4

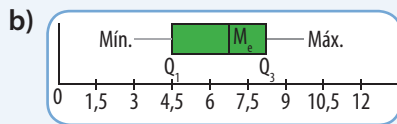
- Construye el gráfico de frecuencia acumulada de la tabla de datos.
- ¿Cuál es el primer cuartil de los datos de cada curso?
- ¿Cuál es el segundo cuartil de los datos de cada curso?
- ¿Cuál es el tercer cuartil de los datos de cada curso?

Práctica guiada

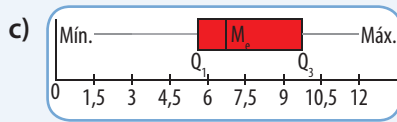
2. Relaciona el diagrama de caja con el conjunto de datos representados en él.



Mín: 3
 Q_1 : 4,5
 M_e : 6,75
 Q_3 : 8,25
 Máx: 9,75



Mín: 1,5
 Q_1 : 6
 M_e : 6,75
 Q_3 : 9,75
 Máx: 12

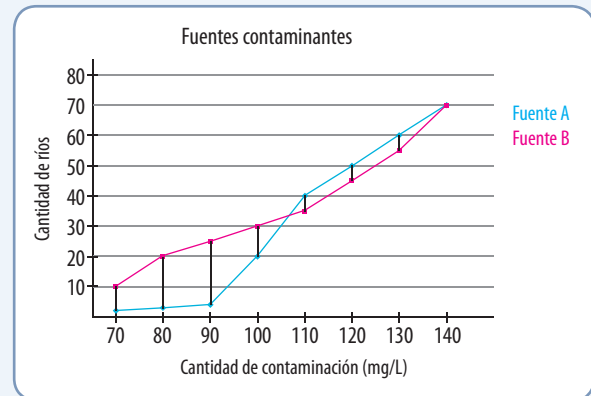


Mín: 2,25
 Q_1 : 3
 M_e : 6
 Q_3 : 7,5
 Máx: 11,25

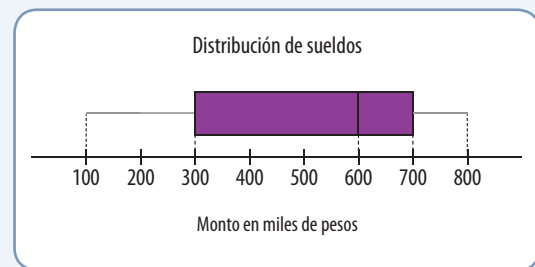
Aplico

3. Analiza la información presentada en el gráfico y luego responde.

- Patricio se encuentra estudiando la contaminación que producen dos fuentes: A y B a los ríos de una región. La cantidad de contaminación producida por cada fuente se encuentra representada en el siguiente gráfico.

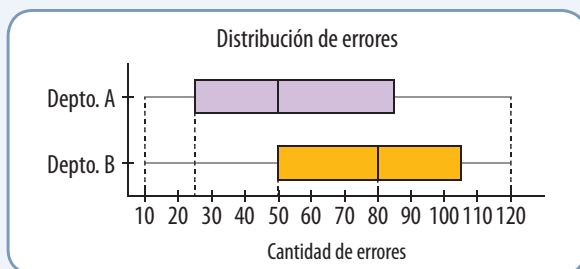


- Si Patricio necesita realizar un informe que describa la distribución de los datos y la comparación entre las fuentes A y B, ¿qué información debería contener el documento? Descríbela.
- Antonia debe determinar las remuneraciones de una empresa. Para esto utiliza el diagrama de caja que aparece a continuación.

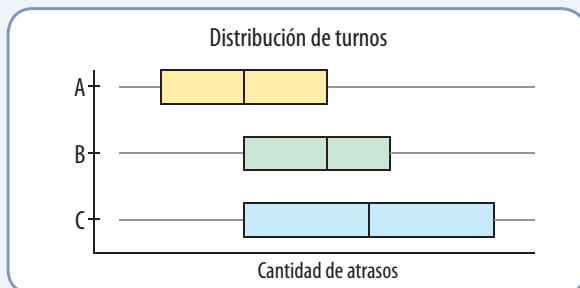


- ¿Cuál es el sueldo máximo que paga la empresa?
- Si el número de trabajadores de la empresa es de 2000, ¿cuántos de ellos reciben un sueldo igual o inferior a \$600 000?

- c) Ramón es el encargado de realizar un estudio sobre los errores en la ortografía cometidos en dos departamentos de una editorial. Para esto construye el siguiente gráfico en el que se exhibe la distribución de los errores para una muestra de 100 trabajos para el departamento A y B.



- Ramón realizará una capacitación a los trabajadores del departamento editorial cuyo Q_2 supere los 40 errores. ¿En cuál departamento se realizará la capacitación?
 - Ramón debe realizar un informe comparando los cuartiles y la media aritmética entre los departamentos. ¿Cuál sería dicho informe?
 - Si los departamentos A y B trabajan con la misma cantidad de personal y en las mismas condiciones, ¿cuál es el departamento más eficiente?
- d) Romeo y Elizabeth perdieron los datos de tres variables A, B y C correspondiente a los atrasos de tres turnos de una empresa. Solamente poseen el siguiente diagrama de caja:

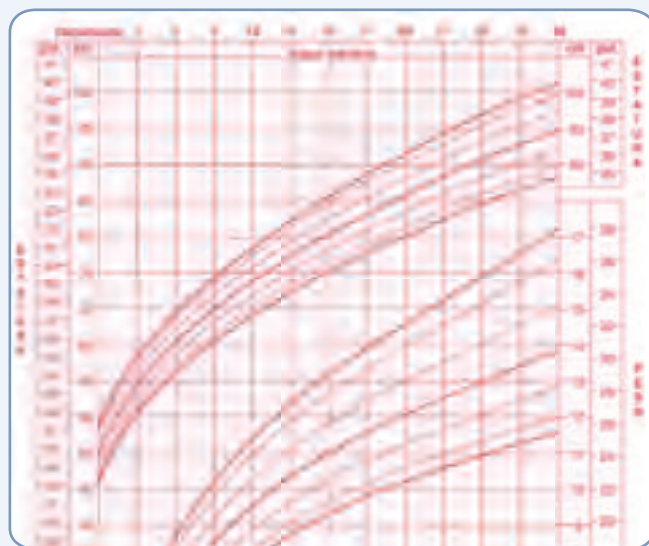


Si deben confirmar un informe que contiene las afirmaciones que aparecen a continuación, ¿cuál de ellas es la correcta? Corrige aquellas que sean erróneas para que puedan ser incluidas en el informe.

- El primer cuartil del turno A es mayor que el primer cuartil de turno B.
- El segundo cuartil del turno C es mayor que la mediana de los datos de los turnos A y B por separado.
- El segundo cuartil de A es mayor que el segundo cuartil de C.
- La mediana de B es igual a la mediana de C.
- El rango intercuartil del turno A es el mayor.

4. **Conecta.** Los pediatras utilizan ciertas tablas que permiten determinar la relación entre el peso y talla de un bebé, uno de estos gráficos corresponde a la curva de crecimiento fetal.

A partir del gráfico extrae 3 conclusiones relacionadas con medidas de posición.



5. **Crea.** Utiliza los datos del INE para analizar la distribución de algunos que sean de tu interés. ¿Consideras que es más sencillo analizarlos con medidas de posición?

Reflexiono

- ¿Qué ventajas y desventajas tiene analizar un conjunto de datos a partir de las medidas de posición, respecto a las medidas de tendencia central?

Refuerzo

En la empresa donde trabaja Antonia (pregunta 3 b.), trabajan 2000 personas, ¿cuántos de ellos están dentro del rango intercuartil?

Palabras clave

➔ Uso de software.

¿Cómo realizar un análisis estadístico utilizando una planilla de cálculo?

- En el análisis estadístico existen muchos cálculos engorrosos como las medidas de tendencia central o de posición que se pueden simplificar utilizando una herramienta computacional.

Tabla de datos agrupados

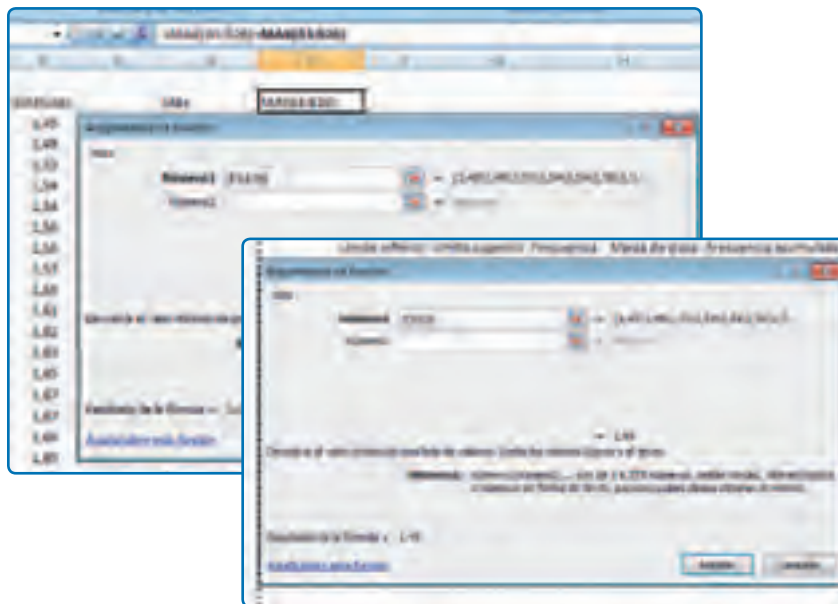
Te presentamos el registro de las estaturas de 24 estudiantes de primero medio para que hagas un análisis descriptivo de los datos. En una planilla de cálculo puedes realizar los siguientes pasos.

1,55	1,61	1,70	1,59	1,49	1,71	1,81	1,53	1,56	1,54	1,65	1,74
1,56	1,68	1,63	1,76	1,45	1,62	1,67	1,72	1,54	1,69	1,57	1,80

Paso 1 ➔ Copiar los datos a una planilla de cálculo.

Paso 2 ➔ Calcular el máximo y el mínimo de los datos.

Puede utilizar las funciones MAX y MIN para determinar, respectivamente, el máximo y el mínimo de un conjunto de datos. Estas funciones necesitan como argumento el rango de datos (**B3:B26**).



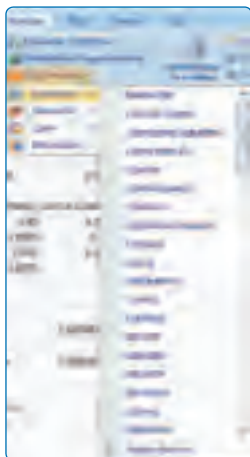
Paso 3 ➔ Calcular el rango y la amplitud.

Para calcular el rango se restan las celdas que contienen al máximo y al mínimo aplicando la fórmula $=E2-E3$, luego enter. Para calcular la amplitud se divide la celda que contiene al rango en el número de intervalos que se desean, aplicando la fórmula $=E4/4$ para obtener 4 intervalos.

Estaturas	Más	1,81
1,61	Mín	1,45
1,7	Rango	0,36
1,56	Amplitud	0,09
1,68		
1,63		
1,76		
1,45		
1,62		
1,67		
1,72		
1,54		
1,69		
1,57		
1,80		

Observa

Las **funciones** que utilizaremos se encuentran en el botón **Fórmulas** de la barra de herramientas, opción **Más funciones**, Estadísticas:



Para **seleccionar los datos** debes hacer clic en la primera celda y luego mantener el botón del mouse apretado hasta llegar a la última celda que contenga un dato.

Observa

Para calcular la **media aritmética** de un conjunto de datos se puede utilizar la función **PROMEDIO**, la cual necesita como argumentos el rango de datos (**B3:B26**).

Medidas de tendencia central

Para calcular medidas de tendencia central puedes realizar los siguientes pasos en una planilla de cálculo.

Paso 1 Calcular la moda.

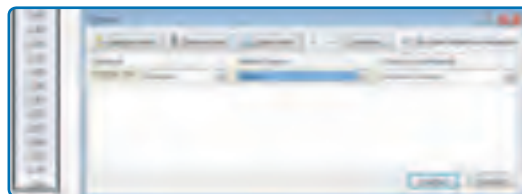
Para calcular la moda de un conjunto de datos se puede utilizar la función **MODA**, la cual necesita como argumentos el rango de datos (**B3:B26**).

**Paso 2** Calcular la mediana.

Para calcular la mediana de un conjunto de datos se deben ordenar los datos empleando el ícono



, y puede hacerse de menor a mayor o viceversa.



Luego se debe utilizar la función **MEDIANA**, la cual necesita como argumentos el rango de datos (**B3:B26**).



Las medidas de tendencia central serían:

Media	1,537083333
Moda	1,54
Mediana	1,535541667

Medidas de posición

Para calcular medidas de posición puedes realizar los siguientes pasos en una planilla de cálculo.

Paso 1 ▶ Calcular percentiles.

Para calcular el percentil k de un conjunto de datos se puede utilizar la función PERCENTIL, la cual necesita como argumentos el rango de datos (B3:B26) y el porcentaje al cual corresponde el percentil que se está buscando escrito en forma decimal. Por ejemplo, para calcular el percentil 15 se escribe:



Paso 2 ▶ Calcular cuartiles.

Para calcular los cuartiles de un conjunto de datos se puede utilizar la función CUARTIL, la cual necesita como argumentos el rango de datos (B3:B26) y el número del cuartil (1, 2 o 3) que se está buscando. Por ejemplo, para calcular el primer cuartil se escribe:



Observa

Las medidas de posición obtenidas son:

Percentil 88	16,88
Cuartil 3	16,88

Aplico

1. **Construye** una tabla de frecuencias utilizando una planilla de cálculo. Luego, calcula las medidas de tendencia central y de posición.

1,5	0,8	2,7	0,5	3,5	1,8	1,9	2	0,9	2,2	4
1,2	1,4	2,3	2,1	1,7	2,6	3	0	1,8	3,6	

Reflexiono

- ¿Cuál es la importancia del empleo de la tecnología en Matemáticas?

2. **Construye** un histograma y un polígono de frecuencias para los datos anteriores.
3. **Averigua** cómo construir un diagrama de cajas o Boxplot en una planilla de cálculo.

Refuerzo

Construye un histograma y un polígono de frecuencias con los datos de las estaturas de primero medio presentadas en la lección.



Representar un conjunto de datos mediante tablas con datos agrupados y gráficos, y calcular medidas de tendencia central. (Lecciones 39 y 40)

- 1** En la siguiente tabla se muestra la cantidad de palabras que lee un grupo de niños de primero básico en un minuto.

Cantidad de palabras	Frecuencia absoluta
[27, 33[	7
[33, 39[	15
[39, 45[	13
[45, 51[	10
[51, 57[	3
[57, 63]	2

- ¿Cuál es el valor de la media, moda y mediana de los datos?
- ¿Qué porcentaje aproximado de niños leen más del promedio de los datos?
- ¿Qué porcentaje aproximado de niños leen menos que la moda de los datos?

- 2** Patricio debe hacer un estudio sobre los arriendos que ofrecen dos inmobiliarias. Los datos en miles de pesos son:

Inmobiliaria A							
576	680	236	286	587	496	525	680
163	708	215	302	253	357	666	151
191	488	646	471	279	194	732	394
608	632	570	315	135	229	551	139
100	236	716	208	750	216	328	461

Inmobiliaria B							
484	100	258	505	120	409	413	602
678	380	115	228	650	521	362	521
437	740	115	402	271	421	288	234
462	517	243	511	142	442	584	280
194	578	172	369	181	416	750	256

- Para realizar su estudio, Patricio decide hacer una tabla de frecuencia de 5 intervalos. Realízala.
- En promedio, ¿cuál inmobiliaria tiene el arriendo más bajo?
- ¿Existe alguna inmobiliaria en la que el 50% de los datos supere al promedio de los precios?
- Patricio se pregunta ¿es posible determinar cuál es la inmobiliaria que tiene los precios más altos? ¿Cómo lo harías?

- 3** Una encuesta realizada a cierta cantidad de personas acerca de la cantidad de horas que hacen deporte en una semana arrojó los siguientes resultados.

Cantidad de horas	Frecuencia absoluta
[0, 2[	30
[a, 4[	20
	15
	32
[b, 10[	18
[10, 12]	c
Total	120

- Calcula el valor de **a** y **b**
- ¿Cuál es el rango de los datos?
- ¿Cuál es la amplitud de los intervalos de la tabla?
- Si el promedio es 5,05 horas, ¿cuál es el valor de **c**?
- ¿Cuál es la cantidad de encuestados?
- ¿Se puede calcular la moda con los datos de la tabla? De ser así, calcúlala.
- Calcula la mediana del conjunto de datos. ¿Qué puedes concluir acerca de este valor?
- ¿Cómo podrías interpretar el valor de la mediana en los datos de la tabla?

- 4** Andrea y Joaquín discuten sobre el rendimiento de sus cursos, argumentando que tienen mejores calificaciones. Para esto comparan las calificaciones finales de cada curso.

Calificaciones	Curso de...	
	Andrea	Joaquín
[1,0; 2,0[	6	5
[2,0; 3,0[	2	1
[3,0; 4,0[	3	1
[4,0; 5,0[	7	23
[5,0; 6,0[	10	2
[6,0; 7,0]	12	8

- Calcula la media, moda y mediana del curso de Andrea.
- Calcula la media, moda y mediana del curso de Joaquín.
- Escribe, al menos, dos argumentos que puede utilizar Andrea.

- d. Escribe, al menos, dos argumentos que puede utilizar Joaquín.
- e. ¿Quién piensas que tiene el curso con mejor rendimiento? Explica.

Obtener información mediante el análisis de datos presentados en tablas y gráficos a partir de la interpretación de medidas de tendencia central y de posición. (Lecciones 41 a 44)

- 5** En una fábrica de motores para bicicletas, el encargado de producción mide las emisiones de partículas de plomo en miligramos (mg) que generan tres líneas de ensamblaje como muestra la tabla.

Partículas de plomo (mg)	Línea A (%)	Línea B (%)	Línea C (%)
[70, 75[	23	4	7
[75, 80[	20	7	14
[80, 85[	17	15	28
[85, 90[	17	19	30
[90, 100[	13	25	14
[100, 105]	10	30	7

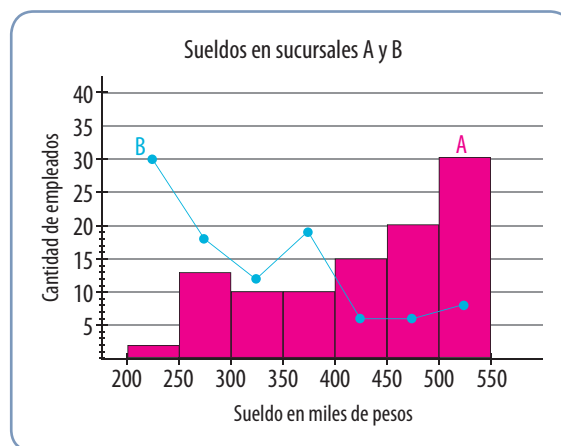
- a. ¿Cuál es el valor del percentil 90 y el primer cuartil en cada línea de ensamblaje?
- b. ¿Cuál es el mayor valor del percentil 85 de las líneas de ensamblaje? ¿Cómo se interpreta este valor?
- c. El jefe de producción decide implementar un plan de mejoramiento en aquellas líneas de ensamblajes cuyo P_{20} de emisiones sea igual o inferior a 80 mg. ¿Cuáles serán incluidas en este plan?
- d. ¿Es correcto afirmar que la mediana de las emisiones de cada línea de ensamblaje es inferior a 90 mg? Justifica tu respuesta.
- e. ¿En cuál de las tres líneas de ensamblaje el P_{80} de las emisiones supera los 100 mg?
- f. El jefe de producción, ¿puede afirmar que los niveles de plomo más altos se encuentran en la línea de ensamblaje B? ¿Estás de acuerdo con esta información? ¿Por qué?

- 6** Una fábrica de ampolletas presenta las siguientes horas de duración para tres tipos del mencionado artículo:

Horas	A	B	C
[200, 400[	50	5	25
[400, 600[	30	5	30
[600, 800[	20	40	30
[800, 1000]	10	60	25

- a. ¿Qué tipo de ampolleta tiene el mejor tiempo de duración? Utiliza las medidas de tendencia central para argumentar tu afirmación.
- b. ¿Cuál es el valor del tercer cuartil de cada tipo de ampolleta? ¿Y el primer quintil (P_{20})?
- c. ¿Es correcto afirmar que el 20% de las ampolletas tipo C tienen una duración de 300 horas? Justifica tu respuesta.

- 7** Una empresa de repartos a domicilio tiene dos sucursales: A y B. La encargada de remuneraciones, debe hacer un informe que represente la situación respecto a los sueldos en ambas sucursales. Para esto analiza el siguiente gráfico donde se muestran las remuneraciones de cada sucursal.



- a. ¿Es correcto afirmar que en la sucursal A los sueldos son más altos que en la sucursal B? ¿Por qué?
- b. Para los sueldos menores a \$350 000, ¿cómo es la distribución de estos en ambas sucursales?
- c. La encargada de remuneraciones advierte grandes diferencias en los sueldos, por lo que decide aumentarlos en una de las dos sucursales. ¿A cuál de ellas se refiere? Argumenta tu respuesta.



Problema

Daniela trabaja en una agencia de viajes y desea vender un paquete turístico a un grupo de estudiantes y de trabajadores de un instituto. Para ello realiza una encuesta acerca de la cantidad de días (estadía) que dura el viaje, obteniendo los siguientes resultados por intervalo de edad.

Edad	Grupos por estadía	
	10 días	30 días
[18, 22[	8	32
[22, 26[	12	28
[26, 30[	10	11
[30, 34[	25	11
[34, 38]	34	7

Si Daniela le ofrecerá un descuento extra al grupo cuya media no supere a la mediana para cada estadía y que tenga el mayor rango intercuartil, ¿qué grupo se llevará la oferta?

Paso 1 Comprendo ¿Qué entendiste del problema?

Se deben comparar la media, mediana y el rango intercuartil de cada grupo. Se llevará el descuento extra el grupo que tenga una media menor a la mediana y un rango intercuartil mayor.

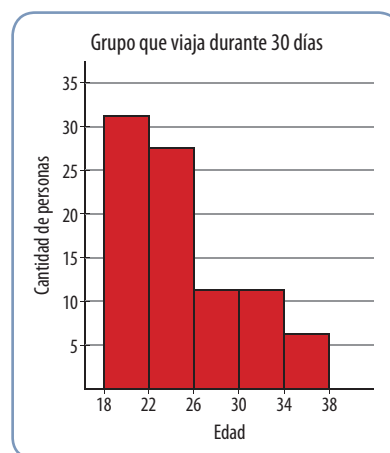
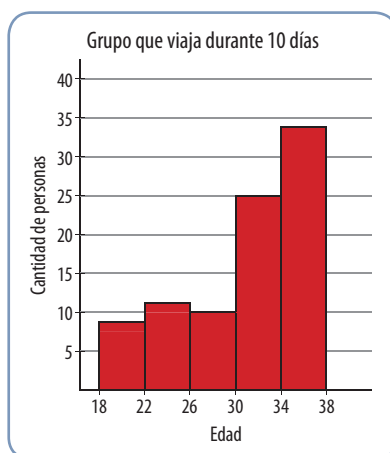
Paso 2 Planifico ¿Qué harías para resolver el problema?

Graficar los histogramas correspondientes a cada grupo y comparar la media y la mediana a partir de la simetría o asimetría de estos.

- Calcular Q_1 , Q_2 (mediana) y Q_3 .
- Construir un diagrama de caja para cada grupo y compararlos.

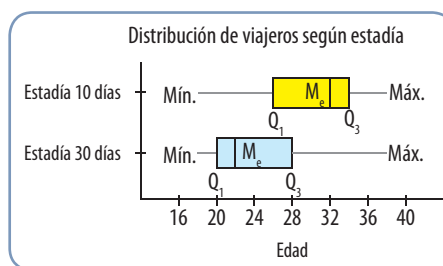
Paso 3 Resuelvo ¿Cómo ejecutarías la estrategia?

Al observar los histogramas nos damos cuenta de que las distribuciones son asimétricas. En el caso del primer grupo tenemos una distribución asimétrica negativa y, por lo tanto, la media es menor que la mediana.



Florence Nightingale
(1820 – 1910) Fue una célebre inglesa, reformadora social y estadístico, fundadora de la enfermería moderna. Ella se convirtió en pionera en la presentación visual de la información y gráficos estadísticos. Se le atribuye el desarrollo del gráfico circular, con el fin de ilustrar las fuentes estacionales de la mortalidad de los pacientes en el hospital militar donde trabajó durante la guerra de Crimea. En 1859 Nightingale fue elegida como el primer miembro femenino de la Real Sociedad de Estadística y más tarde se convirtió en un miembro honorario de la American Statistical Association.
<http://www.agnesscott.edu/lriddle/women/nitegale.htm>

Al comparar los diagramas de caja se observa que el rango intercuartil del primer grupo es un poco más grande que el del segundo grupo.



	10 días	30 días
Q_1	26,90	20,78
M_e	32,32	23,78
Q_3	35,38	28,45
Mín.	18	18
Máx.	38	38

Paso 4 Reviso ¿Cómo saber que es correcto el resultado?

- Se calculan las medias para cada grupo y se comparan con la mediana de cada grupo:

$$\bar{x}_{10 \text{ días}} = \frac{2752}{89} \approx 30,92 < 32,32$$

$$\bar{x}_{30 \text{ días}} = \frac{2224}{89} \approx 24,98 > 23,78$$

Se calcula el rango intercuartil (RI) restando $Q_3 - Q_1$, para cada grupo y se comparan:

$$RI_{10 \text{ días}} = 35,38 - 26,90 = 8,48$$

$$RI_{30 \text{ días}} = 28,45 - 20,78 = 7,67$$

Luego las deducciones anteriores son correctas.

Paso 5 Comunico ¿Cómo interpretas el resultado obtenido?

- Daniela debe ofrecer el descuento extra al grupo que viajará durante 10 días.

Resuelve los siguientes problemas.

- Carlos es el encargado de vender insumos eléctricos en empresas. Él tiene en su poder las características de la resistencia en kilogramos que soportan tres tipos de resorte, Resort, Boing y Saltos.

Resistencia	Resort	Boing	Saltos
[200, 250[	40	60	20
[250, 300[	30	70	20
[300, 350[	20	10	20
[350, 400]	10	5	10

Para justificar las ventas, Carlos debe hacer un informe con las resistencias que ofrece a cada empresa.

- ¿En qué medidas de tendencia central debe concentrarse para vender los resortes Resort? ¿Y Boing? ¿Y Saltos? Justifica en cada caso.
- ¿Cómo es la distribución de los datos de cada resorte? Compáralos.
- ¿Cuál de todos los resortes escogerías? Justifica tu elección.

- Paulina está formando un negocio de pizzas y ofrece diferentes tipos, dependiendo de la cantidad de ingredientes y del tamaño de la masa. Ella lleva un conteo de lo que ha vendido en una semana, para luego sacar las ganancias.

N° de ingredientes	Tamaño de la pizza			
	Personal	Familiar	Grande	Extra grande
[1, 3[	2	6	5	4
[3, 5[	15	25	32	21
[5, 7[	12	36	26	15
[7, 9]	8	12	14	7

Paulina necesita reajustar los precios según el tamaño de las pizzas, y cuya media no supere a la mediana en cada intervalo de ingredientes. ¿Qué tamaño de pizza se reajustará en el precio?

Reflexiona

- ¿De qué otra forma habrías resuelto el problema? ¿Por qué?
- ¿Qué paso de la resolución de problemas es el que te resulta más difícil resolverlo?

Palabras clave

- ➔ Diagrama de árbol.
- ➔ Principio multiplicativo.

Repasa

Un **espacio muestral** corresponde al conjunto de los posibles resultados de un experimento aleatorio. Si el **experimento aleatorio** es lanzar una moneda, su espacio muestral es {cara, sello} y la **cardinalidad** del espacio muestral es 2.

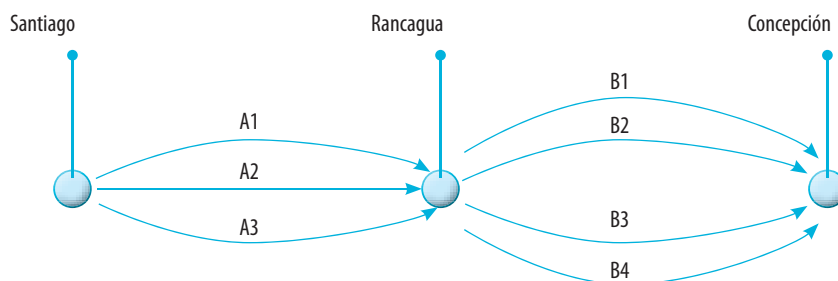
¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral?

- Cuando vas a un restorán y pides el menú que se compone de 2 platos de fondo y 3 acompañamientos, ¿de cuántas maneras puedes elegir tu almuerzo?

Gabriela es la encargada de logística en una empresa de camiones que realiza recorridos desde Santiago a Concepción con una parada en Rancagua. Ella desea determinar la probabilidad de que un camión realice uno de los distintos recorridos posibles, ya que de Santiago a Rancagua estos vehículos pueden transitar por 3 caminos diferentes, de Rancagua a Concepción, por 4. ¿Cuántos recorridos pueden realizar los camiones para ir de Santiago a Concepción?

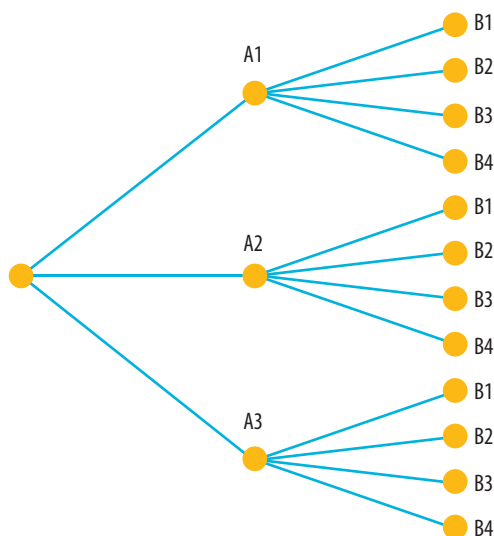
Para calcular la cantidad de caminos diferentes que pueden recorrer los camiones, puedes seguir los pasos:

Paso 1 ➔ Identificar los trayectos de Santiago a Rancagua y de Rancagua a Concepción, mediante un esquema.



De Santiago a Rancagua existen 3 caminos, A1, A2 y A3. De Rancagua a Concepción existen 4 caminos, B1, B2, B3 y B4.

Paso 2 ➔ Transformar el esquema anterior en un diagrama de árbol.



Mediante el diagrama de árbol podemos calcular que la cantidad de recorridos distintos que pueden realizar los camiones desde Santiago a Concepción es $3 \cdot 4 = 12$. Este cálculo se conoce como **Principio multiplicativo**.

Gabriela desea analizar nuevos recorridos para los camiones, pasando por otras ciudades como Talca, Linares y Chillán, conociendo que:

De Rancagua a Talca existen 4 caminos.

De Talca a Linares existen 5 caminos.

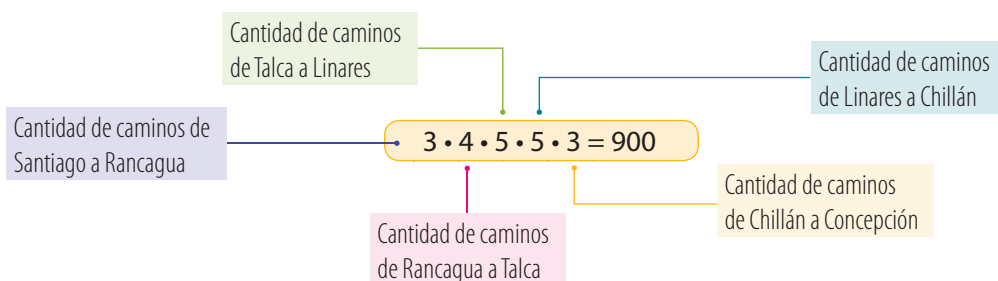
De Linares a Chillán existen 5 caminos.

De Chillán a Concepción existen 3 caminos.

¿Cuántos recorridos pueden realizar los camiones?

Paso 3 ➔ Calcular la cantidad de trayectos distintos utilizando el principio multiplicativo.

Se multiplican las cantidades de caminos posibles a cada ciudad:



Por lo tanto, los camiones pueden realizar 900 trayectos diferentes desde Santiago a Concepción pasando por las ciudades mencionadas anteriormente.

En resumen

La **cardinalidad** de un **espacio muestral** se puede calcular a través de las técnicas de conteo. Una de ellas es el **diagrama de árbol** que permite representar gráficamente todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Otra técnica es el **principio multiplicativo** que se define a continuación:

La realización de un proceso que se divide en k etapas y cada etapa se puede realizar de $n_1, n_2, \dots, n_k$ formas, entonces todo el proceso se puede realizar de $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ distintas maneras.

Razona y comenta

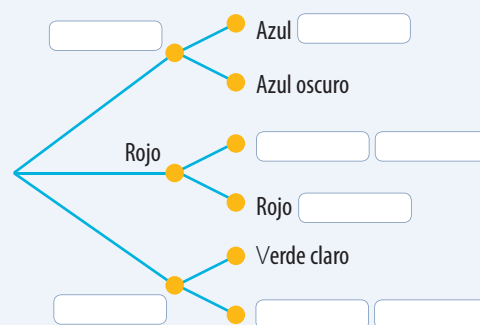
- ¿Qué ventajas y desventajas tiene utilizar diagramas de árbol para determinar el espacio muestral de un experimento? ¿Y el principio multiplicativo?
- Si el camión debe volver a Santiago escogiendo un camino al azar, y pasando por las mismas ciudades ¿cuántas posibilidades tiene para escoger de modo que no pase por el mismo camino que tomó para el trayecto de ida?

Repaso

1. **Construye** un diagrama de árbol para representar las diferentes combinaciones.

- 2 pantalones (azul o negro) y 3 chalecos (rojo, amarillo o verde).
- 3 colores de blusas (blanca, roja o negra) y 3 pares de zapatos (café, negros o blancos).
- 2 proteínas (carne o pollo), 2 carbohidratos (arroz o fideos) y 2 postres (jalea o fruta).

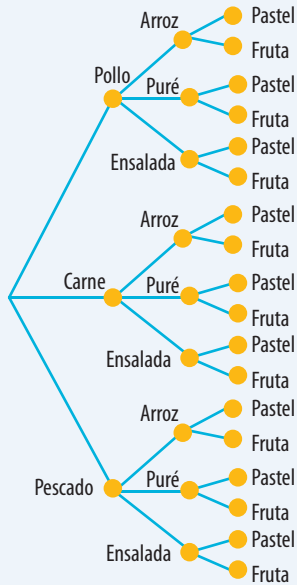
2. **Completa** el siguiente diagrama de árbol.



Práctica guiada

3. Analiza la situación y luego responde las preguntas.

En un restorán se ofrecen distintas alternativas de menú. Para el plato de fondo se ofrecen 3: pollo, carne o pescado; 3 acompañamientos: arroz, puré o ensalada y 2 postres: pastel o fruta. Una persona debe escoger una opción de cada menú. A continuación se muestra un diagrama de árbol que muestra las distintas opciones.



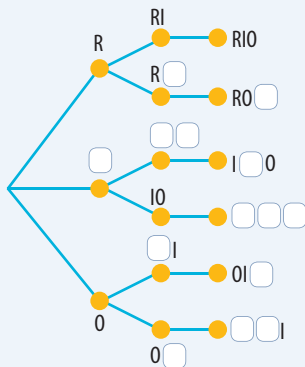
¿Cuántos menús diferentes se pueden escoger?

Se pueden escoger 18 menús diferentes.

- Si una persona es vegetariana (no come carne ni pollo) ¿cuántas opciones podrá elegir?
- Si en un momento se acaba el pastel, ¿cuántas opciones para escoger tendrá una persona? ¿Y si se acaba el puré?

4. Completa el diagrama de árbol de acuerdo con la situación dada, y luego responde las preguntas.

La letras de la palabra RIO, se pueden combinar para escribir distintas palabras con o sin sentido y sin que se repitan según el siguiente diagrama de árbol:



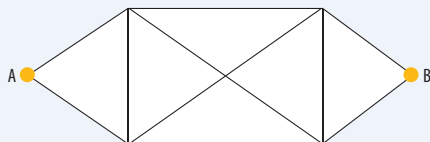
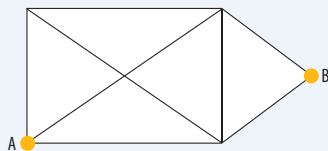
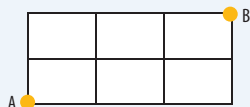
- ¿Cuántas palabras sin importar su sentido, se pueden formar con la palabra RIO?
- ¿Cuántas palabras con sentido se pueden formar con la palabra RIO?
- Si se agrega la letra S a la palabra RIO, ¿cuántas palabras con o sin sentido y sin que se repitan se podrían formar? Comprueba con el principio multiplicativo.

Aplico

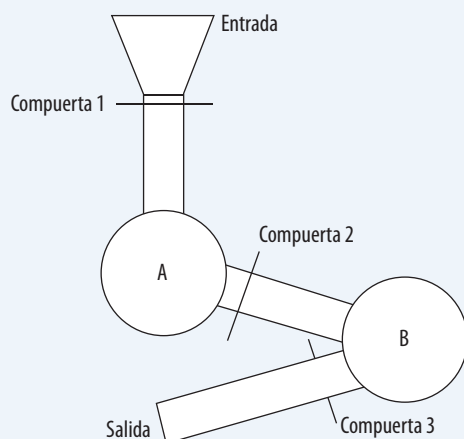
5. Resuelve los siguientes problemas.

- En una repisa se quieren ordenar 3 libros. Uno de Biología, otro de Lenguaje y uno de Matemática. ¿De cuántas formas es posible hacerlo?
- Un estudiante tiene 5 chaquetas, 3 poleras, 4 pantalones y 2 pares de zapatillas. ¿De cuántas formas puede combinar su ropa para vestirse?
- Con respecto a la palabra PLATO, ¿de cuántas maneras puede combinar las letras para escribir distintas palabras, con o sin sentido y sin que estas se repitan?
- ¿Cuántas patentes para automóviles es posible formar si estas deben constar de 4 letras, todas ellas consonantes seguidas de 2 dígitos? Considera que las letras y números se pueden repetir.
- Gastón realiza diferentes tipos de páginas web. Se especializa en páginas para comerciantes, deportistas, colegios, institutos y bancos. Para cada una de ellas tiene 10 opciones de diseño con 5 colores cada una. Para presentar sus productos, Gastón quiere hacer un diagrama de árbol de las posibilidades que tiene un cliente para escoger, ¿cómo sería dicho diagrama?
- Andrés y Sofía piden una pizza que pueden tener los siguientes ingredientes; choricillo, pepinillos, queso extra, sardina, extra aliños y pasta de maní. Si además pueden elegir entre tres tipos de masas: fina, gruesa y encebollada, entonces:
 - ¿De cuántas formas pueden elegir la pizza?
 - Si Sofía es alérgica al maní, entonces ¿de cuántas formas distintas pueden pedir las pizzas?

- g) Vanesa se encuentra programando un juego que consiste en el viaje que debe hacer una hormiga desde el punto A hasta el punto B en diferentes laberintos. Además debe considerar que no puede devolverse en su camino. ¿Cuántos caminos diferentes puede tomar la hormiga en los siguientes laberintos?



- h) Lorena construye el siguiente circuito de tómbolas:



Todas las compuertas de la tómbola se encuentran cerradas y en cada tubo solamente puede pasar una bolita a la vez. Lorena deposita 4 bolitas numeradas del 1 al 4 en la entrada.

- Si se abre la compuerta 1, ¿de cuántas formas pueden ordenarse las bolitas al caer en la tómbola A?

- Si en la tómbola A se encuentran tres bolitas numeradas del 5 al 7 y se abre la compuerta 2, ¿de cuántas maneras pueden ordenarse al caer las bolitas en la tómbola B?
- Si en la tómbola B se encuentran tres bolitas numeradas del 8 al 10 y se abre la compuerta 3, ¿de cuántas formas pueden salir todas las bolitas?
- ¿De cuántas maneras pueden ordenarse al salir las 10 bolitas numeradas del 1 al 10 si la bolita n° 2 debe ser la primera?
- ¿De cuántas maneras pueden ordenarse al salir las 10 bolitas numeradas del 1 al 10 si la bolita n° 2 debe salir en tercer lugar?

6. **Conecta.** Un elemento fundamental de la electrónica digital son los **operadores lógicos**, los cuales consisten en procesar señales eléctricas representadas por 0 y 1 cuyas combinaciones entregan, según estas señales, una respuesta, por ejemplo:

Existen 2 posibilidades de salida, ya que en la entrada ingresa el 0 o el 1.	Existen 4 posibilidades de salida, ya que pueden ingresar el 00, 01, 10 y 11.	Existen 8 posibilidades de salida, ya que pueden ingresar el 000, 001, 010, 100, 110, 101, 011, 111.

¿Cuántas salidas diferentes tendrá un operador lógico de 100 entradas? Y si se pudieran ingresar tres señales en cada entrada como el 0, 1 y 2 ¿Cuántas combinaciones posibles se pueden obtener en la salida?

7. **Descubre el error.** Cristina tiene 5 libros de Lenguaje y 3 libros de historia. Los 5 libros de Lenguaje son distintos entre sí y los 3 libros de Historia son idénticos entre sí. Cristina dice que existen: $5 \cdot 3 = 15$ diferentes ordenamientos en fila de los libros. ¿Dónde está el error cometido por Cristina?
8. **Desafío.** ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir al azar un número de 5 dígitos, este quede formado solo por cifras impares?

Reflexiono

- ¿Por qué crees que es necesario conocer y analizar las combinaciones de diversos elementos?

Refuerzo

¿Cuántos números de 7 cifras pueden formarse con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7, utilizando cada cifra solo en una ocasión?

Palabras clave

- ➔ Permutación.
- ➔ Variación.

Repasa

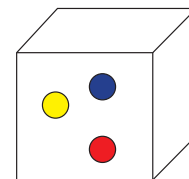
En las extracciones sin reposición se extrae la bolita y no se vuelve a ingresar a la urna.

¿De cuántas formas se pueden ordenar una cantidad de objetos?

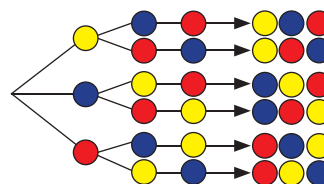
- Supongamos que estás limpiando tu habitación y quisieras ordenar 5 libros en una repisa, ¿de cuántas maneras podrías hacerlo?

Permutación

Rodrigo participa en un experimento que consiste en adivinar el **orden de extracción**, sin reposición, de 3 bolitas desde la urna que muestra la imagen. Si Rodrigo debe escoger un orden al azar, ¿cuántas posibilidades tiene para hacerlo?



Paso 1 ➔ Realizar un diagrama de árbol para visualizar todos los ordenamientos posibles.



Se observa que Rodrigo puede escoger entre 6 ordenamientos distintos.

Paso 2 ➔ Comprobar lo anterior utilizando el principio multiplicativo.

Posibilidades para la 1.º extracción.

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Posibilidades para la 3.º extracción.

Posibilidades para la 2.º extracción.

Esta situación se conoce como una **permutación** de 3 elementos (P_3), es decir, la cantidad de formas distintas en que se pueden ordenar 3 elementos diferentes.

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Rodrigo puede escoger entre 6 posibilidades para orden de extracción de 3 bolitas de una urna que contiene 3 bolitas de distinto color.

En resumen

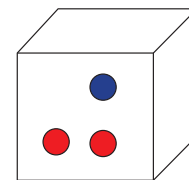
Una **permutación** de n objetos diferentes (P_n) corresponde al número de ordenamientos lineales posibles de realizar con n elementos. Se expresa como $n!$ (n factorial)

Por ejemplo $5!$ (5 factorial) se calcula como: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

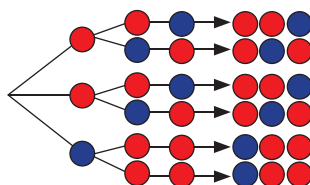
Con n entero positivo se tiene $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Por definición $0! = 1$

Permutación con repetición

Si el experimento varía y se reemplaza la bolita amarilla por una de color rojo, ¿de cuántas formas puede escoger Rodrigo el orden de extracción?



Paso 1 ➔ Realizar un diagrama de árbol para visualizar todos los ordenamientos posibles.



Existen 6 formas de ordenamiento, sin embargo, solamente existen 3 ordenamientos diferentes, rojo, rojo, azul , rojo, azul, rojo y azul, rojo, rojo

Paso 2 Utilizar el cálculo de una permutación con elementos repetidos.

Como existen 2 bolitas que se repiten, la cantidad de ordenamientos de 3 elementos se divide por la cantidad de elementos repetidos, es decir:

Cantidad de permutaciones con 3 elementos.

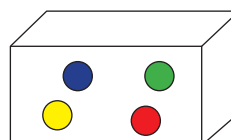
$$P_2^3 = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$$

Cantidad de permutaciones con 2 elementos.

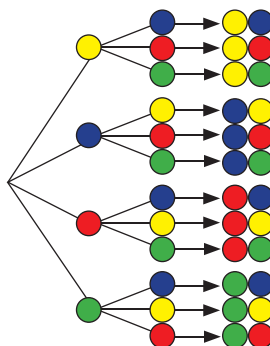
Por lo tanto, Rodrigo puede escoger entre 3 ordenaciones diferentes para la extracción de 3 bolitas de una urna con 3 bolitas donde 2 de ellas tienen el mismo color.

Variación

Ahora el experimento consiste en adivinar el orden de extracción de dos bolitas desde una urna con cuatro bolitas de distinto color. En este caso, ¿cuántos ordenamientos distintos puede escoger Rodrigo?



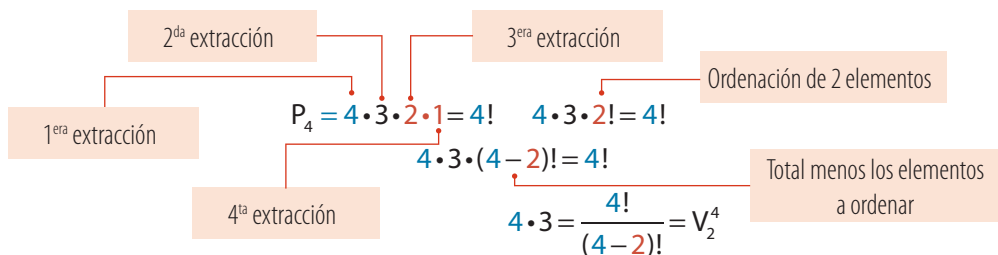
Paso 1 Realizar un diagrama de árbol para visualizar todos los ordenamientos posibles.



Existen 12 formas distintas de orden para la extracción. Según el principio multiplicativo se puede calcular como $4 \cdot 3 = 12$.

Paso 2 Utilizar el cálculo de la permutación de un subconjunto de un conjunto de elementos.

En este caso, Rodrigo realiza el siguiente análisis a partir del principio multiplicativo, considerando que de 4 elementos se ordenan 2.



Observa

Para calcular el factorial de un número debes ingresar la tecla $x!$ de tu calculadora.

Por ejemplo, para calcular $5!$, en tu calculadora debes ingresar



Esto se conoce como una **variación** de 2 elementos desde un conjunto de 4 elementos. Por lo tanto, Rodrigo puede escoger 12 ordenaciones diferentes de extracción de 2 bolitas de una urna que tiene 4 bolitas de diferente color.

En resumen

- Una **permutación** de n elementos con a , b y c elementos repetidos se calcula mediante la siguiente expresión:

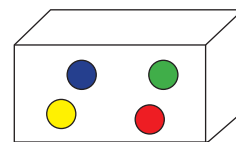
$$P_{(a,b,c)}^n = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c!}$$

- La **permutación** de r elementos de un conjunto de n elementos **distintos** se conoce como **variación**, y se calcula mediante la expresión:

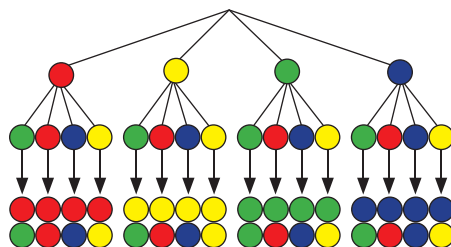
$$V_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Variación con reposición

Si ahora el experimento consiste en extraer una bolita, anotar su color y devolverla a la urna, ¿de cuántas formas se podrán extraer 2 bolitas de la urna?



Paso 1 ➔ Realizar un diagrama de árbol para visualizar todos los ordenamientos posibles.



Existen 16 formas distintas de orden para la extracción con reposición, ya que la cantidad de ramas del diagrama de árbol no disminuye con cada extracción pues se devuelven las bolitas extraídas.

Razona

y comenta

Si Rodrigo quiere calcular la probabilidad de adivinar el orden de extracción de 3 bolitas con reposición de la última urna mostrada, ¿cómo lo calcularía?

En este caso, Rodrigo advierte que al aplicar el principio multiplicativo se tiene:

1^{ra} extracción

2^{da} extracción

$$4 \cdot 4 = 16 \Rightarrow 4^2 = 16$$

Esto se conoce como una **variación con reposición** de 2 elementos desde un conjunto de 4 elementos distintos. Por lo tanto, Rodrigo puede escoger 16 ordenaciones de la extracción de 2 bolitas de una urna que tiene 4 bolitas de diferente color.

En resumen

La **permutación** de r elementos de un conjunto de n elementos se conoce como **variación con reposición** y se calcula como: $V_r^n = n^r$

Repaso

1. Resuelve el siguiente problema, aplicando principio multiplicativo o diagrama de árbol.

- En un torneo de tenis se tienen cuatro equipos, A, B, C y D que se disputan el tercer y cuarto lugar. ¿De cuántas formas posibles estos equipos pueden quedar ubicados en la tabla de posiciones?
- ¿De cuántas maneras se pueden sentar tres niños en una fila con tres sillas?
- ¿Cuántas contraseñas de cuatro letras distintas se pueden diseñar con las letras de la palabra CLAVE?
- Un analista informático va a conectar un servidor para la empresa en la cual trabaja. Tiene a su disposición tres tipos diferentes de procesadores,

cuatro modelos de gabinete, memorias RAM de tres capacidades distintas y una tarjeta madre de dos modelos distintos. ¿Cuántas opciones tiene para conectar el servidor?

- Un producto antes de salir al mercado pasa por tres controles de calidad, en cada uno se inspecciona una cierta particularidad y se anota su conformidad; en el primer control hay 4 exámenes, en el segundo control hay 3 exámenes, y en el tercer control hay 2 exámenes. ¿De cuántas maneras se puede controlar la calidad de un producto?
- De una ciudad "A" a otra ciudad "B" hay 4 caminos diferentes y de la ciudad "B" a la ciudad "C" hay 3 caminos diferentes. ¿De cuántas maneras se podrá ir de "A" a "C"?

Práctica guiada

2. **Calcula** el valor de las siguientes permutaciones y variaciones.

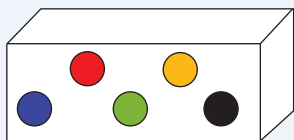
$$V_3^7 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

- a) P_2^5 c) P_4^5 e) V_5^6
 b) P_3^7 d) V_2^4 f) V_6^{10}

Aplico

3. **Resuelve** los siguientes problemas.

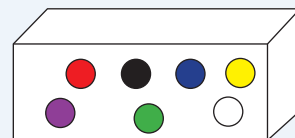
- a) ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con las cifras 1, 2, 3, 4, 5 y 6 sin que se repita ninguna? ¿Y si se repite cada uno en dos ocasiones? ¿Cuántos de esos números terminarán en 26?
- b) Amalia participa en un juego que consiste en adivinar el orden de extracción de 5 bolitas desde una urna que contiene 5 bolitas de colores.



- ¿Cuántas extracciones distintas existen?
 - Si Amalia dice que la primera bolita es de color azul, ¿cuántas extracciones distintas existen para que ella gane?
 - Si Amalia dice que la primera bolita es azul y la segunda verde, ¿cuántas extracciones distintas existen para que ella gane?
 - Si Amalia dice que la última bolita es de color amarillo, ¿cuántas extracciones distintas existen para que ella gane?
- c) Carmen tiene una florería y ella es especialista en crear arreglos florales. ¿Cuántos arreglos florales distintos puede obtener con 10 flores diferentes si estos deben ser de 5 flores?
- ¿Cuántos arreglos de 5 flores se pueden obtener de 10 flores, si 5 de ellas son rosas?

- Continuando con la pregunta anterior, ¿cuántos arreglos se pueden obtener si 2 de las flores deben ser rosas?

- d) Isabel realiza el siguiente experimento en la feria de su colegio: desde una urna con 7 bolitas como muestra la figura, se debe adivinar el orden de extracción de 3 bolitas que realizará un compañero con los ojos vendados.



Existen dos formas de extraer las bolitas:

- A: una a una y sin reposición
 B: una a una y con reposición

- ¿Cuántas extracciones distintas existen si se extraen tres bolitas sin reposición?
- ¿Cuántas extracciones distintas existen si se extraen tres bolitas con reposición?
- Si un concursante adivina que en la primera extracción sin reposición la bolita es de color negro ¿cuántas extracciones posibles existen para que gane? ¿Y si la extracción se realiza con reposición?

4. **Analiza** la siguiente información y luego responde.

A Carlos le gusta realizar anagramas, es decir intercambiar las letras de una palabra para crear otra, por ejemplo, al cambiar las letras de la palabra AMOR se pueden obtener palabras con y sin sentido, como ROMA y MARO. ¿Cuántos anagramas puede crear Carlos con las siguientes palabras?

- a) AMOR e) CHANCHO
 b) CASA f) PERRO
 c) PELEA g) ANA
 d) GATO h) CAMIONETA

5. **Desafío.** ¿Cuál es la cantidad de dígitos mínimos que necesitas para formar 90 números de seis cifras?

Reflexiono

- ¿Por qué crees que es necesario conocer y analizar las permutaciones o variaciones de diversos elementos?

Refuerzo

- ¿De cuántas maneras puedes ordenar en una repisa 8 libros de los cuales 3 son de Matemática?

Palabra clave

Combinación.

¿Cuántas combinaciones se pueden hacer?

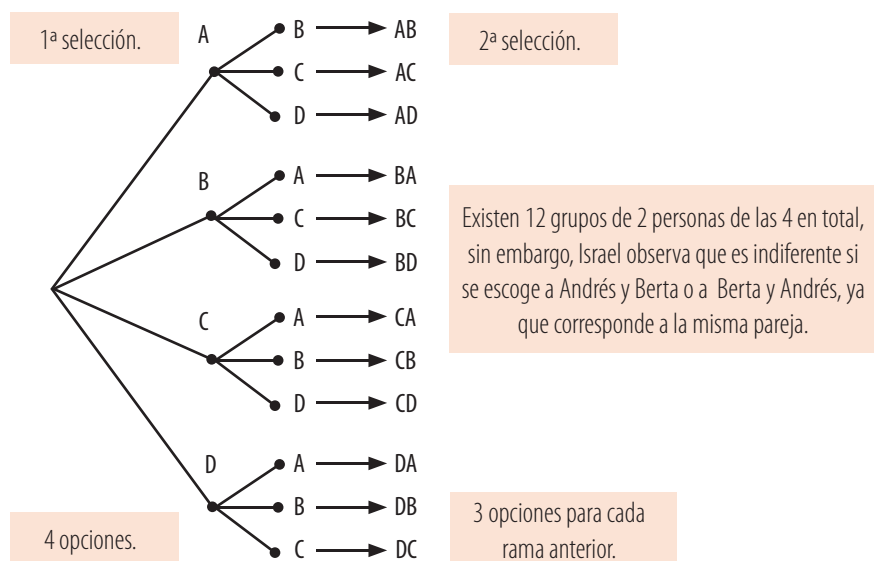
- Cuando compras yogurt de tres frutas distintas, es difícil determinar la combinación de frutas que será de tu agrado. ¿Has pensado cuántas posibilidades de sabores diferentes podrías escoger si combinaras 3 de 10 frutas posibles? ¿Cómo lo calcularías?

Israel está realizando un estudio en el que debe entrevistar grupos de dos personas escogidas al azar de un total de 4, Andrés, Berta, Carla y Daniela. Esta situación se traduce a elegir muestras de 2 personas de una población de 4 personas. ¿De cuántas maneras podría Israel elegir estas muestras?



Paso 1 Realizar un diagrama de árbol para las posibles combinaciones.

Para ello, identificaremos a las personas con las letras **Andrés, Berta, Carla y Daniela**.



Paso 2 Descartar las parejas que se repiten.

Combinaciones descartadas		Combinaciones que quedan	
AB = BA	AC = CA	AB	BC
CD = DC	BC = CB	AC	BD
AD = DA		AD	CD

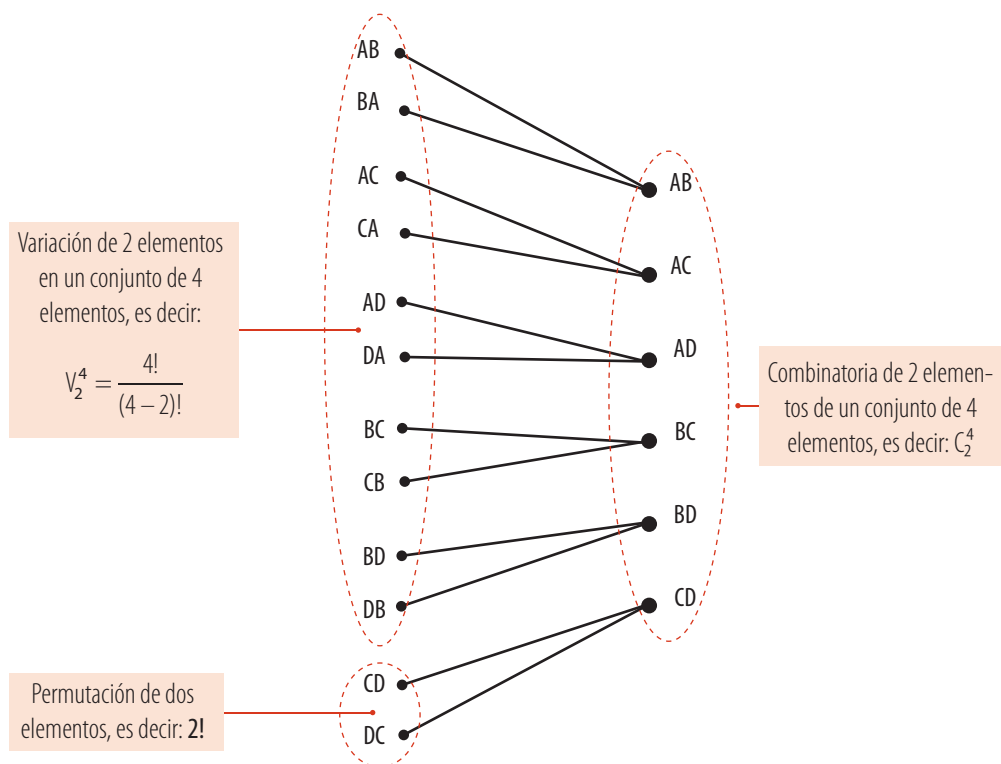
Israel puede elegir entre 6 **combinaciones** de personas para su entrevista, es decir, puede elegir 6 muestras distintas de una población de 4 individuos.

En resumen

El número de combinaciones que se pueden efectuar con una cantidad **r** de elementos desde un conjunto de **n** elementos, **no interesa el orden** con el cual se extraen o escogen los elementos, solamente importa la cantidad de elementos que se puedan combinar.

Israel se pregunta si existe una fórmula o expresión matemática que permita calcular la combinatoria anterior sin necesidad de hacer el diagrama de árbol. Para buscar dicha expresión, Israel realiza los siguientes pasos:

Paso 1 Analizar el diagrama de árbol de la situación, identificando permutaciones y variaciones.



Paso 2 Israel establece que el producto entre la variación de 2 elementos en un conjunto de 4 elementos (V_2^4), es igual al producto entre la permutación de 2 elementos ($2!$) y la combinatoria de 2 elementos en un conjunto de 4 elementos (C_2^4), es decir:

$$V_2^4 = 2! \cdot C_2^4 \quad C_2^4 = \frac{V_2^4}{2!}$$

Al despejar C_2^4 y desarrollar la variación se obtiene:

$$C_2^4 = \frac{V_2^4}{2!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 6$$

En resumen

La **combinación** de r elementos de un total de n elementos, se calcula mediante la expresión:

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

Donde n y r son números enteros positivos y $n > r$.

Links

Para reforzar los procedimientos para calcular permutaciones y combinaciones visita:

<http://goo.gl/HPdPL>



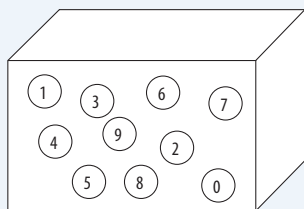
Razona y comenta

- ¿Cuál es la diferencia entre una combinación de elementos y una variación de elementos?
- ¿Cuál sería la probabilidad de que al elegir una pareja de personas al azar, Israel entreviste a Berta y Andrés?

Repaso

1. Resuelve los siguientes problemas.

- ¿Cuántas palabras, con o sin sentido, de tres letras se pueden formar con las letras de la palabra ELSA?
- ¿Cuántos números pares de cinco cifras se pueden formar utilizando los dígitos de uno al nueve?
- ¿De cuántas formas se pueden ordenar siete libros de Geometría, cinco de Aritmética y tres de Álgebra en un estante?
- Para ir a ver una obra de teatro se ordenarán tres hombres y cuatro mujeres por fila. ¿Cuál es la probabilidad de que las cuatro mujeres no queden separadas?
- En un curso se quiere escoger a la directiva, compuesta por presidente, tesorero y secretario. Si para esta elección hay siete estudiantes que se disputan los tres puestos, ¿cuántas posibles ordenaciones hay?
- Un juego consiste en adivinar los dígitos que se encuentran en una urna con 10 bolitas numeradas del 0 al 9.



- ¿De cuántas maneras se pueden extraer dos bolitas?
- ¿Cuántas extracciones de 4 bolitas se pueden realizar, si las 4 deben ser números pares?
- ¿Cuántas extracciones se pueden realizar de 5 bolitas, de modo que sean números impares?
- ¿Cuántas extracciones se pueden realizar de 4 bolitas, de modo que sean las bolitas marcadas con el 1, 2, 3 y 4?
- ¿Cuántas extracciones se pueden realizar de 4 bolitas, para que sean números consecutivos?

Práctica guiada

2. Calcula el valor de cada combinatoria

$$C_4^6 = \frac{6!}{(6-4)! \cdot 4!} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2! \cdot 4!} = \frac{30}{2 \cdot 1} = \frac{30}{2} = 15$$

- a) C_3^4 b) C_2^4 c) C_3^5 d) C_2^5

3. Analiza las siguientes expresiones. Luego, simplificalas.

$$\frac{P_k^n}{V_k^n} = \frac{\frac{n!}{k!}}{\frac{n!}{(n-k)!}} = \frac{n!}{k!} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{(n-k)!}{k!}$$

a) $\frac{P_k^n}{C_k^n}$

b) $\frac{C_k^n}{P_k^n}$

Aplico

4. Resuelve los siguientes problemas.

- En una fiesta se dieron en 120 apretones de manos como saludo. ¿Cuál fue el número de personas presentes en la fiesta si todos se saludaron de mano en una ocasión?
- Se deben formar diferentes comisiones en un curso compuesto por 15 hombres y 16 mujeres. ¿De cuántas formas se puede armar una comisión de 4 personas?
 - ¿Cuántas comisiones de las anteriores estarán compuestas solamente por varones? ¿Y solamente por mujeres?
 - ¿Cuántas comisiones de 7 personas se pueden formar y en cuántas de ellas habrá al menos a un varón?
 - ¿Cuántas comisiones de 10 personas se pueden formar? ¿Cuántas de esas comisiones tendrán menos de 4 mujeres? ¿Y menos de 7 hombres?
- Una diseñadora debe pintar un cuadro utilizando solamente 10 colores de la paleta de su computador. Si la paleta de su computador tiene 100 colores diferentes, ¿cuántas combinaciones puede realizar?
 - ¿En cuántas de esas combinaciones estará el color rojo?
 - ¿En cuántas de esas combinaciones estará el color rojo y azul?
 - ¿En cuántas de esas combinaciones estará el color verde, rojo y azul?
- Un grupo de amigos se encuentra jugando con naipes inglés de 52 cartas. Si el juego consiste en obtener 13 cartas consecutivas, ¿de cuántas formas se pueden extraer las cartas?

- Si el juego consiste en extraer solamente tres cartas: una jota, una reina y un rey, ¿cuántas extracciones se pueden realizar?
 - ¿De cuántas formas se pueden repartir 10 cartas, de las cuales 6 son picas y 4 son corazones?
- e) El profesor de Física les toma una prueba de 20 preguntas a sus alumnos. ¿De cuántas formas pueden responder los alumnos si deben escoger 10 preguntas?
- ¿De cuántas formas pueden contestar los alumnos si deben escoger 10 preguntas en las que deben figurar obligatoriamente la 2, la 3 y la 4?
 - ¿De cuántas formas pueden contestar los alumnos si deben escoger 10 preguntas de las cuales deben contestar las dos primeras?
 - ¿De cuántas formas pueden contestar los alumnos si deben escoger 10 preguntas y responder al menos 5 de las 6 primeras?
- f) En una bodega se encuentran almacenados 50 refrigeradores, de los cuales se sabe que 5 tienen defectos en el motor. Si se seleccionan al azar 4 refrigeradores, ¿cuántas de esas muestras tendrán dos refrigeradores defectuosos?
- Si se seleccionan al azar a 4 refrigeradores, ¿cuántas de esas muestras tendrán tres refrigeradores defectuosos?
 - Si se seleccionan al azar a 4 refrigeradores, ¿cuántas de esas muestras tendrán 4 refrigeradores defectuosos?
- g) Una fundación decide regalar 30 paquetes de libros a escuelas de bajos recursos. ¿De cuántas maneras se pueden repartir 30 paquetes de libros entre 10 escuelas si cada una debe recibir 3 paquetes?
- ¿De cuántas maneras se pueden repartir 30 paquetes de libros entre 5 escuelas si cada una debe recibir 6?
5. **Conecto.** Para determinar los posibles resultados en las combinaciones de varios elementos químicos, los científicos utilizan el análisis combinatorio.

Reflexiono

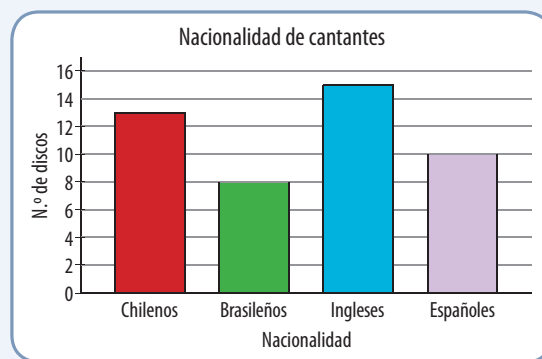
- Si se extraen n elementos desde un conjunto de m , elementos, donde $m > n$, ¿cuál es la diferencia en el resultado si los n elementos son diferentes entre sí con respecto a si están repetidos?

Por ejemplo, para realizar un experimento con 100 sustancias diferentes se realizan combinaciones con tres de ellos. En este caso, ¿cuántas combinaciones se pueden realizar?

6. **Describe el procedimiento.** Describe el procedimiento que se debe seguir para calcular las siguientes combinaciones.

a) $C_2^7 + C_8^9$ b) $\frac{3(6C_3^7)}{-5C_2^4}$

7. **Descubre el error.** ¿Cuál es el error cometido por Mario al resolver el siguiente problema?
 “En la gráfica se muestra la cantidad de discos vendidos en un día por una disquera, según la nacionalidad del artista. ¿De cuántas maneras se pueden combinar 5 discos vendidos de artistas brasileños?”



Respuesta de Mario: Si se realiza la combinación entre la totalidad de discos vendidos y la cantidad de discos vendidos de artistas brasileños resulta:

$$\begin{aligned}
 C_8^{46} &= \frac{46!}{(46-8)! \cdot 8!} = \frac{46!}{38! \cdot 8!} \\
 &= \frac{46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39 \cdot \cancel{38!}}{\cancel{38!} \cdot 8!} \\
 &= \frac{46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\
 &= 260\,932\,815
 \end{aligned}$$

Refuerzo

1. ¿Cuántos partidos de fútbol se juegan en un campeonato de una rueda donde participan 20 equipos?
2. ¿Cuántas palabras, con o sin sentido, de cinco letras se pueden formar con las letras de la palabra LEONARDO?

Palabras clave

- ➔ Relación entre el promedio de las medias muestrales y la media poblacional.

Repasa

- Una **población** es un conjunto de elementos que se desea estudiar. Estos pueden ser personas, animales, artículos, etc.
- Una **muestra** es parte de la población que se selecciona para realizar el estudio. Esta debe ser representativa, es decir debe reflejar las características esenciales de la población que se desea estudiar.

¿Qué relación existe entre el promedio de las medias muestrales y la media de la población?

- En años anteriores revisaste conceptos como población y muestra. Si se quiere conocer la cantidad de estudiantes de Educación Media que tienen celular, ¿cuál sería la población de interés y una posible muestra?

Taller

Reúnanse en grupos de 3 integrantes y realicen el siguiente taller.

Este es el registro de la estatura de 20 estudiantes de 1° medio.

1,70	1,66	1,55	1,56	1,71	1,55	1,66	1,59	1,60	1,58
1,61	1,63	1,51	1,71	1,71	1,70	1,65	1,55	1,48	1,66

- Calculen el total de muestras posibles que se pueden extraer de las estaturas de 5 estudiantes (con reposición). Utiliza una técnica de conteo.
- Describan 20 de las muestras posibles que calculaste en la pregunta anterior.
- Calculen la media aritmética de cada una de las muestras.
- Calculen el promedio de las medias muestrales encontradas en la respuesta anterior.
- Calculen el promedio de la estatura de los 20 estudiantes de 1° medio dadas en la tabla.

Razona**y comenta**

- ¿Qué relación existe entre el promedio de las medias muestrales y el promedio de la población obtenido en la pregunta 5?
- Determinen las muestras posibles que se pueden extraer sin reposición de 5 estudiantes y describan 20 de ellas.
 - Calculen la media aritmética de cada una de las muestras anteriores.
 - Calculen el promedio de las medias muestrales encontradas en la respuesta anterior.
 - Comparen este promedio con el obtenido en 5

Razona**y comenta**

- ¿Qué relación existe entre el promedio de las medias muestrales extraídas sin reposición y el promedio de la población?
- ¿Qué puedes concluir acerca de la relación que existe entre el promedio de las medias muestrales y la media poblacional?

En resumen

Al extraer muestras de igual tamaño de una población, puedes calcular la media aritmética de cada una de estas y posteriormente obtener el promedio entre ellas. La relación que existe entre **este promedio** es que **se aproxima a la media de la población**, independientemente de si las muestras se escogieron con o sin reposición.

Repaso

1. Resuelve los siguientes problemas.

- a) ¿Cuántas palabras de cuatro letras, con o sin sentido, se pueden formar con las letras de la palabra LAPIZ?
- b) Si se tienen manzanas, peras, naranjas y uvas, ¿de cuántas maneras se pueden combinar dos de estas frutas en un postre?

Práctica guiada

2. Resuelve el siguiente problema.

Se tiene el conjunto:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}.$$

- a) ¿Cuántas muestras de tamaño 4, con y sin reposición, pueden obtenerse?
- b) ¿Cuál es la media aritmética de los elementos del conjunto y de las muestras de tamaño 4 obtenidas?

Aplico

3. Resuelve los siguientes problemas.

- a) En un curso se obtuvieron las siguientes calificaciones en una prueba de matemática:

7,0	6,5	6,1	4,4	3,4	5,7	5,4	7,0	2,9
6,6	6,4	4,1	4,0	3,3	3,7	5,5	6,9	6,1
3,3	6,7	7,0	5,1	5,6	6,4	6,7	4,4	
5,7	6,8	6,9	5,5	6,0	4,5	3,8	3,5	
5,4	5,6	5,1	3,7	5,9	5,5	4,5	7,0	

- ¿Cuántas muestras de 4 calificaciones, sin reposición, puedes obtener?
- ¿Cuántas muestras de 7 calificaciones, con reposición, puedes obtener?
- Escoge 3 muestras de 4 calificaciones, sin reposición y calcula la media aritmética de cada una de ellas. Luego, compáralas con la media aritmética del curso y anota 2 conclusiones.

Reflexiono

- ¿Para qué piensas que es útil saber que el promedio de las medias muestrales es un valor cercano a la media poblacional? Explica.

- b) Los precios de distintos juegos de Play Station III se han registrado en el recuadro.

\$40 990	\$39 990	\$19 990	\$28 990	\$45 990	\$36 890
\$45 980	\$29 990	\$30 990	\$31 990	\$40 990	\$39 990
\$29 990	\$41 990	\$39 990	\$35 990	\$41 990	\$33 990

- ¿Cuántas muestras de 5 precios, sin reposición, se pueden obtener?
 - Escoge 4 muestras de 5 precios sin reposición y calcula la media aritmética de cada una de ellas. Luego, compáralas con la media aritmética de todos los precios y anota 2 conclusiones. Comenta con tus compañeros.
- c) Se desean estudiar los distintos tipos de sueldos existentes en una empresa. Para dicho estudio se escogerán muestras de distintos departamentos de la empresa como muestra la tabla. En cada uno de estos departamentos trabajan 8 personas. Además, la empresa tiene un personal de 56 empleados distribuidos en 7 departamentos con igual número de trabajadores. Una vez determinada la media aritmética en estos distintos departamentos, se obtuvo lo siguiente:

Departamentos			
Finanzas	Bodega	Contabilidad	Informática
\$450 000	\$410 000	\$445 000	\$480 000

Para completar el estudio se determinó la media aritmética de toda la empresa, resultando: \$565.750. Con respecto a esta información, responde:

- ¿Crees que la muestra obtenida es representativa? Explica.
- ¿Qué crees que ocurriría si se escogen otras muestras? Fundamenta tu respuesta.
- ¿En qué cambiaría si se consideran todas las muestras posibles de tamaño 7? Explica detalladamente.

Refuerzo

Se tiene el siguiente conjunto $A = \{7, 8, 9, 10, 11\}$

- a) ¿Cuál es la media aritmética de los elementos de A?
- b) Si se tiene la siguiente muestra $\{7; 10; 11\}$ y se calcula su media aritmética, ¿qué puedes concluir con respecto a la media aritmética de la muestra y de A?

Palabras clave

- ➔ Probabilidad teórica.
- ➔ Modelo de Laplace.

¿Cómo calcular la probabilidad teórica?

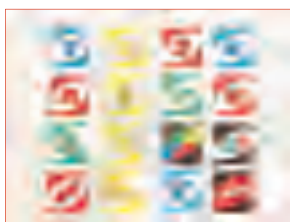
- El azar está presente en experimentos como lanzar una moneda o un dado, hacer girar una ruleta, etc., que reciben el nombre de experimentos aleatorios. ¿Qué otros experimentos aleatorios conoces?

Joshua y Nadia están realizando un experimento aleatorio con el juego de cartas UNO. Se trata de sacar una carta sin mirar. Joshua afirma que la probabilidad de obtener una carta con un número es de $\frac{19}{27}$, mientras que Nadia indica que la probabilidad de extraer una carta que posea un símbolo es de $\frac{8}{27}$. ¿Es correcto lo que afirma cada uno? ¿Por qué?



Juego UNO

- Cartas del 1 al 9 de colores rojo, verde, azul y amarillo.
- Cartas del 0 al 9 de colores rojo, verde, azul y amarillo.



- Cartas con símbolos, 2 cartas por color.



- Cartas con símbolos de los colores, 4 de cada tipo.



Paso 1 Definir los eventos del experimento aleatorio.

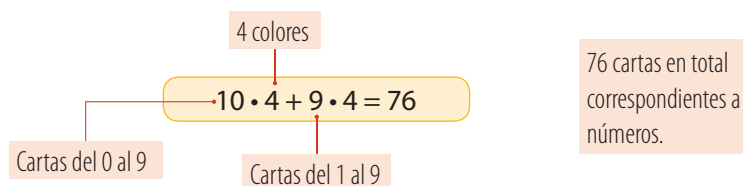
Experimento aleatorio: Sacar una carta al azar del juego de cartas UNO.

Evento A: Sacar una carta del naipes UNO y obtener un número.

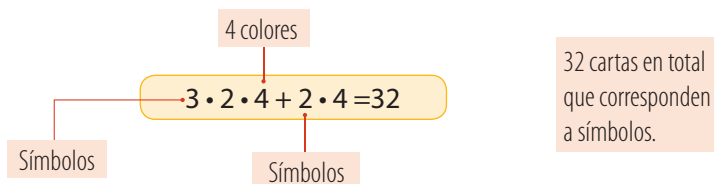
Evento B: Sacar una carta del naipes UNO y obtener un símbolo.

Paso 2 Calcular el número de casos favorables para cada evento.

Para el evento A existen 4 colores con los números del 0 al 9, y con los números del 1 al 9, por lo tanto, existen:



Para el evento B existen 3 símbolos con 2 cartas de cada color y 2 símbolos con 4 cartas cada uno, es decir, en total existen:



Paso 3 ➤ Calcular el número de casos totales.

El naipe UNO tiene 108 cartas en total.

Paso 4 ➤ Calcular el cociente entre el número de casos favorables y el número de casos totales para obtener la probabilidad de cada evento.

$$P(A) = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos totales}} = \frac{\text{cantidad de cartas con números}}{\text{total de cartas del naipe}} = \frac{76}{108} = \frac{19}{27}$$

$$P(B) = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos totales}} = \frac{\text{cantidad de cartas con símbolos}}{\text{total de cartas del naipe}} = \frac{32}{108} = \frac{8}{27}$$

Ambos estudiantes tienen razón, ya que como los eventos del experimento aleatorio son equiprobables (existe la misma probabilidad para sacar cualquier carta al azar) las probabilidades mencionadas son correctas.

Luego, de jugar, Joshua y Nadia fueron a almorzar. De menú existía carne o pollo para el plato de fondo, arroz, puré o ensalada de acompañamiento y helado, flan, jalea o fruta de postre. ¿Cuál es la probabilidad de que Joshua elija carne con arroz y de postre, jalea?

Para responder a la pregunta podemos realizar los siguientes pasos:

Paso 1 ➤ Definir los eventos del experimento aleatorio.

Experimento aleatorio: Elegir un plato de fondo, un acompañamiento y un postre al azar.

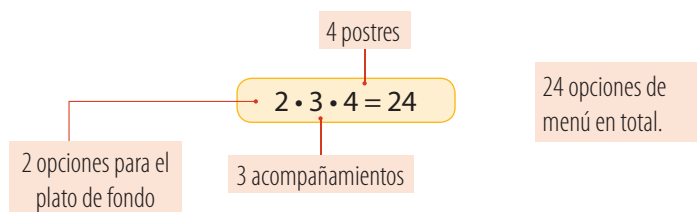
Evento A: Elegir carne de plato de fondo, arroz de acompañamiento y jalea de postre.

Paso 2 ➤ Calcular el número de casos favorables para cada evento.

En este caso, es una opción de menú, por lo tanto, es 1 caso favorable.

Paso 3 ➤ Calcular el número de casos totales.

El total de casos corresponde a todas las maneras distintas que se pueden elegir un menú que consista en un plato de fondo, un acompañamiento y un postre. Para esto utilizaremos el principio multiplicativo.



Observa

Los términos evento y suceso se emplean para referirse a lo mismo.

En resumen

Cuando un experimento aleatorio tiene resultados **equiprobables**, se calcula la probabilidad de un evento mediante la **regla de Laplace**. Esto se conoce como **probabilidad teórica**.

Para calcular la probabilidad teórica de un evento A se utiliza la expresión:

$$P(A) = \frac{\text{nº casos favorables}}{\text{nº casos totales}}$$

Observa

Para calcular el número de casos totales del espacio muestral de un experimento aleatorio puedes utilizar las técnicas de conteo.

Paso 4

Calcular el cociente entre el número de casos favorables y el número de casos totales para obtener la probabilidad de cada evento.

$$P(A) = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos totales}} = \frac{1}{24}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que Joshua elija carne con arroz y jalea es de $\frac{1}{24}$.

Razona**y comenta**

- ¿En todos los experimentos aleatorios es posible aplicar la regla de Laplace para calcular la probabilidad de un evento? ¿Por qué? Justifica tu respuesta.
- ¿Por qué es posible utilizar la regla de Laplace para calcular la probabilidad de elegir un menú? Justifica tu respuesta.
- En un experimento aleatorio, ¿es siempre posible definir el número de casos totales? ¿Por qué? Justifica tu respuesta.

Repaso**1. Resuelve los siguientes problemas.**

- a) Se considera el experimento aleatorio "lanzar dos monedas" cuyo espacio muestral es:

{CC, SC, SS, CS}.

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos caras?
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos sellos?
- ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga una cara y un sello?
- ¿Cuál es la probabilidad de que al menos se obtenga una cara?

- b) Se considera el experimento aleatorio "Sacar una bolita de una urna" cuyo espacio muestral es:

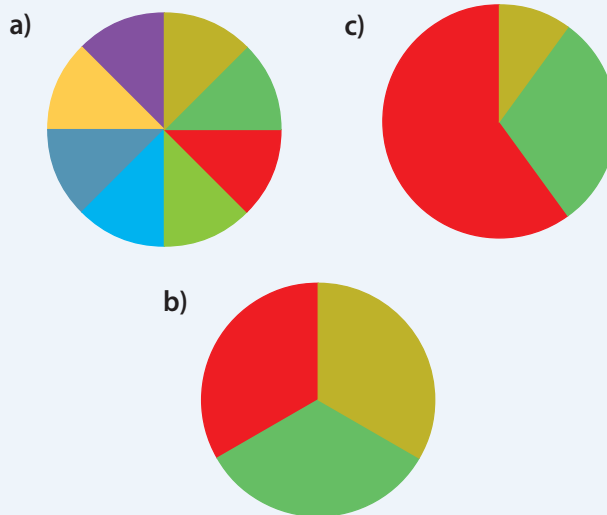
{12 bolitas verdes, 24 amarillas, 6 rojas}

- ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bolita roja?
- ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bolita amarilla?
- Si se extrae una bolita verde, sin reponerla, ¿cuál es la probabilidad de extraer una bolita roja?

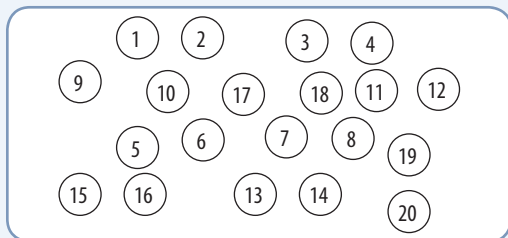
Práctica guiada**2. Identifica en cuál de los siguientes experimentos aleatorios es posible aplicar la regla de Laplace para calcular la probabilidad.**

- a) Lanzar una moneda.
b) Lanzar un dado cargado en una de sus caras.

- c) Hacer girar una ruleta que está dividida en 4 sectores congruentes.
d) Hacer girar una ruleta que está dividida en 3 sectores de distinta área.

3. Identifica en cuál de las siguientes ruletas es posible aplicar la regla de Laplace para obtener la probabilidad de que al girarla salga el color rojo.

4. Analiza las siguientes bolitas numeradas y responde.



- ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una bolita esta tenga marcado un número mayor a 10?
- ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una bolita esta tenga marcado un número menor a 1?
- ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una bolita esta tenga marcado el número 21?
- ¿Qué bolita es más probable extraer? Justifica.

Aplico

5. Resuelve los siguientes problemas.

- Los experimentos aleatorios se pueden realizar con o sin reposición. Por ejemplo, en una tómbola hay bolitas numeradas desde el 1 hasta el 15. Es posible realizar el experimento: "extraer una bolita, anotar su número y devolverla a la tómbola".
 - ¿Cómo determinarías la probabilidad de que al realizar el experimento dos veces se obtenga la misma bolita?
 - ¿Cómo determinarías la probabilidad de que al realizar 3 veces el experimento se obtengan 3 bolitas distintas numeradas con números impares?
- De un juego de naipes inglés se extrae al azar una carta.
 - ¿Cuál es la probabilidad de extraer una carta con un número par?
 - ¿Cuál es la probabilidad de extraer un as?
- Se lanzan 2 dados de seis caras.
 - ¿Cuál es la probabilidad de que la diferencia, en valor absoluto, de los puntos obtenidos sea menor que 6?
 - ¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma mayor que 12?

Reflexiono

- Si se suman las probabilidades de todos los eventos de un experimento, ¿qué valor se obtiene?

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener 6 como producto?
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener 1 como cociente?

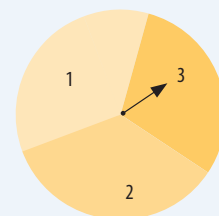
- En un colegio hay 8 primeros medios, de los cuales, 4 están compuestos por 38 estudiantes, 2 por 41 estudiantes y el resto de los cursos tiene 45 estudiantes cada uno. Si la probabilidad de escoger al azar a una alumna es $\frac{5}{9}$, ¿qué cantidad de alumnas y alumnos hay en el colegio?
- En una tómbola se tienen 36 bolitas numeradas del 1 al 36. Si se extrae aleatoriamente una bolita.
 - ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par?
 - Con respecto a la probabilidad obtenida en la pregunta anterior, ¿es igual a la probabilidad de extraer una bolita con un número impar?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una bolita esta esté numerada con un múltiplo de 3?
 - ¿Qué evento tiene una mayor probabilidad de ocurrir? Justifica.

6. Describe el procedimiento. Para calcular las probabilidades pedidas a partir de la siguiente situación:

"Una ruleta numerada del 1 al 20 y seccionada en partes iguales se hace girar hasta que pare en un número."

- ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga un número par? ¿Y un número impar?
- ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga un número primo o compuesto?
- ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga un múltiplo de 3?

- Descubre el error.** La probabilidad de que salga el número 3 al hacer girar la ruleta de la imagen es $\frac{1}{3}$. ¿Cuál es el error de la afirmación anterior?



Refuerzo

- ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir al azar un número de 5 dígitos, este quede formado solo por cifras impares?

Palabras clave

- ➔ Probabilidad experimental
- ➔ Frecuencia relativa.

Repasa

La **frecuencia relativa**, se calcula dividiendo la frecuencia absoluta por la cantidad total de datos, es decir, $f_r = \frac{f}{n}$ tanto para una tabla de datos no agrupados como para una tabla con datos agrupados. Por ejemplo

Cantidad de hermanos		
Nº hnos	f	f_r
[2, 5[	5	$5/10 = 0,5$
[5, 8[	3	$3/10 = 0,3$
[8, 11[	2	$2/10 = 0,2$
Total	10	

¿Cómo calcular la probabilidad experimental?

- Es posible que más de alguna vez tu mamá haya dicho: "es probable que hoy nos visite tu tía". ¿Se podrá calcular realmente la probabilidad de que hoy te visite tu tía? ¿Cómo?

Vicente y Nicol discuten sobre la probabilidad de ganar en dos juegos. Nicol dice que es más probable que al lanzar un dado aparezca el número 3, mientras que Vicente insiste que es más probable obtener cara al lanzar una moneda.

Para determinar quién tiene la razón, deciden realizar los experimentos aleatorios en 500 ocasiones y registrar los resultados como muestran las siguientes tablas.



Dado	Frecuencia absoluta
1	90
2	81
3	84
4	96
5	80
6	69

Moneda	Frecuencia absoluta
Cara	263
Sello	237

Luego calcularon la probabilidad experimental de cada evento realizando los siguientes pasos:

Paso 1 Definir los eventos de cada experimento aleatorio.

Experimento aleatorio 1: lanzar un dado de seis caras y anotar el número.

Evento A: lanzar el dado y que aparezca el número 3.

Experimento aleatorio 2: lanzar una moneda y anotar el resultado.

Evento B: lanzar la moneda y obtener cara.

Paso 2 Calcular la frecuencia relativa en ambos experimentos.

Dado	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
1	90	18%
2	81	16,2%
3	84	16,8%
4	96	19,2%
5	80	16%
6	69	13,8%
Total	500	100%

Dado	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Cara	263	52,6%
Sello	237	47,4%
Total	500	100%

En resumen

La **probabilidad experimental** (o empírica) de un evento A, se calcula mediante el cociente entre la cantidad de veces que ocurre el evento y la cantidad de veces que se realiza el experimento, es decir, la frecuencia relativa:

$$P(A) = \frac{\text{Nº de veces que ocurre el evento A}}{\text{Nº de veces que se realiza el experimento}}$$

Paso 3 Comparar las frecuencias relativas obtenidas para cada resultado.

La frecuencia relativa de lanzar un dado y obtener 3 es, aproximadamente, 16,8%, es decir, la probabilidad experimental es de 0,168. Por otro lado, la frecuencia relativa de lanzar la moneda y obtener cara es, aproximadamente, 52,6% que corresponde a una probabilidad experimental de 0,526.

Por lo tanto, la probabilidad de lanzar esa moneda y que salga cara es mayor que la probabilidad de lanzar ese dado y obtener 3. Vicente tenía razón.

Taller

Reúnanse en grupos de 3 integrantes y realicen la siguiente actividad.

Vicente y Nicol averiguan que la probabilidad teórica de obtener un 3 al lanzar un dado es igual a $\frac{1}{6}$ y se preguntaron: ¿cuál es la relación entre la probabilidad experimental y la probabilidad teórica de dicho experimento? Para responder a la pregunta repitieron el experimento 100, 500, 700 y 1000 veces, registrando los resultados que aparecen en la siguiente tabla.

Numero del dado	Números de lanzamientos			
1	17	94	118	163
2	13	85	107	191
3	22	89	123	155
4	15	77	118	153
5	23	73	112	176
6	10	82	122	162
total	100	500	700	1000

1. Calculen la probabilidad experimental de obtener el número 3 en cada iteración y completen la tabla.

	Número de lanzamientos			
	100	500	700	1000
Probabilidad experimental o frecuencia relativa				

2. Confeccionen un gráfico con los resultados obtenidos en la pregunta anterior.
3. ¿A qué valor tiende la probabilidad si se aumenta la cantidad de repeticiones del experimento?
4. Si comparan el valor encontrado en la pregunta anterior con la probabilidad teórica, ¿qué sucede? ¿Qué pueden concluir?

Razona

y comenta

- Con el experimento realizado por Nicol, ¿puedes asegurar que la probabilidad de obtener cara al lanzar una moneda cualquiera es de 0,526?
- Después de observar los experimentos anteriores, ¿cuál es la diferencia entre la probabilidad experimental y la probabilidad teórica?

En resumen

En un experimento aleatorio, la frecuencia relativa de un evento A se aproxima a la probabilidad teórica del evento a medida que la cantidad de experimentos aumenta, esto se conoce como la **Ley de los Grandes Números**.

Repaso

1. **Calcula** la frecuencia relativa de cada conjunto de datos.

a)

Distribución de estudiantes según edad	
Edad	Cantidad de estudiantes
[13,1; 14[	25
[14,1; 15[	50
[15,1; 16[	31
[16,1; 17[	29

b)

Recién nacidos según su estatura al mes de vida	
Estatura(cm)	Cantidad de recién nacidos
[40; 43[	6
[43; 46[	10
[46; 49[	18
[49; 52[	40
[52; 55[	36

Práctica guiada

2. **Evalúa** si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F) a partir de la siguiente situación.

Se realiza un estudio sobre la cantidad de mascotas que tienen los alumnos de un colegio, y al recolectar los datos se obtiene la siguiente tabla.

Numero de mascotas	Frecuencia absoluta
0	350
1	200
2	125
3	50
4	175
5	100

- a) ____ La probabilidad de escoger un niño con una mascota es mayor que la probabilidad de escoger a uno con 5 mascotas.
- b) ____ La probabilidad de escoger un niño con ninguna mascota es mayor que la probabilidad de escoger a uno con 2 o más mascotas.
- c) ____ La probabilidad de escoger un niño con 3 mascotas es igual a la probabilidad de escoger a uno con 4 mascotas menos la probabilidad de escoger a uno con 2 mascotas.
- d) ____ La probabilidad de escoger un niño con algún tipo de mascota aumenta a medida que la cantidad de mascotas aumenta.

3. **Mediante** una planilla de cálculo realiza una simulación del lanzamiento de tres monedas para calcular la probabilidad experimental o empírica de obtener exactamente 3 caras.

Paso 1: Escribe en las celdas A1, B1 y C1, moneda 1, moneda 2 y moneda 3 respectivamente.

Paso2: Genera la simulación del lanzamiento de una moneda escribiendo en la celda A2 la función =ALEATORIO.ENTRE(0;1), esta función generará de manera aleatoria, el número 0 o el número 1. Considera como 0 = sello y 1 = cara. Luego, copia esta función en las celdas B2 y C2.

Paso 3: Escribe en la celda D2 la función =SUMA(A2:C2), la cual permitirá sumar la cantidad de ocasiones en que la suma de las caras de las monedas es 3.

Paso 4: Escribe en la celda E3 la función =CONTAR.SI(D:D;3), la cual permitirá contar los lanzamientos en que aparezcan las tres caras o los tres valores de 1, cuya suma sea 3.

Paso 5: Genera 100 lanzamiento de las monedas, copiando las celdas A2, B2, C2 y D2 hasta las celdas A102, B102, C102 y D102. De esta manera obtendrás la simulación para 100 lanzamientos

4. **Aplica** los pasos anteriores, realiza las siguientes actividades y luego responde.

- a) Haz una simulación para 100 lanzamientos de tres monedas. ¿Cuál es la probabilidad experimental para el evento "obtener tres caras"?
- b) Haz una simulación para 500 lanzamientos de tres monedas. ¿Cuál es la probabilidad experimental para el evento "obtener tres caras"?
- c) Haz una simulación para 1000 lanzamientos de tres monedas. ¿Cuál es la probabilidad experimental para el evento "obtener tres caras"?
- d) A medida que aumentas los lanzamiento, ¿a qué valor piensas que se acercará la probabilidad experimental? Corroborar tus conclusiones realizando una simulación para 2000, 3000, 5000 y 9000 simulaciones.

Aplico

5. Analiza las siguientes situaciones y responde.

- a) Isabel vende calzado de mujer en una tienda, y le encargan que realice un sorteo entre sus clientas. El premio debe ser proporcional a la probabilidad de escoger una clienta que compre alguna de las marcas de calzado que se vende en la tienda. Isabel registra en una tabla la cantidad de calzado según la marca que se ha vendido en los últimos meses, como se muestra a continuación:

Marca del calzado	Ventas
Juvenil	200
Infantil	1080
Coqueta y regalona	252
Tigresa del oriente	468

La dueña de la tienda dispone de \$500 000 para premiar a sus clientas.

- Si se escoge al azar una clienta, ¿a cuál marca de zapatos es más probable que se incline su preferencia? ¿Cuál es esa probabilidad?
 - ¿Qué cantidad de dinero debería destinarse para las compradoras de cada una de las marcas de calzado?
- b) Para el aniversario del colegio de Carlos se han preparado diversas actividades, una de ellas consiste en escoger al azar alumnos de educación media para la competencia de trivia. Los cursos participantes tienen la siguiente distribución respecto al área de interés.

Curso	Área de interés				
	Música	Ciencia	Arte	Literatura	Tv
1.º	20	50	60	20	200
2.º	140	20	30	10	70
3.º	100	40	50	60	100
4.º	100	70	30	100	10

- Si se escoge al azar a un alumno de cualquiera de los cursos, ¿cuál es la probabilidad que sea de primero medio?

Reflexiono

- ¿En todos los experimentos aleatorios es posible calcular la probabilidad teórica? ¿Por qué?
- ¿En qué experimento aleatorio solo es posible obtener la probabilidad a partir de la experimental? Da un ejemplo.

- Si se escoge al azar a un alumno de cualquiera de los cursos, ¿cuál es la probabilidad que sea del tercero medio y prefiera Ciencia?
- Si la trivia se centra en temas musicales, ¿qué curso es el que tendría mayor probabilidad de ganar? Justifica.

- c) En un supermercado se realizan diversas compras tanto en efectivo como tarjetas de crédito. El gerente pretende hacer un estudio acerca de la cantidad de personas que realizan compras en efectivo y de las que lo hacen con tarjetas de crédito en las seis cajas del supermercado, pero se le perdieron algunos datos tal como se indica en la tabla.

Caja	1	2	3	4	5	6
Efectivo	b	c	56	17	101	12
Tarjeta	200	500	550	a	750	1000

- Si la probabilidad de escoger al azar a una persona que pague en la caja 4 con tarjeta es, aproximadamente, 0,236, ¿cuál es el valor de **a**?
 - Si la probabilidad de escoger a una persona que pague en efectivo en las cajas 1 o 2 es de aproximadamente 0,2, ¿cuáles pueden ser los valores de **b** y **c**?
6. **Conecta.** El gran colisionador de partículas que se encuentra ubicado en Suiza y Francia, experimenta con partículas atómicas y sub atómicas. Los experimentos consisten en realizar miles de colisiones entre ellas para estudiar la creación de otras partículas. Los datos recolectados permiten crear tablas de frecuencia con las que los científicos pueden sacar conclusiones sobre la naturaleza de los choques. Explica la relación de este tipo de experimentos y la probabilidad experimental.
7. **Desafío.** Explica de qué manera puedes demostrar que un dado o una moneda está "cargada" es decir, que existe una cara del dado que tiene mayor probabilidad de salir o una moneda que tiene un lado más probable de salir.

Refuerzo

En la tabla se muestra la cantidad de personas que toman 5 bebidas diferentes.

Bebida	A	B	C	D	E
Frecuencia	100	230	120	230	120

Si se escoge a una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que beba de la marca A? ¿Y la B? ¿Y la C?

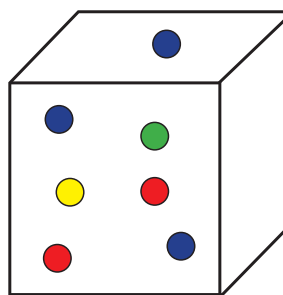


Determinar la cardinalidad de un espacio muestral utilizando técnicas combinatorias. (Lecciones 46 a 48)

1 Resuelve los siguientes problemas.

- Rony y Camila piden una copa de helado que puede tener los siguientes ingredientes; crema, fruta, salsa de chocolate, helado de frambuesa, merengue y trozos de chocolate. Si además pueden elegir entre tres tipos de copas: grande, mediana y chica, entonces
 - ¿De cuántas formas pueden elegir la copa?
 - Si Camila es alérgica al chocolate, entonces ¿de cuántas formas distintas pueden ordenar la copa?
 - Dibuja un diagrama de árbol que represente la situación anterior.
- Marta y Carlos están organizando un concurso de baile en el colegio. Una de las pruebas consiste en escoger al azar una pareja de baile por parte de los hombres. Si participan 10 mujeres y 11 hombres, ¿cuántas parejas distintas de baile se pueden formar?
- Los corredores de 100 metros planos de una competencia tienen la opción de obtener la medalla de oro, plata y bronce. Si participan 10 atletas, ¿de cuántas formas se pueden repartir las medallas?
- Patricia junto a su hermano Pedro discuten sobre la cantidad de ordenamientos distintos que se pueden hacer con 10 bolitas. Patricia afirma que existen más ordenamientos diferentes si todas las bolitas son distintas, mientras que Pedro indica que si existe al menos un elemento repetido existirán más ordenamientos distintos. ¿Quién tiene la razón? ¿Cómo lo averiguaste?
- ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 4 premios al azar, dentro de un curso de 20 alumnos, considerando que los premios son iguales?
- Un alumno escoge al azar 15 preguntas de una prueba de 20. ¿De cuántas maneras puede elegir-las? ¿Y si las primeras 7 preguntas son obligatorias?
- ¿Cuántos resultados posibles existen al arrojar 100 monedas?

- Seis amigos quieren viajar a la universidad en un auto con capacidad para 4 pasajeros, incluyendo el conductor. Si escogen al azar a los que se irán en el auto, ¿de cuántas formas pueden viajar los amigos?
- Rodrigo participa en un juego que consiste en adivinar el orden de extracción de 7 bolitas desde una urna que contiene 7 bolitas con los siguientes colores.



- ¿Cuántas extracciones distintas existen?
 - Si Rodrigo dice que la primera bolita será de color rojo, ¿cuántas extracciones distintas existen para que Rodrigo gane?
 - Si Rodrigo dice que las dos primeras bolitas son de color azul, ¿cuántas extracciones distintas existen para que Rodrigo gane?
 - Si Rodrigo dice que las últimas tres bolitas son azules, ¿cuántas extracciones existen para que Rodrigo gane?
- En el cumpleaños de Manuel lo visitaron sus abuelos, su tío, su sobrino, su hermana y sus padres. Manuel quiere sentarlos en fila frente a una gran mesa para cantar el cumpleaños feliz:
 - ¿De cuántas maneras se pueden sentar los invitados, si el abuelo debe estar sentado justo al medio de la mesa?
 - Si la abuela debe estar sentada al lado izquierdo del abuelo, ¿de cuántas maneras se pueden sentar los invitados?
 - Si la abuela debe estar sentada al lado, no importa si izquierda o derecha, del abuelo, ¿de cuántas maneras se pueden sentar?

Relacionar la media de una población y el promedio de cada uno de los promedios de muestras de igual tamaño extraídas de la población. (Lecciones 48)

2 Resuelve los siguientes problemas

- ¿Cuántas muestras de tamaño 2 se pueden extraer desde una población de 5 elementos, sin reposición? ¿Y con reposición?
- Se extraen 5 muestras de tamaño 3 desde una población de tamaño 10. ¿En cuál de las siguientes situaciones el promedio de las muestras se encontraría más cercana a la media de la población? Justifica tu respuesta.
 - Las muestras son de la estatura de los integrantes de un equipo de básquetbol de 10 estudiantes.
 - Las muestras son de la estatura de 10 personas que caminan por la calle.

3 Evalúa las siguientes proposiciones y escribe V si son verdaderas o F si son falsas. Justifica.

- El promedio de los datos de una población es igual a los promedios de las medias de todas las muestras de mismo tamaño.
- En el tamaño de la muestra influye el tamaño de la población.
- La cantidad de muestras del mismo tamaño, extraídas de la población es mayor si la extracción es con reposición respecto a las extracciones sin reposición.
- El promedio de una muestra es siempre igual al promedio de la población.

4 Evalúa si las siguientes proposiciones son verdaderas V o falsas F a partir de la siguiente información:

Las medias muestrales de 5 muestras de una población de tamaño n y media poblacional x son las siguientes:

6,5 6,2 4,1 7,0 2,3

- Existe una muestra a de promedio $\bar{a}$ tal que: $\frac{6,5 + 6,2 + 4,1 + 7,0 + 2,3}{5} + \bar{a} = x$.
- La media poblacional se calcula como $\frac{6,5 + 6,2 + 4,1 + 7,0 + 2,3}{5} = x$.

- Al calcular el promedio de las medias muestrales se obtiene que

$$\frac{6,5 + 6,2 + 4,1 + 7,0 + 2,3}{5} > x$$

- Siempre se cumple que $6,5 < nx$.

Resolver problemas que involucren el cálculo de probabilidad a partir de la frecuencia relativa o Laplace. (Lecciones 49 y 50)

5 Resuelve los siguientes problemas.

- Carmen y Josefina participan junto a 8 competidoras en una carrera de 100 metros planos. Si se premian a los 3 primeros lugares y todas tienen las mismas posibilidades de ganar;
 - ¿cuál es la probabilidad de que Carmen llegue en primer lugar?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que Josefina llegue en primer lugar y Carmen en segundo?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las dos llegue entre los tres primeros lugares?
- Se realiza una encuesta acerca de la empleabilidad de los alumnos y sus padres. Los resultados se resumen en la tabla. Si se escoge a un alumno al azar:

	Trabajan	No trabajan
Alumnos	24	589
Padres	740	12

- ¿Cuál es la probabilidad de que sus padres no trabajen?
- ¿Cuál es la probabilidad de que ni sus padres ni el alumno trabaje?
- Si las frecuencias relativas fueron obtenidas de muestras representativas de la población, ¿cuál es la cantidad aproximada de alumnos que trabaja si la población es de 2500 estudiantes?

6 Evalúa si las proposiciones son verdaderas V o falsas F.

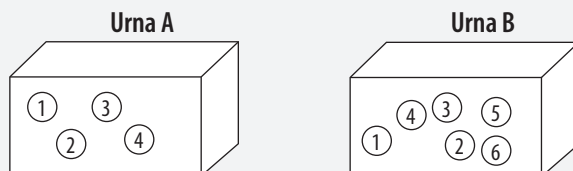
- La probabilidad experimental permite determinar exactamente la probabilidad teórica en experimentos aleatorios.
- En un experimento, la probabilidad experimental de un suceso, no puede superar en ningún ensayo a la probabilidad teórica de dicho suceso.

Revisa tus respuestas en el solucionario al final del texto.



Problema

Carmen participa en un juego que consiste en adivinar la urna que escogerá una persona de las que aparecen a continuación.



Luego debe adivinar el orden de extracción que realiza la misma persona de dos bolitas sin reposición de la urna elegida.

Ella gana si adivina ambas cosas. ¿Cuántas posibilidades de elección tiene Carmen?

Paso 1 Comprendo ¿Qué entendiste del problema?

- Se debe escoger al azar una urna.
- Luego, se debe extraer de esa urna dos bolitas sin reposición.

Paso 2 Planifico ¿Qué harías para resolver el problema?

- Calcular la cantidad de extracciones que se pueden realizar de 2 bolitas sin reposición en cada urna.
- Luego, sumar ambos resultados.

Paso 3 Resuelvo ¿Cómo ejecutarías la estrategia?



El matemático suizo **Jacob Bernoulli** (1654 - 1705) realizó diversos aportes al estudio de la probabilidad, uno de sus aportes está relacionado con el número combinatorio expresado como $\binom{n}{r}$, el cuál conocemos como la combinación de r elementos desde un conjunto de n elementos distintos. Este aporte permitió realizar grandes cálculos de manera que el cálculo de probabilidades se vio reducido.

Urna A	Urna B
La cantidad de posibles extracciones de 2 bolitas sin reposición se obtiene calculando una variación de 2 elementos de un conjunto de 4 elementos, es decir:	La cantidad de posibles extracciones de 2 bolitas sin reposición se obtiene calculando una variación de 2 elementos de un conjunto de 6 elementos, es decir:
$V_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{2} \cdot 1} = 12$	$V_2^6 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 30$

Ahora se suman las variaciones y se obtiene:

$$V_2^4 + V_2^6 = 12 + 30 = 42$$

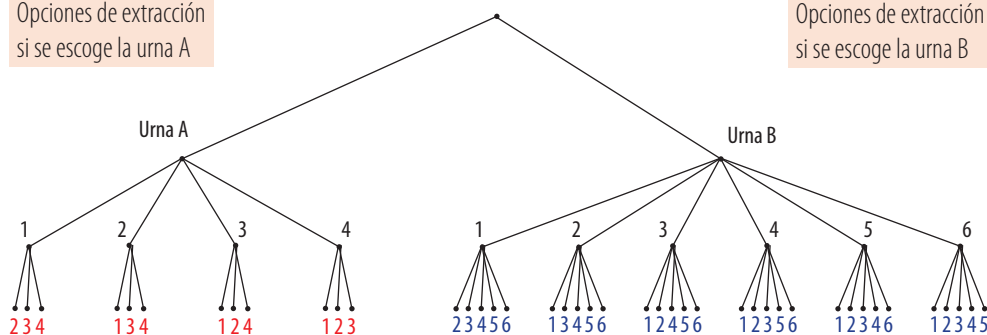
Es decir, Carmen tiene 42 posibilidades para escoger.

Paso 4 Reviso ¿Cómo saber que es correcto el resultado?

Para comprobar el resultado se puede utilizar un diagrama de árbol.

Opciones de extracción
si se escoge la urna A

Opciones de extracción
si se escoge la urna B



Al sumar la cantidad de opciones de extracción si se escoge la urna A o la urna B se tiene: $12 + 30 = 42$

Paso 5 Comunico ¿Cómo interpretas el resultado obtenido?

Si Carmen participa en el juego, tiene 42 opciones para escoger el orden de extracción de las bolitas al escoger una urna al azar.

Resuelve los siguientes problemas.

- Andrés y su hermana deben realizar una función de títeres en su casa, Andrés invita a los 10 niños de un jardín y la hermana de Andrés invita a un grupo scout compuesto de 15 niños. En un momento de la función tienen que participar 3 niños del jardín para ocupar el puesto del rey, cazador y panadero, respectivamente y 4 niños scout, para tomar, en ese orden, el papel de jinete, herrero, mercante y cocinero.
 - ¿De cuántas formas se pueden escoger los integrantes del jardín? ¿Y del grupo de los scout?
- ¿De cuántas formas puede escogerse un comité para que quede compuesto de 5 hombres y 7 mujeres, de un grupo de 20 hombres y 30 mujeres?
- 15 personas pueden repartirse en 5 equipos. ¿De cuántas formas lo pueden hacer si cada grupo debe tener la misma cantidad de integrantes?
- Los experimentos aleatorios se pueden realizar con o sin reposición. Por ejemplo, en una tómbola hay bolitas numeradas del 1 hasta el 15. Es posible realizar el experimento: "extraer una bolita, anotar su número y devolverla a la tómbola".
 - ¿Cuál es la cardinalidad del espacio muestral de este experimento?
 - ¿Cómo determinarías la probabilidad de obtener 3 bolitas distintas numeradas con números impares al repetir tres veces el mismo experimento?

Reflexiona

- ¿Qué estrategia habrías utilizado para resolver el problema?
- ¿De qué otra forma se podría haber comprobado que la solución era correcta?
- ¿Estás de acuerdo con la interpretación del resultado? ¿Por qué?



Interpretación de medidas de posición

Andrea y Javier están analizando la siguiente tabla que resume las estaturas del curso al cual pertenecen. Ambos calcularon e interpretaron el P_{50} de los datos. ¿Cuál de ellos realizó un procedimiento correcto e interpretó correctamente el resultado? Compara paso a paso los procedimientos.

Estatura(m)	Frecuencia	Frecuencia acumulada
[1,36;1,45[	2	2
[1,45;1,54[	4	6
[1,54;1,63[	6	12
[1,63;1,72[	7	19
[1,72;1,81]	5	24

Toma nota

- No olvides algunas equivalencias entre percentiles, quintiles y cuartiles. Ejemplos:

$$Q_1 = P_{25}$$

$$P_{50} = M_e$$

$$P_{50} = D_5$$

Andrea	Javier
Paso 1 ➔ Obtener la mitad de los datos a partir de la expresión $\frac{n}{2}$. Luego $\frac{n}{2} = \frac{24}{2} = 12$.	Paso 1 ➔ Obtener el 50% del total de datos. $\frac{50 \cdot 24}{100} = \frac{1200}{100} = 12$
Paso 2 ➔ Calcular el M_e reemplazando en la fórmula. $M_e = 1,54 + 0,09 \cdot \frac{12-6}{6} = 1,63.$	Paso 2 ➔ Calcular el P_{50} reemplazando en la fórmula. $P_{50} = 1,54 + 0,09 \cdot \frac{12-6}{6} = 1,63.$
Paso 3 ➔ Interpretar el resultado. La mitad de los estudiantes de primero medio mide hasta 1,63 m de estatura.	Paso 3 ➔ Interpretar el resultado. La mitad de los estudiantes de primero medio mide 1,63 m de estatura.

Razona

y comenta

- ¿Qué procedimiento es correcto? ¿Por qué?
- ¿Qué interpretación es correcta? ¿Por qué?
- ¿Cómo influye en el resultado el error cometido?

1 Analiza cuál de los siguientes procedimientos es el correcto y en el caso incorrecto explica el error.

La tabla muestra el tiempo que deben esperar las personas para ser atendidas por telefonía móvil. ¿Cómo se interpreta P_{75} de los datos?

Tiempo (seg)	Frecuencia	Frecuencia acumulada
[3; 7[	18	18
[7; 11[	32	50
[11; 15]	10	60

Paulina	Juan
Paso 1 ➔ Obtener el 75% del total de datos. $\frac{75 \cdot 60}{100} = \frac{4500}{100} = 45$	Paso 1 ➔ Obtener el 75% del total de datos. $\frac{75 \cdot 60}{100} = \frac{4500}{100} = 45$

Paso 2 Calcular el P_{75} reemplazando en la fórmula. $P_{75} = 7 + 4 \cdot \frac{45-18}{32} = 10,4$	Paso 2 Calcular el P_{75} reemplazando en la fórmula. $P_{75} = 7 + 4 \cdot \frac{45-18}{32} = 10,4$
Paso 3 Interpretar el resultado. El 25% de las personas esperaron 10,4 segundos.	Paso 3 Interpretar el resultado. El 75% de las personas esperaron hasta 10,4 segundos.

Obtención de la cardinalidad de espacios muestrales

Desde una urna que contiene 4 bolitas rojas, 3 azules y 5 verdes, se extraen 4 bolitas, sin reposición. ¿Cuál de los siguientes procedimientos para calcular la cantidad de casos posibles fue realizado correctamente? Compara paso a paso los procedimientos.

Caso 1

$$\frac{12!}{(12-4)! \cdot 4!} = \frac{12!}{8! \cdot 4!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{8! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 495$$

Caso 2

$$\frac{12!}{(12-4)!} = \frac{12!}{8!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{8!} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1} = 2970$$

Razona

y comenta

- ¿Cuál procedimiento es correcto? ¿Por qué?
- En el procedimiento equivocado, ¿cuál es el paso que tiene error? ¿Por qué?
- ¿Cómo influye en el resultado el error cometido en el procedimiento?

2 Analiza cuál de los siguientes procedimientos es el correcto y del incorrecto explica el error.

Desde una urna que contiene 4 bolitas, numeradas del 1 al 4, se extraen tres bolitas. ¿Cuál es la cardinalidad del espacio muestral si...

a) ...las extracciones son sin reposición?

Caso 1

$$\frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1} = 24$$

Caso 2

$$\frac{4!}{(4-3)! \cdot 3!} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$$

b) ...las extracciones son con reposición?

Caso 1

$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$$

Caso 2

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

3 Resuelve las siguientes situaciones.

- En un estante de una biblioteca hay 10 libros de álgebra, 20 de geometría y 4 de física. ¿De cuántas maneras se podrán ordenar en fila?
- Si se sacan 5 libros al azar del estante del problema a, ¿de cuántas maneras se pueden extraer sin reposición? ¿Y si es con reposición?

Toma nota

- En este tipo de ejercicio es fundamental que reconozcas el tipo de técnica combinatoria que debes utilizar.
- Debes reducir al máximo los números que están expresados mediante el factorial, para posteriormente multiplicar o dividir.

Reflexiona

- ¿Cuál es el error que cometes con frecuencia al resolver este tipo de ejercicios?
- ¿Coinciden con los mostrados en esta página?
- ¿Qué harás cuando te enfrentes a ejercicios de este tipo para evitar errores?



Recién nacidos

En el año 2012 la cantidad de recién nacidos alcanzó la cifra de 225 225 en todo el territorio nacional, de los cuales, el 14,4% nació con bajo peso. La cantidad de recién nacidos ha disminuido desde 2009 al 2012, sin embargo, el porcentaje de recién nacidos con bajo peso se ha mantenido. Aún queda mucho para alcanzar las cifras de nacimientos con bajo peso como las que se producen en Suecia (4%), Dinamarca (6%), EEUU (8%) o Japón (10%). Pese a lo anterior, mucho se ha avanzado desde que se comenzaron a realizar estudios estadísticos en Chile, los avances en la medicina, cobertura, higiene y otros múltiples factores permiten hoy considerar la posibilidad de seguir disminuyendo esta cifra.



La tabla muestra la cantidad de recién nacidos el año 2012 con bajo peso distribuidos según la región de procedencia.

Para saber más...

Algunos bebés nacidos con bajo peso pueden sufrir de insuficiente cantidad de azúcar en la sangre (hipoglicemia) que puede causar daños cerebrales, su hígado puede tardar en comenzar a funcionar, anemia, o baja grasa para mantener la temperatura normal del cuerpo.

Región	Recién nacidos	Porcentaje con bajo peso
Arica y Parinacota	3448	17,5
Tarapacá	5509	11,2
Antofagasta	9902	12,4
Atacama	4853	16,2
Coquimbo	9848	14,2
Valparaíso	21 855	5,93
Metropolitana de Santiago	98 355	6,14
Libertador B. O'Higgins	9976	14,7
Maule	10 827	14,8
Bíobío	24 321	14,9
La Araucanía	9748	16,4
Los Ríos	3852	19,3
Los Lagos	9212	19,3
Aisén del Gral. Carlos Ibáñez del Campo	1412	19,4
Magallanes y de La Antártica Chilena	2107	19,3

Reflexiona

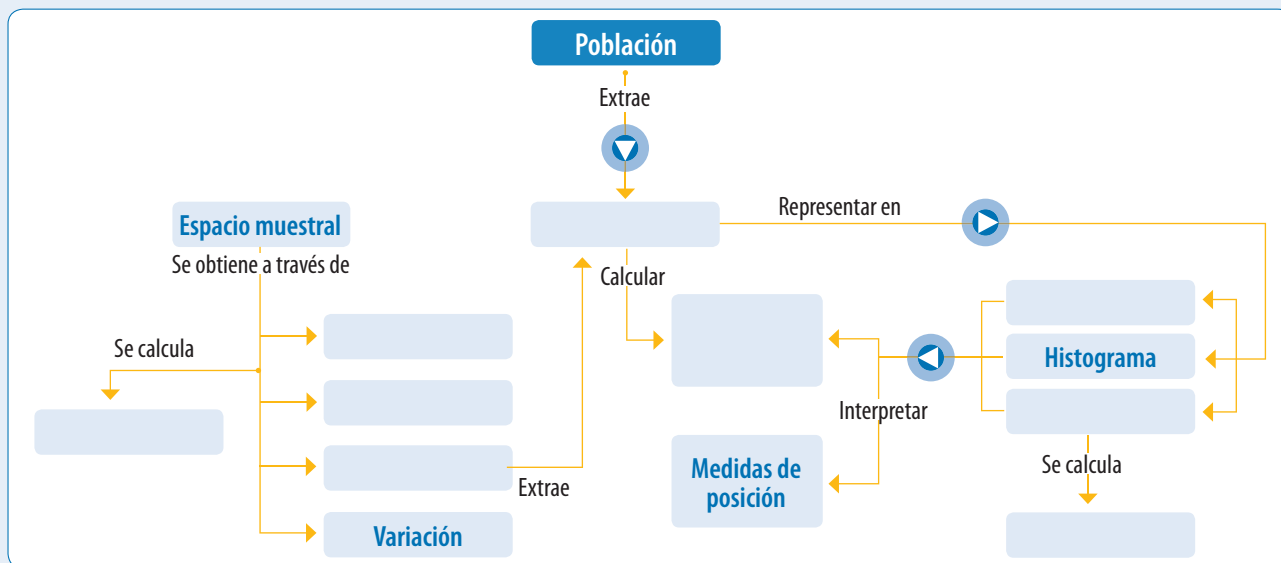
- Según los gráficos mostrados en el inicio de la unidad, ¿qué peso se considera normal para niños y niñas?
- ¿Con los datos de la tabla puedes llegar a alguna conclusión acerca de los recién nacidos en el país? ¿Qué datos piensas que necesitarías para poder establecer una conclusión más certera según tu criterio?
- Averigua cuáles son las causas que provocan bajo peso en los recién nacidos.



¿Cómo se llama?

- **Organiza** las siguientes palabras en el mapa conceptual.

Polígono de frecuencias – Combinación – Probabilidad teórica – Probabilidad experimental – Tabla de frecuencias de datos agrupados – Permutación – Muestra – Medidas de tendencia central – Principio multiplicativo



¿Cómo se hace?

- Para **calcular** un percentil puedes utilizar la siguiente fórmula:

$$P_k = l_i + a_i \cdot \frac{\frac{k \cdot n}{100} - F_{i-1}}{f_i}$$

Ejemplo: Calcular el percentil 80 de los datos representados en la tabla.

Cantidad de discos vendidos en 7 días		
N° de discos	N° de ventas (f _i)	F _i
[1, 6[	2	2
[6, 11[	3	5
[11, 16[	1	6
[16, 21]	1	7

$$P_{80} = 11 + 5 \cdot \frac{\frac{80 \cdot 7}{100} - 5}{1} = 11 + 5 \cdot \frac{3}{5} = 11 + 3 = 14$$

Luego, el P_{80} es 14.

- Para **calcular** una permutación de **n** objetos puedes utilizar la expresión $n!$.

Ejemplo: Calcular la cantidad de palabras con y sin sentido que se pueden formar con las letras de la palabra LEO.

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Ahora refuerza

- **Calcula** el P_{30} , P_{50} y el P_{90} de los datos representados en la tabla del ejemplo.
- **Resuelve** los siguientes problemas.
 - ¿Cuántas palabras con y sin sentido se pueden formar a partir de la palabra CAMINAR?
 - Camila participa en un juego que consiste en adivinar el orden de extracción de 7 bolitas desde una urna. ¿Cuántas extracciones distintas existen?
 - Se tienen 8 libros distintos. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar en una repisa?

Tips para estudiar

- Para calcular la mediana y la moda en tablas de datos agrupados debes identificar previamente el intervalo de la mediana y el intervalo modal respectivamente.
- Para interpretar medidas de posición puedes utilizar un diagrama de caja.
- Para calcular probabilidades teóricas puedes utilizar la regla de Laplace y para calcular probabilidades experimentales puedes utilizar la frecuencia relativa.

Reflexiona

- ¿Estás de acuerdo con los conceptos que se eligieron para construir el mapa conceptual? ¿Por qué?
- ¿Cuáles habrías descartado y cuáles agregado? Compara con un compañero(a) los principales conceptos elegidos.



Interpretar información a partir de gráficos y tablas, mediante el uso de medidas de posición y de tendencia central. (Lecciones 39 a 45)

Un **histograma** es una representación gráfica de una variable continua o discreta que está agrupada en intervalos.

La **media aritmética** de un conjunto de datos es el valor medio que los representa. La media aritmética o promedio en tablas de datos agrupados se calcula como:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i \cdot x_i}{n}$$

Donde f_i es la frecuencia absoluta del intervalo i ; x_i la marca de clase del intervalo i ; i es el i -ésimo intervalo y n la cantidad total de datos de la tabla.

La **mediana** de un conjunto de datos es el valor que los separa en dos grupos de igual cantidad.

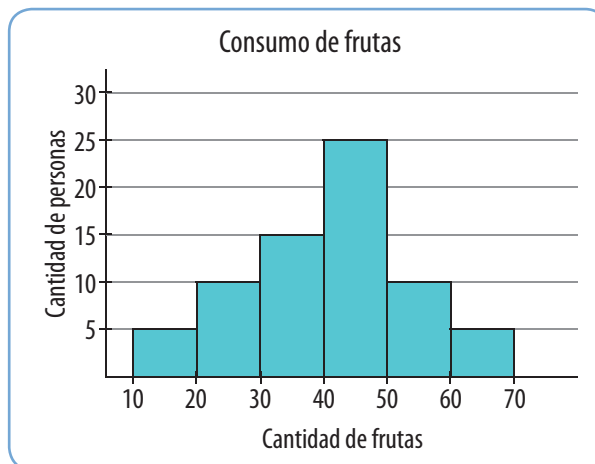
La **moda** de un conjunto de datos es el valor que más se repite.

Una **tabla de frecuencias** es una tabla que contiene el resumen de un conjunto de datos.

Si un conjunto de datos se divide en 100 partes iguales, cada una engloba el 1% de las observaciones. Esto se conoce como **percentil**. Si un conjunto de datos se divide en 4 partes iguales, cada una engloba el 25% de las observaciones y divide el conjunto de datos en tres **cuartiles**.

1 Analiza la información del gráfico y responde.

El siguiente gráfico muestra el consumo de frutas de un grupo de personas durante tres meses.



- ¿Cuál es el porcentaje de personas que come entre 20 y 50 frutas?
- ¿Cuántas personas comen menos de 30 frutas?
- ¿Qué porcentaje representa la cantidad anterior?

2 Compara las siguientes medidas de tendencia central y responde.

- Se realizó la misma encuesta con las siguientes medidas de tendencia central, $\bar{x} = 35$, $M_o = 30$, $M_e = 40$, a un grupo distinto al del gráfico anterior. Si la cantidad de encuestados en el segundo grupo es igual al del gráfico anterior, ¿cuál de los dos grupos consume más fruta? ¿Qué conclusiones puedes obtener a partir del análisis de estos datos?

3 Analiza la siguiente información y responde.

La siguiente tabla indica el atraso en minutos de tres compañías de taxis.

Minutos	A	B	C
[0, 5[	12	1	12
[5, 10[	2	3	2
[10, 15[	3	28	3
[15, 20]	1	0	10

- Calcula los cuartiles de las tres compañías.
- ¿Cuál compañía tiene mayor rango intercuartil? ¿Cómo interpretas esto?

El **principio multiplicativo** indica que la realización de un proceso que se divide en k etapas y cada etapa se puede realizar de $n_1, n_2, \dots, n_k$ formas, entonces para realizar todo el proceso se hace de $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ formas.

La **permutación** de r elementos desde n distintos se conoce como variación, y se calcula con la expresión:

$$V_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

La **combinación** de r elementos de un total de n elementos, se calcula mediante la expresión:

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

Donde n y r son números enteros positivos y $n > r$.

El **promedio** de todas las muestras de tamaño n desde una población se aproxima al promedio de la población.

La **probabilidad experimental** de un evento A , corresponde al cociente entre la cantidad de veces que ocurre el evento y la cantidad de veces que se realiza el experimento.

La **probabilidad teórica** de un evento A se puede calcular utilizando la regla de Laplace, mediante la expresión:

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}}$$

4 Representa los siguientes datos en una tabla de frecuencia según las indicaciones.

1	2	2	3	3	3	3	4	3	3	3
4	11	16	18	20	30	33	34	34	34	33
50	55	60	76	77	89	100	120	122	234	244

- Construye una tabla de frecuencias de 6 intervalos.
- Construye un histograma y un polígono de frecuencia.
- Calcula las medidas de tendencia central del conjunto de datos y de la tabla de frecuencias ¿Qué puedes concluir?

Calcular la cardinalidad de espacios muestrales y eventos. (Lecciones 46 a 48)

5 Resuelve los siguientes problemas.

- ¿Cuántos números de cuatro dígitos diferentes es posible formar sin considerar el cero?
- ¿De cuántas formas distintas es posible que se sienten 35 alumnos en 5 sillas? ¿Y en 10?
- ¿De cuántas formas distintas es posible vestirse con 5 pares de zapatos, 6 pantalones diferentes y 10 poleras?
- Si se escoge el orden de presentación de 6 banderas diferentes, ¿de cuántas formas distintas se pueden escoger?
- Un grupo de 20 personas quiere realizar un viaje en cuatro automóviles que tienen capacidad para 5 personas. ¿Cuántos grupos distintos es posible formar para el viaje?

Formular conjeturas y verificarlas acerca de la relación entre la media aritmética de una población de tamaño finito y la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño, extraídas de dicha población. (Lección 49)

6 Analiza el siguiente conjunto de datos y responde.

3	4	5	6	a
---	---	---	---	---

- Si la media de la población es igual a 4,5, ¿qué valor puede tener a ?
- ¿Cuántas muestras de tamaño 2 se pueden extraer, con y sin reposición?
- ¿Cuál es la media de mayor y menor valor que se puede obtener en las muestras anteriores?

Resolver problemas referidos a cálculos de probabilidades. (Lecciones 50 y 51)

7 Resuelve los siguientes problemas

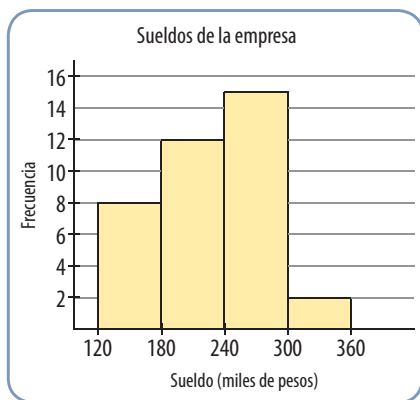
- Un dado se lanza 3000 veces y se obtienen las siguientes probabilidades experimentales $P(1) = a$, $P(2) = P(3) = P(4) = 2a$, $P(5) = P(6) = 3a$. ¿Cuál es la cantidad de veces que se obtuvo el número 6? El dado, ¿está cargado? ¿Por qué?
- Si se extrae una carta de una baraja española, ¿cuál es la probabilidad que salga un número menor que 5 y mayor que 2? ¿Y que salga una figura de bastos? ¿Y que salga un as o un 2?
- Con las letras de la palabra COMPUTADOR, se forman grupos de 3 letras al azar, ¿cuál es la probabilidad de que dos letras sean O?



I. Marca con una x la alternativa correcta.

Representar un conjunto de datos mediante tablas con datos agrupados y gráficos y calcular medidas de tendencia central. (Lecciones 39 a 41)

- 1** El histograma representa los sueldos de los empleados de una determinada empresa.
¿Cuál es el promedio redondeado a la unidad?



- A. \$240 000
B. \$204 324
C. \$225 135
D. \$227 838
E. Ninguna de las anteriores.

- 2** Considerando el histograma de la pregunta 1, ¿cuál es la mediana?

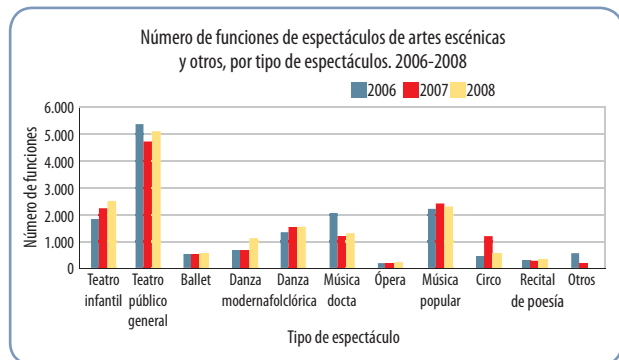
- A. \$127 500
B. \$211 500
C. \$232 500
D. \$236 786
E. \$240 000

- 3** Considerando el histograma de la pregunta 1, ¿cuál es la moda?

- A. \$151 251
B. \$240 000
C. \$251 250
D. \$258 000
E. \$300 000

Obtener información mediante el análisis de datos presentados en tablas, gráficos y a partir de la interpretación de medidas de tendencia central. (Lección 42)

Analiza el siguiente gráfico. Luego, responde las preguntas 4 y 5.



- 4** ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es VERDADERA?

- A. En el año 2006 la cantidad de espectáculos de balé fue mayor que los de ópera.
B. Cada año el número de funciones de ópera es menor con respecto a otros espectáculos.
C. Cada año el número de funciones de música docta es inferior que el de música popular.
D. El año 2008 se representaron menos obras de teatro infantil que de teatro tradicional.
E. Todas son verdaderas.

- 5** ¿Cuál(es) de la siguientes afirmaciones es(son) FALSA(S)?

- I. El número de funciones de música popular de cada uno de los 3 años se encuentra entre 2000 y 3000
II. Cada año, la cantidad de funciones de circo fue menor a 2000
III. El año 2007 en todas las artes escénicas y otros la cantidad de funciones fue inferior al de los otros dos años

- A. Solo I.
B. Solo II.
C. Solo III.
D. I y II.
E. II y III.

Analiza la siguiente tabla y luego, responde las preguntas 6 y 7.

Estatura de estudiantes de 1° medio		
Estatura (m)	f	F
[1,5; 1,56[	18	18
[1,56; 1,6[	A	43
[1,6; 1,65[	B	76
[1,65; 1,7]	44	C

- 6** ¿Cuál es el valor de $A + B - C$?

- A. 26
B. 32
C. 62
D. -62
E. Ninguna de las anteriores.

7 ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) VERDADERA(S)?

- I. f_r correspondiente al intervalo $]1,6; 1,65]$ es $\frac{11}{40}$
 II. f_r correspondiente al intervalo $]1,65; 1,7]$ es $36,\overline{6}\%$
 III. El valor correspondiente a B es mayor que el valor de A y menor que el de C
- A. Solo I. C. I y II. E. I, II y III.
 B. Solo II. D. I y III.

Comparar información respecto a dos o más conjuntos de datos, utilizando medidas de tendencia central y de posición y comunicar sus conclusiones. (Lecciones 42 a 45)

Con la siguiente tabla responde la pregunta 8.

Resultados ensayo PSU		
Puntaje	f	F
[400; 45[	8	8
[450; 500[	9	17
[500; 550[	18	35
[550; 600[	33	68
[600; 650[	55	123
[650; 700[	50	173
[700; 750[	20	193
[750; 800]	17	210

8 ¿Qué representa el percentil 45?

- A. 45% obtuvo entre 580 y 600
 B. 45% obtuvo más de 606,31
 C. 45% obtuvo menos de 614,09
 D. 45% obtuvo menos de 624,09
 E. 45% obtuvo menos de 611,04

9 ¿Qué representa que un estudiante haya obtenido un puntaje superior al P_{80} en una evaluación?

- I. Que su puntaje es menor que Q_3 .
 II. Que está dentro del 20% de los puntajes más altos.
 III. Que supera al 80% de los puntajes de los otros estudiantes.
- A. Solo I. D. II y III.
 B. I y II. E. I, II y III.
 C. I y III.

Determinar la cardinalidad de un espacio muestral utilizando técnicas combinatorias. (Lecciones 46 a 48)

10 ¿Cuántos números impares de 5 cifras se pueden formar con los dígitos del 0 al 9 sin que estos se repitan?

- A. 15 120 D. 52 448
 B. 22 680 E. 59 049
 C. 29 160

11 ¿Cuántas palabras de 10 letras distintas con o sin sentido pueden formarse con las letras de la palabra MATEMATICA?

- A. 40 320 D. 362 880
 B. 151 200 E. 3 628 800
 C. 302 400

12 ¿Cuántos números de 4 cifras se pueden formar utilizando los dígitos 5, 6, 7 y 8?

- A. 4 D. 64
 B. 8 E. 256
 C. 16

13 ¿Cuál es el valor de $C_3^6 + P_3^6$?

- A. 20 D. 924
 B. 120 E. Ninguna de las anteriores.
 C. 140

Relacionar la media de una población y el promedio de cada uno de los promedios de muestras de igual tamaño extraídas de la población. (Lección 49)

14 ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) VERDADERA(S)?

- I. En una población de tamaño finito SIEMPRE es posible obtener una muestra
 II. La media aritmética de una población de tamaño finito es igual a la media aritmética de una muestra de esta
 III. De un conjunto de 10 elementos se pueden obtener 90 muestras de tamaño 2 sin reposición
- A. Solo I. D. I y III.
 B. Solo II. E. II y III.
 C. Solo III.



Resolver problemas que involucren el cálculo de probabilidades a partir de la frecuencia relativa o la regla de Laplace. (Lecciones 50 y 51)

Obtener información mediante el análisis de datos presentados en tablas, gráficos y a partir de la interpretación de medidas de tendencia central.

15 Una urna contiene cuatro bolas rojas, tres verdes, dos blancas y una amarilla. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola amarilla?

- A. 0,1 C. 0,5 E. 10
B. 0,2 D. 1

16 Si se elige al azar un número de cinco cifras, ¿cuál es la probabilidad de escoger un número par?

- A. 0,1 D. 0,6
B. 0,4 E. Ninguna de las anteriores.
C. 0,5

17 Una urna contiene tres bolas blancas y dos bolas rojas. Si se agregan nueve bolas blancas, ¿cuál es la probabilidad de extraer una roja?

- A. $\frac{3}{14}$ D. $\frac{5}{14}$
B. $\frac{2}{11}$ E. Ninguna de las anteriores.
C. $\frac{3}{11}$

18 La probabilidad de que al escoger un número de dos cifras este sea primo y que termine en 2 es:

- A. 0 C. 0,11 E. $0,\overline{01}$
B. 0,5 D. 0,01

II. Resuelve los siguientes problemas.

Representar un conjunto de datos mediante tablas con datos agrupados y gráficos y calcular medidas de tendencia central.

1 El siguiente conjunto de datos corresponde a la edad de un conjunto de trabajadores de una fábrica.

19	19	20	20	22	23	24	25	26	26
42	42	43	44	46	47	48	50	55	35
38	39	40	35	31	32	35	35	35	

- a. Construye una tabla de frecuencias con 4 intervalos.
b. Construye un histograma y un polígono de frecuencia a partir de la tabla anterior.
c. Repite a. y b. utilizando 6 intervalos. ¿Qué tabla representa de mejor manera la información? Argumenta.

2 Analiza la información de la tabla y responde.

Las siguientes medidas corresponden a las estaturas (m) de un grupo niños.

Estatura (m)	Frecuencia
[1,45;1,50[	5
[1,50;1,55[	6
[1,55;1,60[	12
[1,60;1,65[	26
[1,65; 1,70]	13

- a. ¿Qué porcentaje de niños tiene una altura superior a 1,5 m?
b. ¿Cuántos niños miden menos de 1,65 m?
c. ¿Se puede afirmar que la cantidad de niños aumenta a medida que la estatura aumenta? Argumenta tu respuesta.

Comparar información respecto a dos o más conjuntos de datos, utilizando medidas de tendencia central y de posición y comunican sus conclusiones.

3 Analiza cada información y luego responde.

- a. Dos primeros medios A y B, con igual cantidad de alumnos, tienen las siguientes medidas de tendencia central respecto a la cantidad de hermanos que tiene cada uno de ellos:

	1.º Medio A	1.º Medio B
Promedio	4	4
Moda	5	3,5
Mediana	3	4

- ¿Qué curso tiene una mayor cantidad de hermanos? Argumenta tu respuesta.
b. En la siguiente tabla se muestra las ventas de dos tiendas durante dos meses.

Nº de días	[10, 20]	[21, 30]	[31, 40]	[41, 50]	[51, 60]
Tienda A	10	20	30	40	10
Tienda B	20	30	40	10	60

- Compara el promedio de las ventas de las tiendas. ¿Qué puedes concluir?
• ¿Cuál dirías que es la tienda que ha tenido mejores resultados?

- c. En la siguiente tabla se muestra la duración en horas de tres tipos de ampolletas.

Tiempo (horas)	A	B	C
[100, 500[	10	100	10
[500, 1500[	30	20	20
[1500, 2000[	40	10	50
[2000, 2500[	50	5	20
[2500, 3000]	60	6	10

- ¿Cuál de las ampolletas tiene el P_{20} más alto?
- Construye un diagrama de cajas de las ampolletas de la tabla.
- ¿Cuál de los tipos de ampolletas tiene mejor rendimiento? Considera el boxplot y las medidas de tendencia central.

Resolver problemas que involucren el cálculo de probabilidades a partir de la frecuencia relativa o la regla de Laplace.

4 Resuelve los siguientes problemas.

- a. En una urna se introducen 7 bolitas con las letras A, B, C, D, E, F y G. Si se extraen una a una todas las bolitas, ¿cuál es la probabilidad de que la primera bolita tenga la letra A? ¿Cuál es la probabilidad de que la tercera bolita tenga la letra G?

- b. Si se lanzan dos dados, ¿cuál es la probabilidad que la suma de sus caras no sea 12?

- c. Desde una baraja de naipe inglés, se extraen 5 cartas al azar y sin reposición. ¿Cuál es la probabilidad de que de las 5 cartas extraídas todas sean rojas?

5 Analiza la siguiente información y responde.

La cantidad libros que lee mensualmente tres grupos de personas se encuentran resumidos en la siguiente tabla.

Número de libros	A	B
[0, 5[	1000	1260
[5, 10[	470	30
[10, 15[	300	20
[15, 20]	100	200

Si se escoge a una persona al azar

- a. ¿en cuál grupo es más probable encontrar una persona que lee más de 10 libros?
- b. ¿cuál es la probabilidad de escoger a una persona que lea menos de 10 libros?

Desafío

La leyenda de la princesa enamorada

Cuenta la leyenda que una princesa enamorada de un vasallo sufrió la reprobación del rey, que la quería casar con un noble. La princesa suplicó y suplicó a su padre que le permitiera casarse con su amado. Era tal su insistencia, que el rey, para contentarla, accedió a darles una oportunidad. En un papel escribió la palabra boda y en el otro, destierro, y los introdujo en una urna. El vasallo debía escoger al azar uno de los dos, y que la suerte eligiera sus destinos. El vasallo sabía que el rey haría trampa y que en los dos papeles pondría destierro, pero no podía acusarle.

¿Qué hizo el vasallo para casarse con la princesa?

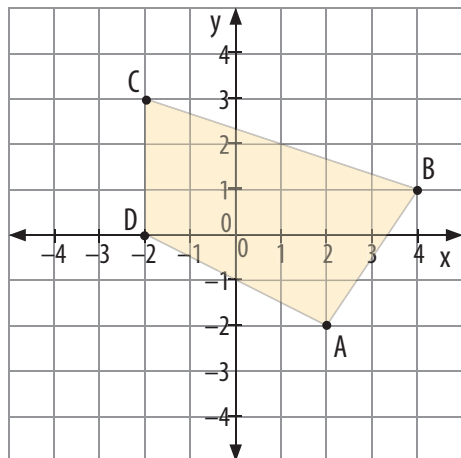




I. Marca con una x la alternativa correcta.

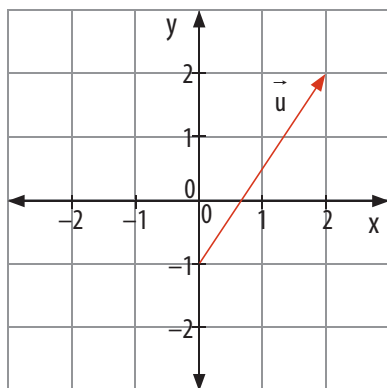
Identifican y representan puntos, figuras y vectores en el plano cartesiano. (Lecciones 27 y 28)

- 1 ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del polígono ABCD?



- A. A(-2, 2), B(1, 4), C(3, -2) y D(0, -2)
- B. A(2, -2), B(4, 1), C(3, -2) y D(-2, 0)
- C. A(-2, 2), B(1, 4), C(3, -2) y D(-2, 0)
- D. A(2, -2), B(4, 1), C(-2, 3) y D(-2, 0)
- E. A(2, -2), B(4, 1), C(-2, 3) y D(0, -2)

- 2 ¿Cuáles son las componentes del vector de la figura?



- A. (-2, 3)
- B. (2, 3)
- C. (-2, -3)
- D. (-3, 2)
- E. (-3, -2)

Representan en el plano cartesiano, adiciones, sustracciones de vectores y multiplicaciones de un vector por un escalar. (Lecciones 29 y 30)

A partir de los vectores $\vec{u} = (5, 9)$, $\vec{v} = (-3, 7)$ y $\vec{w} = (-9, -1)$ responde las preguntas 3 y 4.

- 3 ¿Cuáles son las componentes del vector resultante de $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$?

- A. (-7, 15)
- B. (-1, 15)
- C. (11, 17)
- D. (11, 15)
- E. (17, 17)

- 4 ¿Cuáles son las componentes del vector resultante de $2\vec{v} - \vec{w} + 4\vec{u}$?

- A. (5, 49)
- B. (5, 51)
- C. (23, 51)
- D. (5, 51)
- E. (23, 17)

Identifican las regularidades al aplicar transformaciones isométricas en el plano cartesiano. (Lecciones 31, 32 y 33)

- 5 Si el punto P (-1, 3) es rotado en 90° con respecto al origen del plano cartesiano, ¿cuáles son sus nuevas coordenadas?

- A. (1, -3)
- B. (1, 3)
- C. (3, 1)
- D. (3, -1)
- E. (-3, -1)

- 6 Si el punto P (-3, 7) es trasladado al punto P'(4, -1), ¿cuál es el vector $\vec{v}$ de traslación?

- A. $\vec{v} = (1, 6)$
- B. $\vec{v} = (-4, 11)$
- C. $\vec{v} = (6, 1)$
- D. $\vec{v} = (7, -8)$
- E. $\vec{v} = (8, 7)$

- 7** Si el punto $M(-3, -5)$ es rotado en 270° con respecto al origen del plano cartesiano, ¿cuáles son sus nuevas coordenadas?

A. (3, 5)
B. (5, 3)
C. (-5, 3)
D. (5, -3)
E. (-5, -3)

- 8** ¿Cuáles son las coordenadas de la imagen del punto $N(-18, 25)$ luego de reflejarlo con respecto al eje X ?

A. $N'(18, -25)$
B. $N'(18, 25)$
C. $N'(-18, -25)$
D. $N'(25, 18)$
E. $N'(-25, 18)$

Realizan composiciones de transformaciones isométricas reconociendo la figura resultante. (Lección 34)

- 9** Si el punto $M(-3, 5)$ es reflejado con respecto al eje Y se obtiene el punto M' . ¿Cuál es el vector $\vec{v}$ que permite trasladar el punto M' al origen?

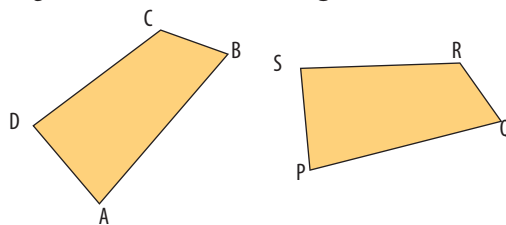
A. $\vec{v} = (3, 5)$
B. $\vec{v} = (-3, -5)$
C. $\vec{v} = (3, -5)$
D. $\vec{v} = (5, -3)$
E. $\vec{v} = (-5, -3)$

- 10** El segmento $\overline{AB}$ de extremos $A(5, 9)$ y $B(-1, 1)$ fue trasladado según el vector $\vec{u} = (-b + a, -a)$ y la imagen del segmento se volvió a trasladar según el vector $\vec{v} = (-a, a - b)$. ¿Cuáles son las coordenadas de los extremos del segmento $\overline{AB}$ luego de las dos traslaciones aplicadas?

A. $A''(b - 5, b - 9)$ y $B''(-1 - b, 1 - b)$
B. $A''(5 - b, 9 - b)$ y $B''(-1 - b, 1 - b)$
C. $A''(b - 5, b - 9)$ y $B''(1 - b, 1 - b)$
D. $A''(5 - b, b - 9)$ y $B''(-1 - b, 1 - b)$
E. $A''(b - 5, b - 9)$ y $B''(-1 - b, -1 - b)$

Comprender el concepto de congruencia y reconocer figuras congruentes a partir de los criterios de congruencia de triángulos. (Lecciones 35 y 36)

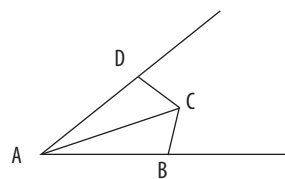
- 11** Si los cuadriláteros $ABCD$ y $PQRS$ son congruentes, ¿cuál es el lado homólogo al lado $\overline{BC}$?



A. $\overline{QR}$ C. $\overline{RS}$ E. $\overline{QS}$
B. $\overline{PQ}$ D. $\overline{SP}$

- 12** En la figura, $\overline{DC} \perp \overline{AC}$ y $\overline{CB} \perp \overline{AB}$. Si $\angle DAC \cong \angle BAC$, ¿en qué orden el triángulo DAC es congruente con el triángulo ABC ?

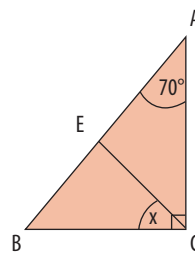
A. ACD
B. ADC
C. CAD
D. DCA
E. CDA



Resolver problemas que involucren el cálculo de medidas en figuras planas y demostraciones de propiedades en polígonos a partir de los criterios de congruencia. (Lecciones 37 y 38)

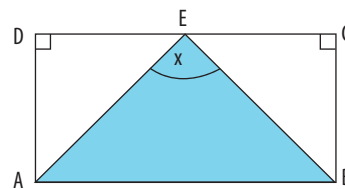
- 13** Si en el $\triangle ABC$ de la figura, $\overline{CE}$ es transversal de gravedad y $\overline{CE} \cong \overline{EA}$, ¿cuál es la medida del ángulo x ?

A. 20°
B. 40°
C. 75°
D. 90°
E. 140°



- 14** Si $ABCD$ es un rectángulo y $\overline{AD} \cong \overline{DE} \cong \overline{EC} \cong \overline{CB}$, ¿cuál es la medida del $\angle x$?

A. 30°
B. 45°
C. 60°
D. 90°
E. Ninguna de las anteriores.





Representar un conjunto de datos mediante tablas con datos agrupados y gráficos y calcular medidas de tendencia central. (Lecciones 39 y 41)

- 15** Respecto a la siguiente tabla de frecuencias, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) FALSA(S)?

Edad del encuestado		
X	f	F
[10, 15[	20	20
[15, 20[	15	35
[20, 25[	30	65
[25, 30]	28	93

- La moda aproximada a la centena es 21,92
- La mediana truncada a la centena es 24,41
- El promedio aproximado a la centésima es 21,05

- A. Solo I C. Solo III E. I, II y III
B. Solo II D. I y II

Obtener información mediante el análisis de datos presentados en tablas, gráficos y a partir de la interpretación de medidas de tendencia central y de posición. (Lecciones 40 y 42)

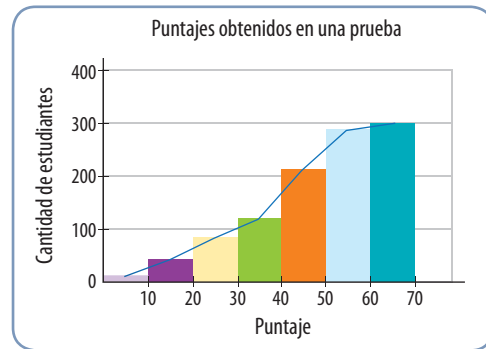
- 16** Con respecto a la información entregada en la tabla, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) VERDADERAS?

Horas que una persona se dedica a ver TV		
Nº de horas	Nº de personas (f)	F
[0, 2[	60	60
[2, 4[	72	132
[4, 6[	55	187
[6, 8]	21	208

- En promedio las personas dedican, aproximadamente, entre 3 y 4 horas a ver TV
- La mitad de las personas ve, aproximadamente, menos de 3 horas y 18 minutos de TV
- La mayor cantidad de personas ve TV entre 2 a 4 horas

- A. Solo III C. I y III E. I, II y III
B. I y II D. II y III

- 17** ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es VERDADERA con respecto al gráfico?



- El valor de la media es mayor que el valor de la mediana
- El valor de la mediana es mayor que el valor de la media
- El gráfico representa las frecuencias acumuladas de datos agrupados
- Los menores puntajes obtenidos se encuentran entre los 60 y 70 puntos
- El gráfico tiene una distribución simétrica con respecto a los datos

Comparar información respecto a dos o más conjuntos de datos, utilizando medidas de tendencia central y de posición y comunicar sus conclusiones. (Lecciones 42 a 45)

Rango de precios de ciertos artículos		
Precios (P)	f	F
[0, 1000[	45	45
[1000, 2000[	55	100
[2000, 3000]	90	190

- 18** ¿Cuál de la(s) siguiente(s) afirmación(es) es (son) VERDADERA(S)?

- El 75% de los artículos tiene un valor bajo los \$2472
- El valor de la mitad de los artículos tiene un precio superior a \$1909
- En promedio, el precio de cierto artículo es de \$1740

- A. Solo I C. I, II y III E. II y III
B. Solo II D. I y II

19 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es (son) VERDADERA(S)?

I. $Q_3 = P_{25}$

II. $P_{50} = M_e$

III. $P_1 = Q_1$

- A. Solo I C. Solo III E. II y III
B. Solo II D. I y II

Determinar la cardinalidad de un espacio muestral utilizando técnicas combinatorias. (Lecciones 47 a 49)

20 El valor de la expresión $\frac{8!}{5!}$ es:

- A. 15 D. 336
B. 48 E. 1680
C. 56

21 Si $B = \{p \in \mathbb{Z} / -3 \leq p < 10\}$, ¿cuántas muestras de tamaño 3 sin reposición pueden obtenerse?

- A. 286
B. 810
C. 1336
D. 1504
E. 1720

22 De un curso de 30 alumnos se quiere elegir al presidente, tesorero y secretario. ¿De cuántas maneras se pueden escoger estos cargos?

- A. 90
B. 4060
C. 24 360
D. 27 000
E. 142 506

23 ¿Cuántas muestras de tamaño 3 se pueden extraer de una población de tamaño 15, sin reposición?

- A. 3375
B. 2730
C. 455
D. 45
E. 6

Relacionar la media de una población y el promedio de cada uno de los promedios de muestras de igual tamaño extraídas de la población. (Lección 48)

24 A partir del conjunto $A = \{4, 5, 6, 7, 2, 3\}$, ¿cuál es el mayor promedio que se puede obtener si se extrae una muestra de tamaño 2, sin reposición?

- A. 2,5
B. 3,5
C. 4,5
D. 5,5
E. 6,5

Resolver problemas que involucren el cálculo de probabilidades a partir de la frecuencia relativa o la regla de Laplace. (Lecciones 49 y 50)

25 La probabilidad de que al escoger un número de 2 cifras sea primo y que termine en 2 es:

- A. 0
B. 0,5
C. 0,11
D. 0,01
E. $0,0\overline{1}$

26 La probabilidad de obtener 2 caras al lanzar 3 monedas simultáneamente es:

- A. $\frac{2}{3}$
B. $\frac{2}{8}$
C. $\frac{3}{8}$
D. $\frac{3}{16}$
E. $\frac{2}{32}$

27 Si se elige al azar un número de 5 cifras, ¿cuál es la probabilidad de escoger un número par?

- A. 0,1
B. 0,4
C. 0,5
D. 0,6
E. Ninguna de las anteriores.

Adición y sustracción de vectores: Sumar o Restar vectores según el valor de sus componentes. Por ejemplo: Sean $\vec{u} = (1, -2)$ y $\vec{v} = (5, 1)$, entonces:

$$\vec{u} + \vec{v} = (1, -2) + (5, 1) = (1+5, -2+1) = (6, -1)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (1, -2) - (5, 1) = (1-5, -2-1) = (-4, -3)$$

Aproximación por defecto: Es el resultado de una aproximación que es menor que el número original. Por ejemplo, al aproximar 3,21 a la décima resulta 3,2, siendo 3,2 menor a 3,21.

Aproximación por exceso: Corresponde a un número mayor que el original al ser aproximado. Por ejemplo, al aproximar 3,25 a la décima resulta 3,3, siendo 3,3 mayor a 3,25.

Argumento: Razonamiento empleado para convencer a alguien o para demostrar algo.

Argumento (estadística): En software computacional, el argumento corresponde a la información que necesita la función que se utilizará de la herramienta computacional.

Calculadora científica: Es un aparato o máquina que se utiliza para realizar cálculos aritméticos, y que además permiten calcular funciones trigonométricas, estadísticas y de otros tipos, diferenciándose así de una calculadora convencional.

Cardinalidad: Corresponde al número de elementos de un conjunto. Por ejemplo, la cardinalidad del conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ es 10.

Cifra significativa: Es el número de dígitos que se consideran al redondear un número para expresar su precisión. Por ejemplo, si $p = 3,141592654\dots$, se considera como 3,1416, se está usando 4 cifras significativas.

Clausura: Propiedad referida a algunas operaciones en ciertos conjuntos numéricos la cual consiste en que si opera entre elementos de un conjunto, el resultado obtenido sigue siendo un elemento del mismo conjunto. Por ejemplo, se dice que el conjunto de los números racionales cumple con la propiedad de clausura con respecto a las operaciones.

Coefficiente de posición: Corresponde al punto de intersección de una recta con el eje Y (eje de las ordenadas). Por ejemplo, en la función $f(x) = 3x - 2$, el coeficiente de posición es -2 .

Coefficiente numérico: Es el número que multiplica a un factor literal en un término algebraico. Por ejemplo, en el término $2x$, el número 2 es el coeficiente numérico.

Combinación: Una combinación C_r^n es una selección de r (uno o más) objetos de un conjunto de n objetos, independientemente del orden. C_r^n se lee: «una combinación de n elementos, tomando r a la vez», y se calcula con la fórmula $C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ donde $n!$ es el factorial del número n .

Componentes de un vector: Las componentes de un vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$, son cada uno de los números v_1 y v_2 . La primera componente es v_1 y la segunda componente es v_2 . Por ejemplo, las componentes del vector $\vec{v} = (1, -6)$ son 1 y -6 .

Composición de funciones: $g(x) = f(g(x))$. Por ejemplo, sean $f(x) = 3x$ y $g(x) = 1 - x$, entonces $fog(x)$ corresponde a $fog(x) = f(g(x)) = 3(1 - x) = 3 - 3x$.

Congruencia de polígonos: Dos polígonos son congruentes si es posible superponer uno sobre otro a través de una transformación isométrica.

Conjunto de los números racionales: Conjunto numérico compuesto por aquellos números que solo se pueden escribir como fracción, y cuyo numerador y denominador (distinto de cero) son números enteros. Por ejemplo, $-\frac{9}{7}$.

Conjunto de los números reales: Conjunto numérico que incluye al conjunto de los números racionales y al de los números irracionales. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ pertenece al conjunto de los números reales.

Constante: Cantidad cuyo valor se mantiene inalterable.

Coordenada: Corresponde a números que indican la ubicación de un punto en el plano $P(x, y)$. Por ejemplo, $P(1, -6)$.

Criterio: Norma, regla o pauta para conocer la verdad o la falsedad de una cosa. Por ejemplo, criterio de congruencia.

Cuadrante: En un sistema de coordenadas rectangulares el plano queda dividido en 4 regiones. Cada una de esas regiones es un cuadrante.

Cuartil: Valores que dividen a las mediciones realizadas en cuatro partes iguales.

Demostración: Justificación de una afirmación, premisa o sentencia de una manera estructurada, lógica e irrefutable a partir de otras sentencias verdaderas.

Densidad: Un conjunto de números es denso, si para cada par de números dentro de ese conjunto existe otro número del mismo conjunto entre ellos. Por ejemplo, el conjunto de los números racionales es denso, ya que siempre se encontrará un número racional entre dos números dados.

Diagrama de árbol: Gráfica en la que se muestra la relación entre varios componentes.

Diagrama de cajas o Boxplot: Gráfico que muestra información sobre los valores mínimo y máximo, los cuartiles 1, 2 (o mediana) y 3, para así conocer la existencia de valores atípicos y la simetría de la distribución de los datos.

Diagrama sagital: Es un diagrama de flechas que puede ser utilizado para representar una relación matemática o una función.

Dirección de un vector: La dirección de un vector se define como el ángulo que este forma con el eje horizontal.

Distribución: Forma en que aparecen los valores de una variable aleatoria en los datos medidos en una muestra o población.

Dominio: Es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente (x) en una función $y = f(x)$.

Ecuación literal: Ecuación en la cual los coeficientes constantes son escritos como literales porque se desconocen sus valores.

Por ejemplo, en la ecuación $ax + b = cx - d$, a , b , c y d son coeficientes literales porque se desconocen sus valores.

Eje: Línea recta que sirve de referencia para construir un sistema coordenado.

Error de aproximación: Diferencia entre el valor aproximado y el valor real de una cantidad.

Escalar: Corresponde a un número real o complejo y que sirve para describir un fenómeno físico con magnitud, pero sin la característica **vectorial** de dirección.

Espacio muestral: Conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Se representa con el símbolo Ω . Por ejemplo, el espacio muestral del experimento "Lanzar una moneda" es $\Omega = \{\text{cara, sello}\}$

Evento o suceso: En un experimento aleatorio, un evento es un conjunto de resultados posibles; en otras palabras, un evento es un subconjunto del espacio muestral. Por ejemplo, en el experimento "Lanzar una moneda y que al caer, salga cara" el evento es "que salga cara".

Experimento aleatorio: Actividad basada en la posibilidad, y en la que se desconoce previamente lo que resultará. Por ejemplo, al lanzar un dado se desconoce en qué número caerá.

Expresión algebraica: Es una combinación de símbolos matemáticos (literales, números, operaciones, etc.) que tenga sentido. Por ejemplo, el área de un cuadrado se puede expresar mediante la fórmula algebraica $A = a^2$.

Factor literal: Letra que representa una cantidad en álgebra. Las literales también pueden ser letras del alfabeto griego. Por ejemplo, en el término $3x^3$, x^3 corresponde al factor literal.

Factorial: El factorial del número natural n , que se denota como $n!$, se define como el producto de todos los números naturales desde 1 hasta n : $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Por ejemplo, el factorial de 4 es $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Factorizar: Proceso de escribir un número o una expresión algebraica en forma de producto de factores. Los casos más frecuentes de factorización son: Diferencia de cuadrados, trinomio cuadrado perfecto, polinomio cúbico perfecto, trinomio cuadrado no perfecto. Por ejemplo, $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$

Frecuencia absoluta: Número de veces que aparece un valor en un intervalo dado en una tabla de datos.

Frecuencia acumulada: Frecuencia de todos los datos que son menores que o iguales a un valor dado.

Frecuencia relativa: Para cada una de las clases, la frecuencia relativa se calcula, dividiendo la frecuencia absoluta entre el número total de datos (tamaño de la muestra). La suma de todas las frecuencias relativas de una tabla de frecuencias es igual a 1.

Función afín: Función que puede reducirse a la forma $y = mx + n$, donde **m** corresponde a la pendiente y **n** el coeficiente de posición asociadas a la recta que la representa. La gráfica de una función afín es una línea recta que no pasa por el origen.

Función identidad: Función que puede reducirse a la forma $y = x$, donde a cada valor de **x** le corresponde el mismo valor de **y**. La gráfica de una función identidad es una línea recta que pasa por el origen.

Función lineal: Función que puede reducirse a la forma $y = mx$, y donde **m** corresponde a la constante de proporcionalidad (o pendiente) de las variables involucradas. La gráfica de una función lineal es una línea recta que pasa por el origen.

Función: Relación entre dos conjuntos, llamados dominio y recorrido respectivamente, de tal manera que a cada elemento del dominio le corresponde a lo más un elemento del recorrido.

Geogebra: Software geométrico utilizado generalmente para construir, diseñar o demostrar propiedades geométricas.

Histograma: Representación gráfica de la distribución de datos de una muestra o población.

Homólogo: Correspondiente.

Imagen: Dada una función **f**, la imagen del valor **k** bajo esa función, es el resultado de evaluar la función en el valor **k**.

Por ejemplo, si la función es: $y = x^2$, y $k = 3$, entonces, la imagen de 3 bajo la función $y = x^2$ es 9 puesto que $y = (3)^2 = 9$.

Intervalo: El espacio entre los valores marcados en una recta numérica o en la escala de una gráfica.

Justificación: Causa, razón, argumento que justifica.

Lenguaje algebraico: Lenguaje que se emplea para describir las relaciones entre las cantidades expresadas en una expresión algebraica. Por ejemplo, el doble de un número escrito en lenguaje algebraico es $2x$.

Ley de los grandes números: También llamada ley del azar, afirma que al repetir un experimento aleatorio un número de veces, la frecuencia relativa de cada suceso elemental tiende a aproximarse a un número fijo, llamado probabilidad de un suceso, es decir, tiende a aproximarse a la probabilidad teórica que se obtiene a través de la regla de Laplace.

Marca de clase: Cuando se agrupan datos de una muestra, se definen clases a partir de intervalos. La marca de clase es igual al promedio de los extremos (valores límite) de los intervalos. Por ejemplo la marca de clase del intervalo $[3, 6]$ es 4,5.

Media aritmética (o media): Corresponde al promedio de un conjunto de datos y se obtiene sumando todos los elementos del conjunto y dividiendo dicha suma entre el número total de elementos de él. Por ejemplo, el promedio del conjunto de datos $A = \{1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6\}$ se calcula de la siguiente forma:

$$\frac{1+1+2+2+3+4+4+4+5+6}{10} = \frac{32}{10} = 3,2$$

Y se obtiene un promedio de 3,2.

Media muestral: Promedio de una muestra que fue extraída de una población.

Media poblacional: Promedio de una población o universo.

Mediana: El número intermedio, o la media (el promedio), de los dos números intermedios en un conjunto ordenado de datos.

Medida de posición: Constante que divide en grupos a un conjunto de datos con el mismo número de individuos.

Medida de tendencia central: Constante llamada valor central, alrededor de la cual se concentran los valores de un conjunto de datos observados. Las medidas de tendencia central son la media (aritmética), la moda y la mediana. La medida de tendencia central más frecuentemente utilizada es la media.

Moda: En una muestra, la moda es el valor que aparece con mayor frecuencia. Si todos los números aparecen con la misma frecuencia, no hay moda. Por ejemplo, la moda del conjunto de datos $A = \{1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6\}$ es 4, porque es el elemento que más se repite.

Módulo de un vector (o magnitud): El módulo de un vector es igual a su longitud. Si el vector es $\vec{v} = (a, b)$, su módulo se calcula aplicando la fórmula: $\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Muestra: Parte de una población que se elige aleatoriamente para que la represente en un estudio estadístico. Por ejemplo, si se quiere estudiar el deporte más practicado por la población chilena, se escoge al azar un grupo de personas (muestra) de variadas edades y de todas las regiones de Chile y se les consulta acerca del deporte practicado por cada uno.

Multiplicación de expresiones algebraicas:

Multiplicación que se realiza término a término entre expresiones algebraicas. Por ejemplo: $3x^2 \cdot (2x - 3x^3y) = 3x^2 \cdot 2x - 3x^2 \cdot 3x^3y = 6x^3 - 9x^5y$.

Multiplicación de un vector por un escalar: Multiplicación que se realiza a cada componente de un vector, por un número real. Por ejemplo: Sea $\vec{v} = (-1, 9)$ entonces, $3\vec{v} = 3(-1, 9) = (-3, 27)$.

Notación científica: Forma abreviada de escribir números muy grandes o muy pequeños. Es de la forma $a \cdot 10^n$ donde a corresponde a un número entre 1 y 10 y n , un número entero.

Número cuadrado perfecto: Un número es cuadrado perfecto si su raíz cuadrada es un número entero. Por ejemplo, 25, es un número cuadrado perfecto, ya que su raíz cuadrada es un número entero, es decir, $\sqrt{25} = 5$.

Número decimal finito: Corresponde a un número decimal cuya parte decimal es finita. Ejemplo: 0,6.

Número decimal infinito periódico: Corresponde a un número decimal cuya parte decimal es infinita y además todo lo que viene seguido de la coma se repite. Esta parte decimal que se repite constantemente se le llama periodo. Ejemplo: $1,6\overline{2}$.

Número decimal infinito semiperiódico: Corresponde a un número decimal cuya parte decimal es infinita y en el cual existe una parte decimal que no se repite llamada ante periodo (ubicada entre la parte entera y entre el periodo de la parte decimal) y un periodo. Ejemplo: $-31,0\overline{2}$.

Origen del plano cartesiano: Punto de coordenadas (0,0) en el plano cartesiano.

Par ordenado (o coordenada cartesiana): Par de valores (x, y) que sirven para ubicar un punto en un plano cartesiano. Por ejemplo, $A(5, -8)$ representa un par ordenado.

Pendiente: Medida de inclinación de una recta en una gráfica. Razón entre la distancia vertical y la distancia horizontal. Por ejemplo, la gráfica muestra una recta con pendiente negativa.

Percentil: Valores que dividen a las mediciones realizadas en cien partes iguales.

Permutación: Una permutación de n objetos diferentes (P_n) corresponde al número de ordenamientos posibles de realizar con n elementos. Se calcula con la expresión $P_n = n!$ Por ejemplo $4!$ se calcula como $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Plano cartesiano: Sistema de coordenadas en el cual los ejes (rectas numéricas) se intersectan perpendicularmente y ambos utilizan la misma unidad de medida.

Población: Grupo completo de objetos o individuos (universo) que se desea estudiar. Por ejemplo, la población mundial representa un universo de individuos.

Polígono de frecuencia acumulada: Gráfica de una distribución de frecuencias acumuladas que se elabora uniendo los puntos medios de la base superior de cada rectángulo en un histograma.

Polígono de frecuencia: Gráfica de una distribución de frecuencias que se elabora uniendo los puntos medios de la base superior de cada rectángulo en un histograma.

Polinomio: Expresión algebraica que consta de varios términos. Se clasifican en: monomios (un término), binomios (dos términos), trinomios (tres términos) y polinomios (cuatro términos o más). Por ejemplo, $3x^2 - 2x + 1$ es un trinomio.

Potencia de base racional y exponente entero: Es el resultado de multiplicar un número racional (la base) por sí mismo varias veces (indicado por el exponente correspondiente a un número entero). Por ejemplo, $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$ es una potencia de base racional $\frac{3}{4}$ y exponente entero -2 .

Preimagen: Dada una función f , la preimagen del valor k bajo esa función, es el valor k . Por ejemplo, si la función es: $y = x^2$, y $k = 3$, entonces, la preimagen es 3.

Principio multiplicativo: Técnica de conteo el cual se usa para determinar la cardinalidad de un espacio muestral, y dice que si se tiene un experimento el cual puede ocurrir de " n " maneras diferentes, y un segundo experimento que tiene " m " maneras diferentes, además los experimentos son uno seguido del otro, entonces se tiene que el experimento (considerando el primer y segundo experimento) puede ocurrir $n \cdot m$ posibilidades.

Probabilidad experimental: Probabilidad de un evento calculada a partir de la repetición del evento un gran número de veces.

Probabilidad teórica (o modelo de Laplace):

Probabilidad de un evento calculada a partir del modelo de Laplace, es decir, la probabilidad de un evento es el resultado de dividir el número de casos favorables (cardinalidad del evento) en el número de casos posibles (cardinalidad del espacio muestral).

Producto notable: Los productos notables se denominan así ya que se han establecido sus reglas para no tener que calcularlos cada vez que se requiera conocer su resultado. Algunos productos notables de frecuente uso son:

- Cuadrado de binomio: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- Cubo de binomio: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- Suma por diferencia: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- Binomios con término en común:
 $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

Q.e.d: Queda esto demostrado.

Quintil: Valores que dividen a las mediciones realizadas en cinco partes iguales.

Rango: Diferencia entre el mayor y el menor valor de todos los datos.

Rango intercuartil: Medida de dispersión definida por la diferencia entre los percentiles 75 y 25 de una distribución.

Recorrido: Es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente (x) en una función $y = f(x)$.

Reflexión en el plano cartesiano: Transformación que ocurre cuando se invierte una figura sobre un eje coordenado o recta.

- Si la reflexión de un punto (x, y) es respecto al eje X , el punto se ubicará en la coordenada $(x, -y)$.
- Si la reflexión de un punto (x, y) es respecto al eje Y , el punto se ubicará en la coordenada $(-x, y)$.

Relación: Una relación se define como un par ordenado de elementos de un conjunto M : (a, b) , donde $a, b \in M$.

Reposición: Acto de reponer, devolver.

Restricción de la solución: Valores que no se pueden tomar en una solución, para que este exista.

Rotación en el plano cartesiano: Transformación que ocurre cuando una figura gira alrededor de un punto y un ángulo en el plano cartesiano. A continuación se muestran las rotaciones con respecto al origen y un ángulo de rotación:

- $R_{(0, 90^\circ)}(x, y) = (-y, x)$
- $R_{(0, 180^\circ)}(x, y) = (-x, -y)$
- $R_{(0, 270^\circ)}(x, y) = (y, -x)$

Sentido de un vector: Orientación del vector. Este puede ser Norte, Sur, Este u Oeste.

Tabla de frecuencia de datos agrupados: Tabla que muestra las distintas frecuencias (absoluta, acumulada o relativa) de la variable en estudio y que se presenta en intervalos de igual amplitud.

Término semejante: Dos o más términos que contienen el mismo factor literal.

Traslación en el plano cartesiano: Desplazamiento de una figura a lo largo de un vector. La traslación de un punto $P(x, y)$ según el vector $\vec{u} = (u_1, u_2)$ es $T_{\vec{u}}(x, y) = (x + u_1, y + u_2)$.

Truncar: Aproximación de a un valor omitiendo decimales a partir de uno específico. Por ejemplo, 3,25 truncado a la décima es 3,2.

Valor máximo: Corresponde al mayor valor de un conjunto de datos de una variable cuantitativa.

Valor mínimo: Corresponde al menor valor de un conjunto de datos de una variable cuantitativa.

Valorizar expresiones algebraicas: Corresponde a reemplazar por un número real el coeficiente literal de cada uno de los términos de una expresión algebraica, generándose un resultado. Por ejemplo, en la expresión $x^2 - 1$ si x toma el valor de 2, entonces la expresión algebraica toma el valor de 3, ya que :

$$x^2 - 1 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

Variable dependiente: Una variable es dependiente si su valor depende del valor de otra u otras variables. Por ejemplo, el monto a pagar (variable dependiente) por una cuenta de luz depende de los Kilowatts que se consuman.

Variable independiente: Una variable es independiente si su valor no depende del valor de otra u otras variables. Por ejemplo, el monto a pagar por una cuenta de luz depende de los Kilowatts que se consuman (variable independiente).

Variable: Símbolo que representa una cantidad que puede cambiar.

Variación: Cambio que sufre una variable. En combinatoria corresponde a una permutación de r elementos de un conjunto de n elementos distintos se calcula con la expresión $V_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Vector: Una diada de valores ordenados.

$$\vec{v} = (v_1, v_2)$$



Contenido	Página	Contenido	Página
Adición y sustracción de vectores	184, 185, 186, 234	Espacio muestral	280, 288
Aproximación por defecto	32	Evento o suceso	294, 295
Aproximación por exceso	32	Experimento aleatorio	280, 294, 298
Argumento	274, 275, 276	Expresión algebraica	82, 100, 127, 158
Calculadora científica	36, 60	Factor literal	82, 84
Cardinalidad	282, 288	Factorial	284
Cifra significativa	33, 38	Factorizar	100, 103
Clausura	42, 150	Frecuencia absoluta	248, 300
Coefficiente de posición	141	Frecuencia acumulada	249, 267
Coefficiente numérico	82, 84, 110	Frecuencia relativa	249, 300
Combinación	288	Función	126, 132, 134, 140
Componentes de un vector	180	Función afín	140, 150
Composición de funciones	146, 150, 160	Función identidad	151
Congruencia de polígonos	214, 218, 224, 226, 235	Función lineal	134, 150
Conjunto de los números racionales	10, 68	GeoGebra	143, 145, 179,
Conjunto de los números reales	128	Histograma	249, 252, 261
Constante	86, 134	Homólogo	215, 220
Coordenada	177, 180	Imagen	126, 132
Criterio	218, 219, 220	Intervalo	248, 253, 257, 264
Cuadrante	177	Justificación	224, 235
Cuartil	264, 268, 275	Lenguaje algebraico	86
Demostración	224, 236	Ley de los grandes números	299
Densidad	40	Límite superior e inferior	257, 258, 265
Diagrama de árbol	280, 284, 288	Marca de clase	248
Diagrama de cajas o Boxplot	269	Media aritmética (o media)	256, 260, 292
Diagrama sagital	127	Media muestral	292
Dirección de un vector	181, 189	Media poblacional	292
Distribución	252, 260, 266	Mediana	256, 260, 265
Dominio	132, 146	Medida de posición	264, 268, 269, 275
Ecuación literal	114, 118	Medida de tendencia central	256, 260
Eje	135, 142, 176, 199	Moda	256, 260
Error de aproximación	32	Módulo de un vector (o magnitud)	181, 189
Escalar	188	Muestra	292

Multiplicación de expresiones algebraicas	90	Q.e.d	224, 226
Multiplicación de un vector por un escalar	188	Quintil	264
Notación científica	58	Rango	248
Número cuadrado perfecto	101	Rango intercuartil	269
Número decimal finito	12	Recorrido	132, 146
Número decimal infinito periódico	12	Reflexión en el plano cartesiano	198, 207, 214
Número decimal infinito semiperiódico	12	Relación	126
Origen del plano cartesiano	135, 176, 176, 202	Reposición	286
Par ordenado (o coordenada cartesiana)	176, 188	Restricción de la solución	118
Pendiente	135, 141, 142	Rotación en el plano cartesiano	202, 207, 214
Percentil	264	Sentido de un vector	181, 189
Permutación	284, 285	Tabla de frecuencia de datos agrupados	248, 253
Plano cartesiano	176, 180	Término semejante	83, 91
Población	292	Traslación en el plano cartesiano	194, 206, 214
Polígono de frecuencia acumulada	250, 254	Trunca	32
Polígono de frecuencia	249, 252	Valor máximo	272
Polinomio	82, 91, 100	Valor mínimo	272
Potencia de base racional y exponente entero	48, 69	Valorizar expresiones algebraicas	82, 83
Preimagen	126, 132	Variable dependiente	140
Principio multiplicativo	280	Variable independiente	140
Probabilidad experimental	298	Variable	82, 86
Probabilidad teórica (o modelo de Laplace).	294, 295	Variación	140
Producto notable	94	Vector	180, 184, 194



- **Adriana Engler, M. I.** *Los errores en el aprendizaje de matemática*. Argentina: Universidad Nacional del Litoral.
- **Aires, G. D. (2005).** *Fraciones y números decimales 7° grado*. Buenos Aires: Secretaría de educación de la ciudad de Buenos Aires.
- **Andrés Ortiz Jiménez, C. R. (2006).** *Matemática 1° Año Medio. Guía didáctica para el profesor*. Santiago de Chile: Mc Graw-Hill / Interamericana de Chile Ltda.
- **Arturo Mora, L. C. (1996).** *Probabilidades y estadísticas*. Universidad de Concepción, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
- **Baldor, A. (1995).** *Geometría plana y del espacio: con una introducción a la trigonometría*. México: CCEDTA.
- **Bell, E. T. (1948).** *Los grandes matemáticos: desde Zenón a Poincare. Su vida y sus obras*. Buenos Aires: Losada.
- **C. Azcárate Giménez, J. D. (1990).** *Funciones y gráficas. Síntesis*.
- **C., F. A. (1971).** *Teoría y problemas de geometría proyectiva, serie de compendios*. México: Schaum, Mc Graw - Hill.
- **Chile, M. D. (2009).** *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios, Matemática*.
- **Corbalán, F. (1995).** *La matemática aplicada a la vida cotidiana*. Barcelona: Graó.
- **Coxeter, H. S. (1994).** *Retorno a la geometría*. Madrid: DLS - Euler Editores.
- **Editorial, E.** *Test y juegos de inteligencia*. Madrid: Susaeta.
- **Educación, M. D.** *Programa de estudio 1° año medio*.
- **Educación, M. D. (2011).** *Programa de estudio para Primer Año Medio*.
- **Edwin L. Purcell, D. A. (2001).** *Cálculo*. Prentice Hall, octava edición.
- **Escher, B. E. (1990).** *El diablo de los números*. Berlín: Taschen.
- **G. Innocenti, F. V. (1980).** *Geometría elemental del espacio*. Santiago de Chile: Pontificia Universidad Católica de Chile, instituto de matemática.
- **G., E. S.** *Contenidos básicos de estadística y probabilidad*. Universidad de Santiago de Chile.
- **Gabriela Zúñiga P., M. R. (2010).** *Nuevo explorando Matemática 1° medio, Libro de actividades*. Santiago de Chile: SM.
- **Godino, J. D. (2004).** *Matemáticas para maestros*. Granada: Universidad de Granada.
- **Innocenti, G. (1980).** *Geometría analítica vectorial: introducción a la geometría analítica del plano*. Santiago de Chile: Pontificia Universidad Católica de Chile, instituto de matemática.
- **L., P. G. (1998).** *Introducción a la estadística*. MC Graw Hill.
- **Lener, M. S.-N. (1998).** *Pre - cálculo*. Pearson, tercera edición.
- **Lipschutz, S. (1998).** *Probabilidad*. Mc Graw Hill.
- **M. Spiegel, R. M. (2006).** *Álgebra Superior*. Shaum, Mc Graw Hill.
- **Oscar Tapia Rojas, M. O.-M. (2010).** *Manual de preparación matemática*. Ediciones UC.
- **Others, G. R.** *Unified Mathematics*. USA: Houshton Mifflin Company.
- **Others, J. M. (2007).** *Matemáticas curso 2*. USA: Holt, Rinehart and Winston.
- **Others, M. C.** *Mathematics for the international student*. Australia: Haede & Harris Publications.
- **Others, R. G.** *Algebra and Trigonometry 1 and 2*. USA: Houghton Mifflin Company.
- **Otros, A. Y. (1992).** *Hoja de cálculo en la enseñanza*.
- **Paenza, A. (2007).** *Matemática...¿Estás ahí? Episodio 2*. Colección ciencia que ladra, tercera edición.
- **Pastor, J. R. (2000).** *Historia de la matemática*. Barcelona: Gedisa.
- **Peña, J. A. (1999).** *Álgebra en todas partes*. Secretaría de educación de cultura económica, primera edición.
- **Raquel S. Abrate, M. D. (2006).** *Errores y dificultades en Matemática*. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María.
- **Ricardo Berlanga, C. B. (2007).** *Las matemáticas, perejil de todas las salsas*. Secretaría de educación de cultura económica, tercera edición.
- **Roberto Araya, C. M. (2008).** *Buscando un orden para el azar, Proyecto Enlaces*. Santiago de Chile: Centro Comenius, USACH.
- **Rodríguez, J. A. (2000).** *Matemática recreativa y otros juegos de ingenio*. AKAL, tercera edición.
- **Rossana Herrera C., M. V. (2010).** *Nuevo explorando, matemática 1° medio*. Santiago de Chile: SM.
- **Santaló, L. (1961).** *Vectores y tensores con sus aplicaciones*. Buenos Aires: EUDEBA.
- **Santiago Fernández, J. M. (2002).** *Estadística descriptiva*. Esic, segunda edición.
- **Stanley R. Clemens, P. G.** *"Geometría"*. Pearson.
- **Sullivan, M. (1997).** *Pre - cálculo*. Prentice Hall, cuarta edición.
- **Webster, A. L.** *Estadística aplicada a los negocios y la economía*. Mc Graw Hill, tercera edición.
- **Zarco, A. P. (S.F.).** Recuperado el 31 de Mayo de 2013, de http://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/165/el_papiro_de_Rhind.pdf

Sitios web

- DEMRE: www.demre.cl
- El Portal de las Matemáticas: www.sectormatematica.cl
- Icarito: www.icarito.cl
- Instituto Nacional de Estadísticas: www.ine.cl
- Ministerio de Educación: www.mineduc.cl
- Real Academia Española de La Lengua: www.rae.es
- Liceo de excelencia virtual: <http://www.yoestudio.cl/>

Bibliografía adicional

Libros que te pueden ayudar...

- *Para desarrollar el pensamiento matemático.*
- **Alboukrek, A.** *Destreza y desafíos.* México: Larousse.
- **Editorial, E.** *Test y juegos de inteligencia.* Madrid: Susaeta.
- **Saslavsky, I. (1999).** *Rompecabezas Numéricos.* Barcelona: Gryjalbo.
- *Para trabajar contenidos de estadística y probabilidad.*
- **Ángela Baeza, M. D. (2010).** *Matemática 1° medio, proyecto Bicentenario.* Santiago: Santillana.
- *Para trabajar contenidos de números racionales y para profundizar en operatoria de conjuntos numéricos.*
- **Escher, B. E. (1990).** *El diablo de los números.* Berlín: Taschen.
- **Fabra, J. S.** *El asesinato del profesor de matemáticas. El duende verde.*
- *Para profundizar contenidos relacionados con la historia y formación de los conjuntos numéricos.*
- **Guejj, D.** *El teorema del loro, novela para aprender matemáticas.* Compactos Anagrama.
- *Para ejercitar la operatoria básica.*
- *La locura del Sudoku, segunda edición.* (2005). Buenos Aires: Sirio.
- *Para trabajar y ejercitar contenidos de ecuaciones y estadística.*
- **Others, J. M. (2007).** *Matemáticas curso 2.* USA: Holt, Rinehart and Winston.
- *Para profundizar contenidos relacionados a números y álgebra.*
- **Paenza, A. (2007).** *Matemática...¿Estás ahí? Episodio 2.* Colección ciencia que ladra, tercera edición.
- *Para trabajar contenidos de probabilidad.*
- **Roberto Araya, C. M. (2008).** *Buscando un orden para el azar, Proyecto Enlaces.* Santiago de Chile: Centro Comenius, USACH.

Links que puedes visitar...

- Para reforzar la "Multiplicación de expresiones algebraicas". <http://goo.gl/fRQrZ>
- Para reforzar el "Cubo de binomio". <http://goo.gl/XRnJj>
- Para reforzar el "Dominio y recorrido" de una función. <http://goo.gl/3OnRn>
- Para reforzar el "Lenguaje algebraico y ecuaciones". <http://goo.gl/uWwPL>
- Para reforzar la "Factorización". <http://goo.gl/UgOA1>
- Para graficar funciones puedes utilizar el "Graficador". <http://goo.gl/EZheE>
- Para reforzar el concepto de "Variable". <http://goo.gl/84khA>
- Para reforzar la "Adición y sustracción de números racionales". <http://goo.gl/SLfM4>
- Para construir un "Diagrama de cajas e histograma". <http://goo.gl/Nb0MC>
- Para reforzar el contenido de "Permutaciones y combinaciones". <http://goo.gl/af0Bd>
- Para reforzar las "Medidas de posición". <http://goo.gl/Npq95>
- Para reforzar el concepto de "Congruencia de triángulos y sus aplicaciones". <http://goo.gl/vTQyN>



Unidad 1

Página 8

1

- a. Entero, 3 c. Entero, 5 e. Entero, 8 g. Entero, 15
b. Entero, 5 d. Entero, 3 f. Entero, 2 h. Entero, 20

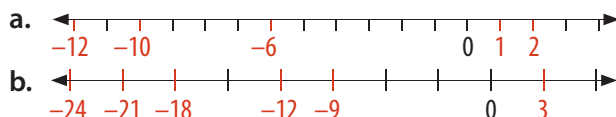
2

- a. > c. > e. > g. = i. >
b. < d. > f. < h. <

3

- a. -10; -6; -2; 0; 5; 100
b. -(101), -100, -99, -[-(99)], 100, 101
c. -23, -22, -5, $\frac{-3}{3}$, $\frac{8}{2}$, 5, |8|

4



Página 9

5

- a. 5 b. 13 c. 26 d. 3

6

- a. -125 b. 36 c. -1 d. 1 e. 144 f. 256

7

- a. 125 d. 1
b. $101559956668416 = 6^{18}$ e. 256
c. $\frac{4}{27}$ f. -62 500

8

- a. Un saldo en contra de \$35 700.
b. A una profundidad de 2090 m.
c. 16 000 dulces.

Página 10

Taller

- b. $x = \frac{7}{3}$, No d. $x = -\frac{7}{2}$, No f. $x = \frac{2}{7}$, No
c. $x = 40$, Sí e. $x = -3$, Sí

Página 11

1

- a) $\in \mathbb{Z}$ c) $\notin \mathbb{Z}$ e) $\in \mathbb{Z}$ g) $\notin \mathbb{Z}$ i) $\notin \mathbb{Z}$
b) $\in \mathbb{Z}$ d) $\in \mathbb{Z}$ f) $\notin \mathbb{Z}$ h) $\notin \mathbb{Z}$

2

- a) 7°C b) \$16 000

3

- a) $x = \frac{2}{5} \cdot 125 = 50 \rightarrow$ Entero. Aún no lee 50 páginas.
b) $\frac{1}{3} x = 200\,000 \rightarrow x = 600\,000$
 $\rightarrow \frac{1}{9} 600\,000 = \frac{200\,000}{3} \rightarrow$ Racional no entero.
Ganó \$ $\frac{200\,000}{3}$

c) $x = \frac{7}{8} \cdot 100 = \frac{700}{8} \rightarrow$ Racional no entero. Comió $\frac{700}{8}$ g.

4

- a) Sí, $\frac{18}{1}$ c) Sí, $\frac{41}{90}$ e) No
b) Sí, $\frac{13}{9}$ d) Sí, $\frac{5887}{1650}$ f) Son racionales a), b), c) y d).

5

- a) $33, \bar{3} \in \mathbb{Q}, \notin \mathbb{Z}$ b) \$38 000 $\in \mathbb{Z}$

6 Sí, es cierto.

7 Se coloca el número sin coma en el numerador de la fracción, luego para el denominador se coloca un uno seguido de tantos ceros como cifras decimales tiene el número decimal.

8 Sí, ya que la unidad se divide en cinco partes y se consideran tres de ellas.

Página 13

1

- a) $0, \overline{63}$, periódico e) $-0,00\overline{4}$, semiperiódico
b) $0, \overline{50}$, periódico f) $2, \overline{6}$, periódico
c) $0,0\overline{8}$, semiperiódico g) $7, \overline{6}$, periódico
d) $-2, \overline{6}$, periódico h) 6,25; finito

2

- a) $\frac{103}{200}$ c) $\frac{601}{100}$ e) $\frac{20999}{1000}$ g) $-\frac{13467}{100}$
b) $\frac{711}{100}$ d) $\frac{849}{25}$ f) $\frac{146}{5}$ h) $-\frac{800231}{1000}$

3

- a) $x = 5,2121\dots$ y $100x = 521,2121\dots$ restando queda $99x = 516$, luego $x = \frac{516}{99} = \frac{172}{33}$.
b) $x = 0,555\dots$ y $10x = 5,555\dots$ restando queda $9x = 5$, luego $x = \frac{5}{9}$.
c) $x = 0,0909\dots$ y $100x = 9,0909\dots$ restando queda $99x = 9$, luego $x = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$.
d) $x = 4,1313\dots$ y $100x = 413,1313\dots$ restando queda $99x = 409$, luego $x = \frac{409}{99}$.
e) $x = 2,1531\dots$ y $1000x = 2153,1531\dots$ restando queda $999x = 2151$, luego $x = \frac{2151}{999} = \frac{239}{111}$.
f) $x = 0,4747\dots$ y $100x = 47,4747\dots$ restando queda $99x = 47$, luego $x = \frac{47}{99}$.
g) $x = \overline{-1,001}$, $x = 1,0010\dots$ y $1000x = 1001,0010\dots$ restando queda $999x = 1000$, luego $x = -\frac{1000}{999}$.
h) $x = \overline{-320,8}$, $x = 320,888\dots$ y $10x = 3208,888\dots$ restando queda $9x = 2888$, luego $x = -\frac{2888}{9}$.

4

- a) $x = 1,5777\dots$, $10x = 15,777\dots$ y $100x = 157,777\dots$ restando queda $90x = 142$, luego $x = \frac{142}{90} = \frac{71}{45}$.
- b) $x = 23,45656\dots$, $10x = 234,5656\dots$ y $1000x = 23456,5656\dots$ restando queda $990x = 23222$, luego $x = \frac{23222}{990} = \frac{11611}{495}$.
- c) $x = 1,247272\dots$, $100x = 124,7272\dots$ y $10000x = 12472,7272\dots$ restando queda $9900x = 12348$, luego $x = \frac{12348}{9900} = \frac{343}{275}$.
- d) $x = 0,37666\dots$, $100x = 37,666\dots$ y $1000x = 376,666\dots$ restando queda $900x = 339$, luego $x = \frac{339}{900} = \frac{113}{300}$.
- e) $x = 31,4777\dots$, $10x = 314,777\dots$ y $100x = 3147,777\dots$ restando queda $90x = 2833$, luego $x = \frac{2833}{90}$.
- f) $x = 4,2555\dots$, $10x = 42,555\dots$ y $100x = 425,555\dots$ restando queda $90x = 383$, luego $x = \frac{383}{90}$.
- g) $x = -102,0\overline{7}$, $x = 102,0777\dots$, $10x = 1020,777\dots$ y $100x = 10207,777\dots$ restando queda $90x = 9187$, luego $x = -\frac{9187}{90}$.
- h) $x = -10,360\overline{2}$, $x = 10,360202\dots$, $100x = 1036,0202\dots$ y $10000x = 103602,0202$ restando queda $9900x = 102566$, luego $x = -\frac{102566}{9900} = -\frac{51283}{4950}$.

Página 14

5

	Número	Tipo	Representación decimal	Representación fraccionaria
a)	$0,0\overline{6}$	Decimal infinito periódico	$0,060606\dots$	
b)		Decimal infinito semiperiódico	$-2,9888888\dots$	$-\frac{269}{90}$
c)	$0,5\overline{6}$			$\frac{14}{25}$

- 8 Se debe multiplicar el valor por dos potencias de 10 tales que al restar ambos números los decimales se anulen. Luego, se despeja el valor expresándolo como fracción.

Página 15

9

- a) No, $m \cdot n = \frac{1}{11}$ d) No, $mn + \frac{1}{2} < qr$
- b) Sí e) Sí
- c) No, $n \div r = 1$ f) Sí

10

- a) Sí, No, como fracción es decir $\frac{4}{3}$ m
- b) Sí, No, como fracción es decir $\frac{5}{3}$ m
- c) Transformándola a fracción es decir $\frac{1}{3}$
- d) Sí, transformando los valores a fracción.

e)

	Masa total	Masa de exceso	Masa faltante
Pasajero 1	$\frac{218}{9}$ kg	$\frac{38}{9}$ kg	
Pasajero 2	$\frac{9014}{495}$ kg		$\frac{886}{495}$ kg
Pasajero 3	$\frac{751}{30}$ kg	$\frac{151}{30}$ kg	

Al pasajero 2 le faltan $\frac{886}{495}$ kg.

11 $0,00029\overline{6}$

12 Le faltó restar 45 en el numerador.

13 $a, \overline{bc} = \frac{abc - ab}{90} = \frac{ab(c-1)}{90}$. En el numerador se escribe el número completo sin considerar la coma y se le resta el número formado por la parte entera y el anteperíodo. El denominador es 90.

14 $x = 0,9$ entonces $10x = 9,9$ restando se tiene $9x = 9$ luego $x = 1$.

15 Es posible transformando el número decimal a fracción.

Página 17

1

- a) < c) > e) > g) < i) =
- b) < d) < f) < h) > j) >

2

- a) < c) > e) > g) < i) >
- b) > d) > f) < h) > j) <

3

- a) < b) > c) > d) < e) > f) <

4

- a) Martes b) Durante la mañana.

Página 18

5

- a) > c) > e) = g) < i) >
- b) > d) > f) > h) > j) =

6

- a) $-7 < -0,7 < 0 < 0,07 < 0,7 < 0,7 < 7$

- b) $-17,6 < -1,76 < 1,76 < 1,76 < 17,6$

- c) $-\frac{8}{3} < -\frac{1}{2} < -\frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{5}{4} < \frac{3}{2}$

- d) $-\frac{52}{10} < -\frac{23}{9} < \frac{25}{99} < \frac{2}{5} < \frac{42}{100} < \frac{5}{3} < \frac{25}{10}$

- e) $-\frac{92}{10} < -0,99 < 0,189 < 1,198 < \frac{7}{5}$

- f) $-2,243 < -\frac{56}{25} < -\frac{4}{7} < 0,04 < \frac{1}{2} < 0,5$

7

- a) Por ejemplo 8, ya que es mayor que $1,7\overline{6}$ y menor que 17,6.

- b) Por ejemplo 0, ya que es mayor que $-\frac{4}{7}$ y menor que 0,04.



8

- a) $\frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}$ e) $1,2\bar{4}; \frac{11}{9}; 1,2\bar{5}$
 b) $-0,56; -0,5\bar{4}; -0,5\bar{3}$ f) $\frac{17}{11}; 1,2; 1,5$
 c) $31,241; 31,2\bar{42}; 31,24\bar{3}$ g) $3,6; 4; 5,2$
 d) $-\frac{1}{7}, -\frac{7}{61}, -\frac{1}{6}$ h) $-0,3; 0; 1$

9

- a) Tiempo libre, limpiar habitación, hacer deporte, preparar examen.
 b) El automóvil B.
 c) La última persona.

Página 19

9

- d) Andrea ha leído 135 páginas.
 e) En la mañana
 f) Teclados y guitarras. eléctricas
 g) En la tarde.
 h) Al 10 de enero.
 i) $>, <$.

10 No le alcanza.

11 Las papas deben estar antes que los limones pues $3,25 > 3,2$.

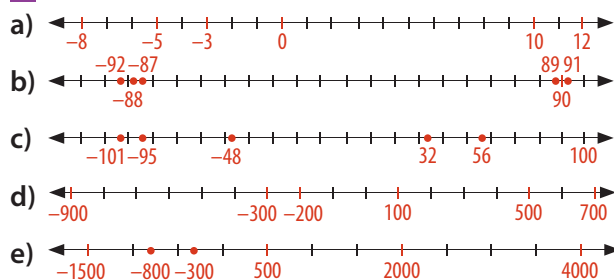
12 Transformar todos los números decimales a fracción y luego comparar.

13 Sean $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ y $d = 5$. Entonces, $\frac{1}{2} < \frac{3}{5}$. Luego, $a + c = 4$ y $b + d = 7$, por lo tanto se tiene que $\frac{1}{2} < \frac{4}{7} < \frac{3}{5}$.

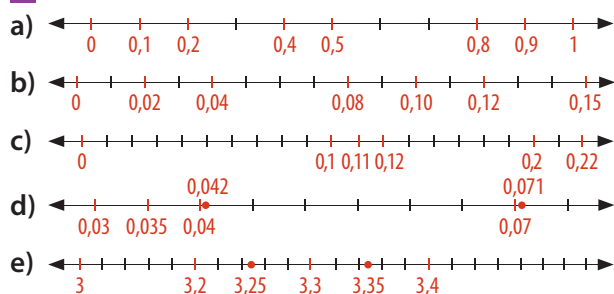
14 No, ya que al dividir una unidad en más partes cada parte es más pequeña.

Página 21

1

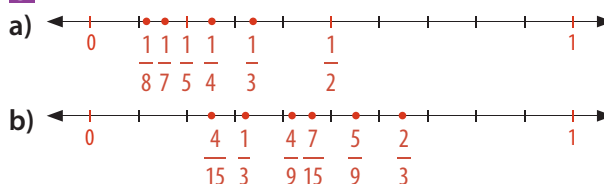


2



Página 22

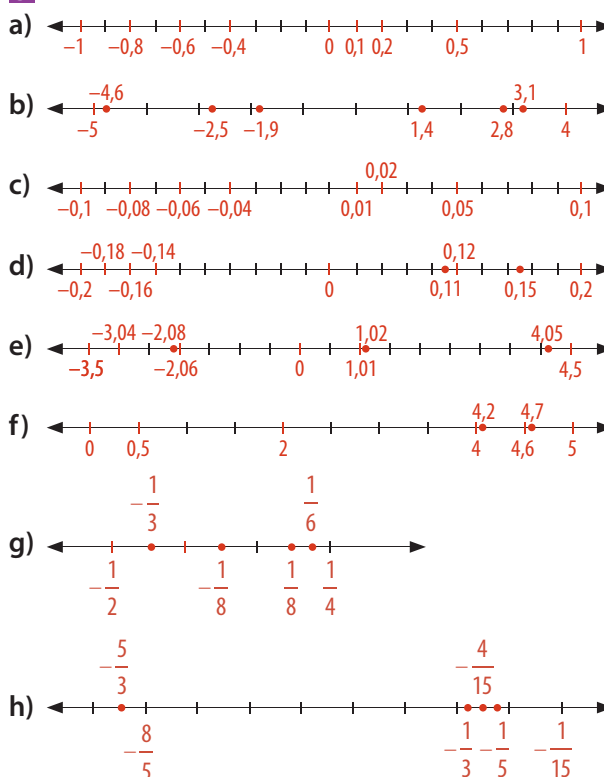
3



4

- a) $M = 1$ b) $N = 0,45$ c) $O = 1,25$

5



6

- a) Entre $-0,8$ y $-0,6$ l) Entre $0,05$ y $0,06$
 b) Entre $3,66$ y $3,68$ m) Entre $-0,11$ y $-0,10$
 c) Entre $0,5$ y $0,6$ n) Entre $0,56$ y $0,57$
 d) Entre $-0,7$ y $-0,6$ o) Entre $2,03$ y $2,04$
 e) Entre $-0,9$ y $-0,8$ p) Entre $-1,02$ y $-1,01$
 f) Entre $-1,4$ y $-1,3$ q) Entre $-2,37$ y $-2,36$
 g) Entre $1,7$ y $1,8$ r) Entre $12,34$ y $12,35$
 h) Entre $-1,7$ y $-1,6$ s) Entre $-0,809$ y $-0,808$
 i) Entre $0,10$ y $0,11$ t) Entre $-2,304$ y $-2,303$
 j) Entre $5,9$ y 6 u) Entre $-18,215$ y $-18,214$
 k) Entre $-0,02$ y $0,01$

7

- a) $1,25$ d) $0,018$ g) $-0,82 = -\frac{41}{50}$
 b) $5,5$ e) $-1,88$ h) $0,875 = \frac{7}{8}$
 c) $0,2\bar{6}$ f) $0,52 = \frac{13}{25}$ i) $9,125 = \frac{73}{8}$

8

- a) 8,5
b) -1

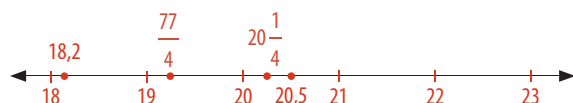
- c) 2,66
d) $0,7125 = \frac{57}{80}$

Página 23

9

- a) El eón Hadeano. Se divide la recta numérica en 60 segmentos de igual longitud, y se consideran los primeros 7 segmentos. Al término del segmento n° 7, queda ubicado $\frac{7}{60}$.

- b) Masas del carro



- En la semana 3. • En dos semanas, las semana 1 y 4.

- c) Carla: $17,70 \text{ kg/m}^2$ – Ignacio $25,86 \text{ kg/m}^2$ – Tomás $22,21 \text{ kg/m}^2$
Masas



Alturas



IMC



Tomás, Carla, Ignacio.

- 10 Sí, dado que podemos representar el punto $(1,6; 0)$.

- 11 Las separaciones en la recta no son proporcionales.

- 12 Se divide una recta en intervalos que contengan 10 divisiones pues las temperaturas están con una cifra decimal (a la décima), luego se ubican los datos.

- 13 Sí, convirtiendo el decimal a fracción.

Página 24

1

- a. 250 ml. Entero.
b. 2 kilos y medio. Racional no entero.
c. 1100 cajas de leches. Entero.
d. 15 días. Entero.
e. $24,797 \text{ cm}^2$. Racional no entero.
f. 3 horas. Entero.

2

- a. F, los números naturales no consideran a los números negativos.
b. V
c. F, pues $\sqrt{2}$ es irracional (no se puede escribir como fracción).
d. V
e. F, es un subconjunto de los números enteros positivos.
f. F, pertenece al conjunto de los números racionales.

g. V

h. V

3

- a. Sí, $\frac{1}{1}$ c. Sí, $-\frac{25}{1}$ e. Sí, $\frac{1}{1000}$ g. No
b. Sí, $\frac{1789}{300}$ d. No f. Sí, $\frac{2607}{100}$ h. Sí, $-\frac{122}{9}$

- 4 No, ya que multiplicó por 1000 en vez de 100.

5

- a. $x = 0, \overline{a}$ entonces
 $x = 0,aaa \dots$ y $10x = a,aaa \dots$ restando se tiene $9x = a$, luego $\frac{a}{9}$.
b. $x = 0, \overline{ab}$ entonces
 $10x = a,bbb \dots$ y $100x = ab,bbb \dots$ restando se tiene $90x = ab - a$, luego $\frac{a(b-1)}{90}$.
c. $x = 0,00\overline{ab}$ entonces
 $100x = 0,ababab \dots$ y $10000x = ab,abab \dots$ restando se tiene $9900x = ab$, luego $\frac{ab}{9900}$.
d. $x = 0,0\overline{bc}$ entonces
 $100x = b,ccc \dots$ y $1000x = bc,ccc \dots$ restando se tiene $900x = bc - b$, luego $\frac{b(c-1)}{900}$.

6

- a. F b. V c. F d. V

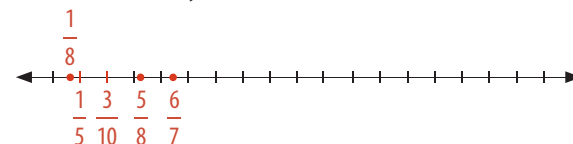
Página 25

7

$6 \div 2 = 3$	$15 \div 3 = 5$	$14 \div 7 = 2$
$5 \div 2 = 2,5$	$28 \div 8 = 3,5$	$13 \div 2 = 6,5$
$17 \div 3 = 5,666 \dots$	$25 \div 3 = 8,333 \dots$	$11 \div 9 = 1,222 \dots$
$1 \div 6 = 0,1666 \dots$	$5 \div 6 = 0,8333 \dots$	$35 \div 6 = 5,8333 \dots$

- a. El resto es 0. El cociente es entero.
b. El resto es 0. El cociente es decimal finito.
c. El resto es distinto de cero. El cociente es decimal infinito periódico.
d. El resto es distinto de cero. El cociente es decimal infinito semiperiódico.

- 8 a), b), c), d), e) y f).



9

- a. $0,032$; $0,0\overline{32}$; $0,03\overline{2}$; $0,03\overline{2}$; $0,320$
b. $\frac{3}{4}$; $0,7\overline{5}$; $\frac{7}{4}$; $1,7\overline{5}$; $7\frac{5}{9}$ c. $\frac{1}{8}$; $\frac{9}{8}$; $1\frac{125}{999}$; $\frac{557}{495}$; $\frac{1013}{900}$

10

- a. $\in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ d. $\in \mathbb{Q}$ g. $\in \mathbb{Q}$
b. $\in \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e. $\in \mathbb{Q}$ h. $\in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$
c. $\in \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ f. $\in \mathbb{Q}$ i. $\in \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$



11

- a. $-\frac{4}{3}$ b. $-\frac{2}{5}$ c. $-\frac{3}{6}$ d. $\frac{8}{5}$

12

- a. $-1,04$ b. $\frac{17}{12}$ c. $-\frac{7}{10}$ d. $\frac{1}{6}$

Página 28

1

- a) 3 d) 2 g) -100 j) 46
b) -18 e) 39 h) -5 k) -17
c) -5 f) -30 i) 28 l) -1

Página 29

2

- a) 0,4 e) 0,42
b) 8,36 f) 12,25
c) $1,8\bar{1}$ g) 1,28125
d) $3,8\bar{7}$ h) $1,639855343... = \frac{13150}{8019}$

3

- a) $5,125 = \frac{41}{8}$ c) $4,41\bar{6} = \frac{53}{12}$ e) $4,\bar{3} = \frac{13}{3}$
b) $1,0\bar{6} = \frac{16}{15}$ d) $6,3 = \frac{63}{10}$ f) $0,\bar{4} = \frac{4}{9}$

4

- a) $\frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$ g) $\frac{5}{3}$ m) -5,3
b) $-\frac{3}{8}$ h) $\frac{37}{60} = 0,61\bar{6}$ n) 4,89
c) $-\frac{1}{2}$ i) $-\frac{191}{105} = -1\frac{86}{105}$ o) -11,71
d) $\frac{9}{2}$ j) $\frac{247}{210} = 1\frac{37}{210}$ p) -114,4
e) $-\frac{6}{7}$ k) 1,1 q) $13,811\bar{5}$
f) $\frac{32}{15} = 2\frac{2}{15}$ l) -0,08 r) $-28,712\bar{1}$

5

- a) $\frac{92}{99} = 0,9\bar{2}$ c) $\frac{47}{45} = 1,0\bar{4}$ e) $-\frac{401}{990} = -0,40\bar{5}$
b) $-\frac{1}{5} = -0,2$ d) $\frac{86}{45} = 1,9\bar{1}$ f) $-\frac{181}{45} = -4,0\bar{2}$

6

- a) $-\frac{151}{20} = -7\frac{11}{20}$ b) $-\frac{43}{120}$ c) $-\frac{59}{16} = -3\frac{11}{16}$

7

- a) 108 e) $\frac{5}{4} = 2\frac{1}{4}$
b) $-\frac{16}{45}$ f) -9
c) $-\frac{2}{5}$ g) $0,9 = \frac{9}{10}$
d) $\frac{1}{6}$ h) $-2,56 = -\frac{64}{25}$

i) $26,775 = \frac{1071}{40}$

j) $-36,03 = -\frac{3603}{100}$

Página 30

8

- a) $-\frac{8}{9}$ g) $-5,18\bar{5} = -\frac{140}{27}$
b) $-\frac{46}{75}$ h) $-\frac{126}{47}$
c) $\frac{10}{3}$ i) $91,\bar{1} = \frac{820}{9}$
d) $\frac{1}{5}$ j) $-223,\bar{23} = -\frac{22100}{99}$
e) $-\frac{5}{3}$ k) $\frac{72}{203}$
f) $-\frac{8}{189}$ l) $-\frac{199}{576}$

9

- a) $\frac{12}{43}$ c) $-\frac{7}{2}$ e) $-\frac{39}{10}$ g) -99
b) $-\frac{1}{14}$ d) 1 f) 167 h) $\frac{26010}{293}$

10

-	-	-
+	+	-

11

- a) V. b) V. c) V.

12

- a) \$ 3782,25 f) $\frac{62500}{3}$ hectáreas.
b) 76 octavos de té.
c) 12 tercios de almendras. g) \$ 574,6
d) $\frac{800}{21}$ m² h) 10 trozos.
e) $\frac{5}{12}$ del terreno. i) 14 vasos.

Página 31

- j) 6 animales; 6,4kg
k) $V1 = \frac{7}{6}$ m³, $V2 = 16$ m³. 13 veces.
l) \$270
m) $\frac{13}{60}$
n) 10 500 monedas, \$55 500.
o) Como mínimo 200 personas y como máximo 500 personas.

13 $x = \frac{1}{27}$

14 En el segundo paso se debe realizar primero la multiplicación, o sea $\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5}$

15 Primero se transforma los decimales a fracción. Luego, se resuelven las operaciones dentro del paréntesis partiendo por la división y luego la resta. Después se realiza la multiplicación y por último la suma.

16 Sí, pues la asociatividad se cumple en los racionales.

17 Respuesta abierta.

18 Al que colocó 5 pasteles le corresponderían \$500 y al otro \$300 pesos.

Página 33

1

- a) 8 c) 19 e) 2 g) 6
b) 22 d) -65 f) -4 h) -2

2

- a) 5, entero.
b) -14, entero.
c) 29, entero.
d) -7,5, decimal finito.
e) -56, entero.
f) -44,05714286..., decimal semiperiódico.
g) -96, entero.
h) 498,9166666..., decimal semiperiódico.

3

- a) $\frac{7}{4}$ y $\frac{4}{7}$
b) 0 y 1,5 (solo si 0 es el dividendo, en otro caso la división de indefinida)
c) 105 y 90; $\frac{105}{90} = 1,1666666...$

4

- a) No se cumple b) Sí se cumple c) Sí se cumple

5

- a) Sean a y b números racionales: a dividido b es igual a k, y k pertenece a los números racionales.
b) 5 y 5,5 15 y $3\frac{5}{2}$
c) No, ya que $0 \in \mathbb{Q}$ y $\frac{7}{0}$ esta indefinido.

6

- a) Verdadero
b) Falso, $\frac{5}{9} = 0,55555...$
c) Verdadero
d) Falso, $5 - 9 = -4$
e) Verdadero
f) Falso, $\frac{10}{9} = 1,111111111111...$
g) Verdadero

7 Si $u = 0$ ó $r = 0$ la división se indefine.

8 No, ya que si dividimos 2 y $8\frac{2}{8} = 0,25$ el resultado no es un número natural.

Página 34

1

- a) A: 7, S: 9 d) A: 78, S: 80 g) A: 1199, S: 1201
b) A: 27, S: 29 e) A: 149, S: 151 h) A: 7989, S: 7991
c) A: 50, S: 52 f) A: 599, S: 601

2

- a) 6 b) 98 c) 70 d) 170

Página 35

3

- a) 10 c) 2 e) 5 g) -46 i) -30
b) 0 d) -3 f) -249 h) -130 j) 2

4

- a) $b = -1,4$ y $c = -1,6$ c) $b = -\frac{13}{25}$ y $c = \frac{34}{25}$
b) $b = 0,06$ y $c = 0$ d) $b = 1,70$ y $c = 1,74$

5

- a) $\frac{2}{7}$ b) $-\frac{3}{5}$ c) $\frac{9}{2}$

6

- a) No b) No c) Sí
d) $a = 0,5$ y $b = 1,5$ | $a = 2,5$ y $b = 3,5$ | $a = 5,5$ y $b = 6,5$

7 Respuesta abierta.

8 Hay finitos número enteros entre un millón y dos millones.

9 Porque entre dos números enteros la diferencia es siempre un entero.

Página 38

1

- a) 460 e) 637 i) 1,23
b) 860 f) 4 j) 4
c) 5700 g) 21,6 k) 0,790
d) 19600 h) 0,4 l) 9,010

2

- a) 5,1 c) 4,71 e) 0,7
b) -6,8 d) 0,001 f) -2,1313

3

- a) -7,5 c) -1,66 e) -80,6145
b) 1,75 d) 5,604 f) -0,11113

4

- a) 0,9 c) 90,02 e) 5,6
b) -9,2 d) 21,667 f) -60,88

5

- a) 0,96 c) 6,704 e) -1,22235
b) -5,83 d) -90,0623 f) -10,3

6

Redondear	Error
87,2	0,05
-2,11	0,001
6,236	0,0004
-13,2828	0,000028

7

Truncar	Error
-3,2	0
1,377	0,0007
-5,00	0,007
28,1323	0,000023



- 8**
a) 4c.s. b) 4c.s. c) 4c.s. d) 4c.s. e) 1c.s. f) 3c.s.

9	0,3	2	3,1	0,10	1,80	2,09
----------	-----	---	-----	------	------	------

Página 39

- 10**
a) 2,409 c) 3 e) 0,051 g) 5,7
b) 5,17 d) -3,7 f) 14 h) 3
- 11**
a) 0,5 b) 6,7 c) 1 d) 91,4 e) 26 f) 0,01

- 12**
a) Menor a 4,9. d) 4,4g
b) \$2274, redondear e) 0,26g
c) 16, truncar

- 13** 5 c.s.

- 14** Consideró 4 c. s. en vez de 3.

- 15** Se realiza el producto entre 0,020 y 1,20 y la división entre 0,108 y 1,20. Luego, se restan los resultados obtenidos y se consideran 2 c. s. (Se resuelve aplicando la prioridad de operaciones)

- 16** Respuesta abierta.

Página 42

- 1** Tabla redondeo

0,33	0,004
10,9	0,0109
-35,4752	0
1	0,001
-2,342	0,0002

- Tabla truncamiento

2,45	0,0071
-25,8	0,03579
899,9999	0
-10	0,8756
1,111	0,000122

- 2**
a) 3c.s. d) 3c.s. g) 4c.s. j) 3c.s.
b) 4c.s. e) 3c.s. h) 4c.s. k) 4c.s.
c) 2c.s. f) 2c.s. i) 5c.s. l) 3c.s.

- 3**
a) Redondeo c) Truncamiento e) Truncamiento
b) Truncamiento d) Truncamiento f) Truncamiento

- 4**
a) 0,56875 d) 4,128571429 g) -10,06
b) -3,916 e) 2,0091 h) 14,706
c) -1,203 f) 2,0216

- 5**
a) 0,003
b) 1,27
c) 0,003
d) son iguales
e) Al redondear los números involucrados antes de realizar la operación, el resultado es el mismo si en cambio se trabaja con los valores reales y se redondea el resultado final.

- 6**
a) 0,3 b) -1 c) 0,3 d) son iguales

- e) Al truncar los números involucrados antes de realizar la operación, el resultado es el mismo si en cambio se trabaja con los valores reales y se truncara el resultado final.

Página 43

- 7**
a) $2,471271651 \times 10^{13}$
b) Finito, tiene una cantidad finitas de cifras decimales.
c) $2,471271651000000000000000$
d) 2,47
e) 2,47; Si, pues la cifra decimal siguiente a la centésima es menor que 5.
f) Infinito, pues es un número infinito periódico
g) Sí.

8

- a) 13,73 cm b) 3,45 cm² c) 492,8m³ d) -17,33 °C

- 9** $9,04 \times 10^{10}$ N.

- 10** No es un número irracional, es un número decimal periódico y este fue redondeado.

- 11** Observando la última cifra decimal que aparece en la calculadora | aproximo | dependiendo del problema se aproxima o trunca | redondeo | resulta lo mismo en aproximar datos o aproximar el resultado final.

- 12** Sí, pues al redondear el número en algunos casos aumenta.

- 13** Respuesta abierta.

Página 44

- 1**
a. $-\frac{49}{2}$ d. $-\frac{13}{24}$ g. $\frac{5}{72}$ j. 110
b. $-\frac{5}{8}$ e. $-\frac{20}{27}$ h. $\frac{13}{16}$ k. $\frac{275}{48}$
c. $\frac{5}{18}$ f. $\frac{57}{110}$ i. $\frac{10}{27}$ l. $-\frac{25}{8}$

2	Redondeo	Truncamiento
a)	21,9	21,9
b)	-7,10	-7,09
c)	8,3	8,3
d)	2,11	2,10
e)	-18,1	-18,0
f)	91	90
g)	0,0089	0,0088

- 3**
a. Se debería redondear a la décima, ya que el promedio obtenido es $4,98\bar{3}$, entonces se obtiene 5,0 que es la nota de eximición.
b. \$16 642. Redondeo.
c. \$1 714 286 pesos. A la unidad
d. $\frac{1}{15}$. Aprox. 47 m
e. $\frac{47}{63}$. Aprox. la mayor recibirá \$214 286, la del medio \$166 667 y la menor \$1 119 048.

Página 45

- 4**
a. $\frac{3}{20}$ **e.** 1800 pasos
b. $\frac{2}{9}$, 10 estudiantes. **f.** 7680 latidos
c. Aprox. 369 g **g.** 67,5g
d. Aprox. 107 vueltas.
- 5**
a. V **b.** F **c.** V **d.** V **e.** F **f.** F
- 6** Posibles respuestas:
a. 0,12 y 0,18 **f.** -13,244 y -13,247
b. 2,83 y 2,85 **g.** 0,0011 y 0,0018
c. -5,25 y -5,28 **h.** 5,8033 y 5,8036
d. 0,013 y 0,017 **i.** -60,0073 y -60,0078
e. 7,263 y 7,267
- 7**
a. 0,5; 0,7; 0,2 **e.** $-\frac{13}{20}, \frac{63}{100}, \frac{29}{45}$
b. -0,2; 0,01 **f.** -2,23; $-\frac{101}{45}, -2,21$
c. 0,3; 0,4; 0,5 **g.** -1; 0; 1
d. 1,21; $1,2\overline{13}$; $1,2\overline{17}$ **h.** $-0,\dot{1}$; 0; -0,2
- 8** No, solo $\frac{5}{6}, \frac{6}{6}, \dots, \frac{15}{6}$.
9 No, solo 0,91; 0,92; ...; 1,09.
10 No, solo 0,111; 0,112; ...; 0,119.

Página 47

- 1** $\frac{7}{40}$
2 2135 pruebas.
3 Aprox. 322,3 km.
4 $\frac{113}{360}$
5 $\frac{1}{8}$. 50 hojas.
6 6 trozos. No, ya que 2 no es la mitad de 6.
7 $\frac{1}{7}$
8 $\frac{4}{15}$. $X \rightarrow \$200\,000$, $Y \rightarrow \$240\,000$, $Z \rightarrow \$160\,000$
9 50 L. 250 L.

Página 49

- 1**
a) 5^6 **b)** $(-6)^3$ **c)** $(-3)^4$ **d)** 111^4 **e)** $(-8)^3$ **f)** 12^5
- 2**
a) $-11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11$ **d)** $44 \cdot 44 \cdot 44$
b) $-2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ **e)** $(-22) \cdot (-22) \cdot (-22)$
c) $(-7) \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7)$ **f)** $123 \cdot 123 \cdot 123 \cdot 123$

Página 50

- 3**
a) -243 **b)** 3125 **c)** $\frac{332}{3}$ **d)** 432
- 4**
a) $8 \cdot 8, -8 \cdot -8$
b) $11 \cdot 11, -11 \cdot -11$
c) $13 \cdot 13, -13 \cdot -13$
d) $25 \cdot 25, -25 \cdot -25$
e) Porque al multiplicar dos números con el mismo signo, el resultado es positivo.
- 5**
a) $\left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{1}{625}$ **e)** $\left(\frac{1}{12}\right)^6 = \frac{1}{2985984}$
b) $\left(\frac{1}{8}\right)^4 = \frac{1}{4096}$ **f)** $\left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$
c) $\left(\frac{1}{10}\right)^6 = \frac{1}{1000000}$ **g)** $-\left(\frac{1}{7}\right)^2 = -\frac{1}{49}$
d) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ **h)** $-\left(\frac{1}{9}\right)^3 = -\frac{1}{729}$
- 6**
a) -3^{-5} **c)** 9^{-6} **e)** $(-2)^{-5}$ **g)** $(-5)^{-4}$
b) 10^{-6} **d)** $(-1)^{-4}$ **f)** $(-3)^{-3}$ **h)** -3^{-2}
- 7**
a) $\frac{1}{81}$ **e)** $-\frac{1}{1024}$ **i)** $-\frac{1}{81}$
b) $-\frac{1}{512}$ **f)** $\frac{1}{243}$ **j)** $-\frac{1}{2048}$
c) $\frac{1}{1296}$ **g)** -1 **k)** $\frac{1}{512}$
d) $\frac{1}{3125}$ **h)** -1 **l)** $\frac{1}{2401}$
- 8**
a) $\frac{7}{216}$ **b)** $\frac{5}{16}$ **c)** $-\frac{4}{125}$ **d)** $\frac{15}{256}$
- 9**
a) $\frac{1}{3125}$ **c)** $\frac{1}{1296}$
b) $\frac{1}{262144}$ **d)** $\frac{1}{429981696}$
- 10**
a) $\frac{1}{16}$ **f)** 1 **k)** $-\frac{5}{4}$
b) 0,25 **g)** 4,75 **l)** -15,625
c) $\frac{1}{256}$ **h)** $\frac{27}{64}$ **m)** 2,44140625
d) $\frac{1024}{2187}$ **i)** $-\frac{32}{243}$ **n)** -20,25
e) $\frac{9}{25}$ **j)** $-\frac{1}{81}$ **o)** -20,25



11

- a) 262 144 b) 19 683 c) $\frac{1}{9216}$ d) $-\frac{125}{64}$

Página 51

12

- a) $20 \cdot 3^8 = 131220$ bacterias.
 b) 7 casas, $7^2 = 49$ gatos, $7^3 = 343$ ratones,
 $7^4 = 2401$ espigas de trigo, $7^5 = 16807$ hekats.
 c) • 4 cm • 12 triángulos • 7,1 cm aprox.
 d) • 8 m^2 • $64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
 e) • \$1 518 750. • $G_s = \$\left(\frac{3}{2}\right)^{s-1} \cdot 200\,000$.
 • $G_m = \$\left(\frac{9}{10}\right)^{m-1} \cdot 2\,200\,000$. • $G_{\text{diciembre}} = \$947\,028$.

13 Sí

14 El signo del exponente lo colocó dentro del paréntesis en vez de invertir el orden del numerador y del denominador.

Página 54

1

- a) 2^6 f) $(-1)^{27}$
 b) 5^{11} g) $(-2)^{32}$
 c) 2^{10} h) $(-4)^{14} = 4^{14}$
 d) 2^{15} i) 3^6
 e) $(-6)^{10}$ j) -1^{6800}

2

- a) 3^{-2} c) 2^{15} e) 5^7 g) $(-13)^{17}$ i) $(-20)^4$
 b) 4^{-3} d) $(-1)^{-2}$ f) $(-11)^6$ h) 1^{-2} j) 1^{39}

Página 55

3

- a) 3^6 d) $(-2)^5$ g) $(-1)^{12}$
 b) 5^4 e) $(-7)^{12}$ h) $(-1)^{24}$
 c) 3^{16} f) $(-2)^{56}$ i) $(-4)^{70}$

4

- a) 5^6 c) 3^3 e) 5^6 g) $(-8)^7$ i) $(-9)^3$
 b) $(-2)^4$ d) $(-1)^2$ f) 4^{18} h) 4^2 j) $(-1)^5$

5

- a) $\left(\frac{1}{2}\right)^7$ c) $\left(-\frac{1}{3}\right)^7$ e) $\left(\frac{1}{2}\right)^9$
 b) $\left(\frac{5}{3}\right)^1$ d) $\left(-\frac{2}{5}\right)^2$ f) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

6 Por ejemplo:

- a) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$ d) $\left(-\frac{7}{12}\right)^{-30} \cdot \left(-\frac{7}{12}\right)^{15}$
 b) $\left(\frac{8}{9}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{-5}$ e) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^1$
 c) $\left(-\frac{11}{4}\right)^3 \cdot \left(-\frac{11}{4}\right)^{-4}$ f) $\left(-\frac{23}{45}\right)^{-5} \cdot \left(-\frac{23}{45}\right)^{-5}$

7

- a) $\left(\frac{4}{5}\right)^7$ c) $\left(\frac{22}{3}\right)^3$ e) $\left(\frac{29}{8}\right)^{-4}$
 b) $\left(\frac{3}{16}\right)^{-2}$ d) 76^{-2} f) $-\left(\frac{1}{20}\right)^3$

8 Por ejemplo:

- a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^{-1}$ f) $\left(\frac{5}{10}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{41}{10}\right)^{-1}$
 b) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-8} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{-8}$ g) $\left(\frac{7}{3}\right)^{-10} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{-10}$
 c) $\left(\frac{10}{59}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^{-2}$ h) $\left(\frac{2}{9}\right)^{-20} \cdot \left(\frac{46}{10}\right)^{-20}$
 d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{9}{34}\right)^{-3}$ i) $\left(-\frac{161}{3}\right)^{-25} \cdot \left(\frac{2}{33}\right)^{-25}$
 e) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-4}$

9

- a) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$ c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-8}$ e) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$
 b) $\left(-\frac{7}{9}\right)^{-4}$ d) $\left(-\frac{4}{5}\right)^{-7}$ f) $\left(\frac{1}{4}\right)^{15}$

Página 56

10 Por ejemplo:

- a) $\left(\frac{3}{8}\right)^1 \div \left(\frac{3}{8}\right)^{-6}$ f) $\left(\frac{16}{5}\right)^2 \div \left(\frac{16}{5}\right)^3$
 b) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \div \left(\frac{1}{3}\right)^7$ g) $\left(\frac{2}{9}\right)^4 \div \left(\frac{2}{9}\right)^7$
 c) $\left(-\frac{15}{2}\right)^8 \div \left(-\frac{15}{2}\right)^9$ h) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 \div \left(-\frac{2}{3}\right)^6$
 d) $\left(-\frac{17}{16}\right)^{-3} \div \left(\frac{17}{16}\right)^6$ i) $\left(-\frac{13}{9}\right)^1 \div \left(-\frac{13}{9}\right)^7$
 e) $\left(\frac{3}{5}\right)^0 \div \left(\frac{3}{5}\right)^2$

11

- a) $\left(\frac{3}{16}\right)^8$ d) $\left(\frac{25}{6}\right)^{-1}$
 b) $\left(\frac{27}{50}\right)^2$ e) $\left(\frac{4}{11}\right)^{-2}$
 c) $\left(\frac{243}{112}\right)^{-5}$ f) $\left(\frac{10\,988}{6237}\right)^3$

12 Por ejemplo:

- a) $\left(\frac{3}{1}\right)^{-9} \div \left(\frac{9}{4}\right)^{-9}$ d) $\left(-\frac{8}{16}\right)^{-12} \div \left(\frac{4}{9}\right)^{-12}$
 b) $\left(\frac{9}{32}\right)^{-3} \div \left(\frac{2}{9}\right)^{-3}$ e) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-6} \div \left(\frac{1}{2}\right)^{-6}$
 c) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-10} \div \left(\frac{1}{17}\right)^{-10}$ f) $\left(-\frac{3}{10}\right)^{-13} \div \left(\frac{10}{63}\right)^{-13}$

g) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-8} \div \left(\frac{3}{21}\right)^{-8}$ i) $\left(\frac{31}{90}\right)^{-19} \div \left(\frac{1}{6}\right)^{-19}$
h) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-8} \div \left(\frac{30}{91}\right)^{-8}$

13

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$ c) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$ e) $\left(-\frac{3}{19}\right)^0$
b) $\left(\frac{8}{7}\right)^{-3}$ d) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-10}$ f) $0,2^{16}$

14 Por ejemplo:

a) $\left(\left(\frac{1}{8}\right)^{-3}\right)^2$ d) $\left(\left(-\frac{13}{16}\right)^9\right)^2$ g) $\left(\left(\frac{51}{9}\right)^4\right)^2$
b) $\left(\left(\frac{10}{7}\right)^{-1}\right)^{-1}$ e) $\left((-1)^6\right)^{-60}$ h) $\left(\left(-\frac{4}{3}\right)^8\right)^3$
c) $\left(\left(-\frac{11}{8}\right)^{-6}\right)^3$ f) $\left(\left(\frac{11}{10}\right)^8\right)^2$ i) $\left(\left(\frac{194}{90}\right)^{-10}\right)^2$

15

a) $(-2)^2 \cdot 5^{-4}$ c) $(0, \bar{1})^{-3}$ e) $(1,2)^5$
b) 1 d) 49 f) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-6}$

16

a) c b) e c) d d) f e) a f) b

Página 57

17

a) e b) c c) f d) a e) d f) d

18

a) $0,0625 \text{ m}^2$ c) $\frac{1}{729} \text{ cm}^3$ e) $\left(\frac{13}{8}\right)^8 \text{ m}^2$ g) $\left(\frac{5}{2}\right)^3 \text{ cm}^2$
b) $\frac{15625}{729} \text{ cm}^2$ d) $\left(\frac{11}{9}\right)^9$ f) $\left(\frac{4}{3}\right)^9 \text{ cm}^3$

19

a) Positivo. b) Positivo. c) $\mathbb{Z} - \{0\}$ d) Sí.

20 Mantuvo el signo - de la potencia al cuadrado.

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = (-1)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = -1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = -4$$

21

- a) Primero, el número $-0,8\bar{3}$ se transforma en fracción y luego se aplica la propiedad de potencia de la multiplicación, manteniendo la base y sumando los exponentes.
b) Mantener la base y multiplicar los exponentes según la propiedad potencia de una potencia, luego aplicar la propiedad de exponente negativo a la base y por último resolver la potencia resultante.

22

a) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}} = \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^m}{\left(\frac{1}{b}\right)^m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m \cdot \left(\frac{b}{1}\right)^m = \frac{b^m}{a^m} = \frac{1}{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m}$

b) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}} = \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^m}{\left(\frac{1}{b}\right)^m} = \left(\frac{1}{a} \cdot \frac{b}{1}\right)^m = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

23 $\frac{27}{18} x^2 y^2 \cdot x^3 \cdot y^{-3} = \frac{3}{2} x^{2+3} y^{2-3} = \frac{3}{2} x^5 y^{-1} = \frac{3x^5}{2y}$

Página 60

1

a) -7 c) -6 e) -10 g) 49
b) 89 d) 379 f) 63 h) 610

2

a) 6,2 c) 15 e) $\frac{47}{20}$ g) $\frac{13}{4}$
b) 34,29 d) 12,8 f) $\frac{23}{12}$ h) $\frac{75}{14}$

3

a) 3^5 c) $\frac{117147}{4194304}$ e) $\frac{64}{15625}$ g) $\frac{2401}{125}$
b) 17210368 d) $-\frac{59049}{32}$ f) $(-0,7)^{-10}$ h) 40

4

a) $-\frac{297}{112}$ d) $-\frac{4}{3}$ g) $\frac{2376}{25}$ j) $\frac{15}{7}$
b) $-\frac{54}{25}$ e) $-\frac{2276}{2397}$ h) 21 k) $\frac{51}{10}$
c) $-\frac{21}{20}$ f) $-\frac{15}{896}$ i) $\frac{13}{8}$ l) $\frac{135}{28}$

5

a) $\frac{9}{4}$ d) $\frac{24}{19}$ g) $-\frac{763}{360}$ j) $\left(\frac{405}{896}\right)^2$
b) $\frac{400}{441}$ e) $\frac{625}{36}$ h) -105 k) $\frac{835}{88}$
c) $\frac{529}{144}$ f) $-\frac{15}{896}$ i) $\frac{65}{28}$ l) $-\frac{5}{252}$

Página 61

6

- a) $A = 25,76 \text{ cm}^2$ aprox. Lado = $5,075 \text{ cm}$
b) $V = 1,728 \text{ cm}^3$
c) $A = 8,64 \text{ cm}^2$
d) $V = \frac{1}{27} \text{ cm}^3$, $A = \frac{2}{3} \text{ cm}^2$. Primero se transforma el decimal periódico a fracción y luego se aplican las formulas del volumen y del área.
e) $A = 1,40 \text{ m}^2$ aprox.
f) $A = \frac{961}{324} \pi \text{ cm}^2$
g) $P = \frac{31}{9} \pi \text{ cm}$



h) $A = \frac{25}{9}\pi \text{ cm}^2$, $P = \frac{10}{3}\pi \text{ cm}$. Primero se transforma el decimal periódico a fracción y luego se aplican las formulas de área y del perímetro.

i) $V = 1,77 \text{ m}^3$

j) $A = \frac{9}{4}\pi \text{ cm}^2$

k) $V = \frac{343}{162}\pi \text{ cm}^3$, $A = \frac{49}{9}\pi \text{ cm}^2$. Primero se transforma el decimal semiperiódico a fracción y luego se aplican las formulas del volumen y del área.

l) $h = \frac{10}{9} \text{ cm}$

m) $V = \frac{11}{243}\pi \text{ cm}^3$. Primero se transforma el decimal periódico a fracción y luego se aplica la fórmula del volumen.

n) $V = \frac{896}{243}\pi \text{ cm}^3$

o) Aprox. 3,57 cm.

Página 62

7

a) 108 km/h

b) Aprox. 36,7 km

c) 2 720 000 J

d) 30 m/s

e) Disminuye en 80 000 J

f) $5,336 \cdot 10^{-10} \text{ N}$

g) La fuerza disminuye y queda en $1,334 \cdot 10^{-10} \text{ N}$.

h) Sí.

8

a) Determinar el tiempo de llenado | Dividir la cantidad total por la cantidad de litros por minutos | 14,76 y 16,53 aprox. | Para comprobar multiplico el BLA | Al verter $3\frac{3}{4}$ litros por minutos el llenado demora un mayor tiempo.

b) \$1714 aprox.

c) Aprox. \$377 911

d) 44 cm

e) 2,109375 kg

Página 63

8

f) • se parte con x cantidad de bacterias, entonces:
a la media hora hay $3x$ bacterias.

a la hora hay 3^2x bacterias.

a la hora y media hay 3^3x bacterias.

a las dos horas hay 3^4x bacterias.

a las dos horas y media hay 3^5x bacterias.

a las tres horas hay 3^6x bacterias.

a las tres horas y media hay 3^7x bacterias.

A las cuatro horas hay 3^8x bacterias.

• 72900 bacterias.

• 4 horas y media.

g) • 0,9 km

• $\left(\frac{3}{2}\right)^5 \cdot 0,6$

• Calcular lo recorrido en las tres primeras semanas y ver la relación entre ellas.

• Entender, planificar, resolver, revisar y comprobar.

• 3 semanas.

• División y potencias.

• Utilizar una tabla puede ser un tipo de estrategia.

9 $7,336 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ aprox.

10 No aplicó correctamente la potencia a la fracción.

11 - Se transforma los decimales infinitos periódicos a fracción.

- Se resuelve el interior de cada paréntesis por separado.

- Se resuelve la potencia del primer paréntesis.

- Se efectúa la multiplicación.

- Se efectúa la división.

12 La propiedad del exponente negativo en las potencias.

Página 64

1

$$\text{a. } \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$$

$$\text{d. } -\left(\frac{1}{8}\right)^2 = -\frac{1}{64}$$

$$\text{g. } -(-1)^{100} = -1$$

$$\text{b. } \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

$$\text{e. } -\left(-\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

$$\text{h. } -1^{1025} = -1$$

$$\text{c. } \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$$

$$\text{f. } \left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$$

2

$$\text{a. } \frac{2}{9}$$

$$\text{c. } \frac{205}{1764}$$

$$\text{e. } -1$$

$$\text{b. } \frac{13}{75}$$

$$\text{d. } \frac{1000}{81}$$

$$\text{f. } \frac{3137}{64}$$

3

$$\text{a. } \frac{1}{64}$$

$$\text{c. } -\frac{1}{32}$$

$$\text{e. } -\frac{1}{81}$$

$$\text{g. } \frac{12769}{8100}$$

$$\text{i. } \frac{1}{3125}$$

$$\text{b. } \frac{125}{27}$$

$$\text{d. } 36$$

$$\text{f. } \frac{1000}{27}$$

$$\text{h. } -\frac{1}{64}$$

$$\text{j. } \frac{9}{256}$$

4

a. Falso, es 1

b. V

c. Falso, pues $(-2)^{-3} = -\frac{1}{8} < 0$

d. Falso, depende de la base.

e. Falso, puede ser un número racional.

5

$$\text{a. } -2$$

$$\text{e. } \frac{1}{64}$$

$$\text{i. } 1$$

$$\text{b. } 64$$

$$\text{f. } -\frac{1}{7^{19}}$$

$$\text{j. } \frac{243}{1024}$$

$$\text{c. } 205962976$$

$$\text{g. } 16$$

$$\text{k. } \frac{1}{64}$$

$$\text{d. } \frac{1}{125}$$

$$\text{h. } -\frac{1}{25}$$

$$\text{l. } \frac{4}{625}$$

Página 65

6

a. $\left(\frac{2}{3}\right)^8 m^2$ b. $\left(\frac{1}{3}\right)^3 m^3$ c. $1,78125 m^2$

7

a. $\frac{576}{169}$ b. -2 c. $-\frac{3375}{2197}$ d. $-\frac{27}{16}$ e. 36

8

a. $\frac{3}{4}\sqrt{5} m$ e. $4 cm$
 b. $\frac{5}{2} m$ f. $1950 m$
 c. $113,04 cm^3$ g. Aprox. $688\,743 N$
 d. $1,5 cm^2$

Página 67

1

a.

Períodos de 5700 años	Unidades de carbono 14
0	1000
1	500
2	250
3	125
4	62,5

- b. Que han pasado 4 períodos de 5700 años.
 c. $\left(\frac{1}{2}\right)^p \cdot C$, siendo p la cantidad de períodos de 5700 años y C la cantidad inicial de carbono 14.

2 Aprox. $23,73 cm$.

3 $A = 3,125 cm^2$

4 $1\,000\,725 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^7$ habitantes.

5 $0,729 atm$.

Página 68

1 El caso correcto es el 2.

En el caso incorrecto se resolvió mal la división entre 2 y $\frac{2}{5}$.

2

a. $\frac{11}{21}$ b. $-\frac{5}{6}$ c. $\frac{90}{23}$ d. $\frac{1379}{8}$

Página 69

1 El caso correcto es el 1.

El error se cometió al elevar al cuadrado solo la cifra después de la coma y no el número decimal completo.

2

a. 8000 c. $0,5625$
 b. $1,5625 \cdot 10^{16}$ d. $0,0625$

Página 71

a. $1,41 < 1,4\bar{1}$ b. $2,308 < 2,\bar{3}$ c. $6,13 < 6,\bar{13}$
 $< 1,4\bar{1}$ $< 2,38$ $< 6,\bar{13}$
 a. $\frac{4}{9}$ b. $\frac{57}{20}$ c. $-\frac{25}{372}$ d. 0

Página 72

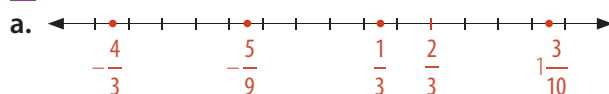
1

a. V b. V c. F , es racional.

2

a. $\frac{3}{8} < \frac{9}{8}$ b. $-\frac{5}{3} < \frac{3}{5}$ c. $-3,\bar{2} < -3,2$ d. $\frac{4}{6} < \frac{12}{13}$

3



4

a. $\frac{5}{12}$ d. $\frac{1}{81}$ g. 625 gramos.
 b. $\frac{50}{21}$ e. $71,75$ hectáreas. h. Aprox. $\$9143$.
 c. $\frac{3}{5}$ f. Aprox. $1,7 km$

5

a. V b. F

Página 73

6

a. $\left(\frac{1}{6}\right)^1 = \frac{1}{6}$ d. $\left(\frac{1}{-5}\right)^3 = -\frac{1}{125}$ g. $-\left(\frac{1}{9}\right)^3 = -\frac{1}{729}$
 b. $\left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}$ e. $(-1)^{10} = 1$ h. $-\left(\frac{1}{11}\right)^3 = -\frac{1}{1331}$
 c. $\left(\frac{1}{-2}\right)^6 = \frac{1}{64}$ f. $-\left(\frac{1}{-6}\right)^2 = -\frac{1}{36}$

7

a. 8 c. -8 e. $\frac{100}{81}$ g. 16
 b. $\frac{16}{9}$ d. $\frac{64}{25}$ f. $-\frac{2}{7}$ h. $\frac{8}{3375}$

8

a. 5 b. 2 c. $\frac{9}{16}$ d. 8 e. $\frac{27}{100}$ f. 81

Página 73

9

a. $\frac{11}{18}$ d. $\frac{16}{125}$ g. $\frac{1}{16}$ j. $96 m^2$
 b. $\frac{1}{9}$ e. $-\frac{1}{4}$ h. -6 k. $\frac{\pi}{6} m^3$
 c. $\frac{1}{4}$ f. $\frac{1}{64}$ i. $\frac{223}{175}$ l. $10 m/s$

Evaluación parte I

Página 74

1. D 3. C 5. B 7. D
 2. E 4. E 6. C 8. D

Página 75

9. E 11. C 13. A 15. B 17. D
 10. D 12. E 14. C 16. E



Página 76

18. A 20. B 22. D 24. D 26. B
19. B 21. B 23. E 25. C

Evaluación parte II

1

- a. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ b. $\mathbb{Q}$ c. $\mathbb{Q}$ d. $\mathbb{Q}$

Página 77

2

- a. 356,25 km b. $\frac{1}{3}$ c. Aprox. 13,43 m

3

- a. V b. V

4

- a. 4000
b. 0,2
c. 128
d. Se multiplicó el valor dado por 2-2 y ese resultado por 103. Luego se dividió por 4.

5

- a. 618 b. $\frac{51}{304}$

Desafío "La moneda misteriosa"

Al juntar los pollo y vender cinco por tres monedas, cambiaron su precio original, y de ahí sale la moneda de más. En efecto, el primero vendía dos pollos por una moneda, es decir a $\frac{1}{2}$ moneda cada pollo. El segundo vendía tres pollos por dos monedas, es decir, a $\frac{2}{3}$ de moneda por pollo. Al juntarlos conseguían $\frac{3}{5}$ de moneda por cada pollo. El primer granjero ganaba con el nuevo precio $\frac{1}{10}$ de moneda por cada pollo ($\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$) y, por consiguiente, de la venta de los 30 pollo recibía 3 monedas de más de las que conseguía anteriormente. En cambio, el segundo granjero perdía $\frac{1}{15}$ de moneda por cada pollo ($\frac{3}{5} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{15}$) y, con la venta de sus 30 pollo obtenía 2 monedas menos que antes.

Unidad 2

Página 80

1

- a. Masa c. Cantidad de libros
b. Recaudación (\$) d. Energía liberada

2

- a. Variable independiente: país – Variable dependiente: escudo.
b. Variable independiente: día – Variable dependiente: precio del computador.
c. Variable independiente: kilogramos – Variable dependiente: precio.

3

- a. $a = 21, b = 8$ b. $a = 36, b = 15$

4

- a. 4095 ampliaciones. c. 1480 botellas.
b. 9 días / 7,5 días. d. $13,5142857$ m.
e. $5,5$ kilopondios

Página 81

5

- a. No b. Sí c. Sí

6

- a. $\text{Dom}(f(x)) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ / $\text{Rec}(f(x)) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
b. $\text{Dom}(g(x)) = \{10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24\}$ / $\text{Rec}(g(x)) = \{12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26\}$
c. $\text{Dom}(h(x)) = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ / $\text{Rec}(h(x)) = \{-4, -2, 0, 2, 4, 6\}$

7

- a. $\{a, b, c, d\}$ c. 4
b. $\{1, 3, 4\}$ d. 4

8

- a. $L = \frac{K}{0,5}$, L: cantidad de litros de jugo – K: cantidad de kilogramos de manzanas.
b. $G = L(800 - 2x)$, G: ganancia – L: cantidad de litros de jugo vendidos.

9

- a. $12 = 2x + 2 \cdot 3$, x: cantidad de bolsas de 2K. $\rightarrow x = 3$.
b. $15000 = 30 \cdot 100 + x \cdot 50$, x: cantidad de monedas de \$50. $\rightarrow x = 240$.
c. $2 \times G + 4 \times 6 = 100$, G: cantidad de gallinas. $G = 38$.

Página 83

1

- a) $3x$ b) $x + 3$ c) $3x + 2$ d) $\frac{x}{3} - 1$

2

- a) 50 b) -1 c) 0 d) $\frac{1}{5}$

3

- a) Las expresiones son equivalentes pero la primera está definida para un valor particular mientras que la segunda para una variable.
b) Que al referirse a una variable no se deben indicar todos los casos particulares.

4

- a) $5x$
 b) $2x$
 c) $2x - 1$
 d) $x + 1$
 e) $x - 1$
 f) $x, x + 1$
 g) $2x, 2x + 2, 2x + 4$
 h) $2x - 1, 2x + 1, 2x + 3$
 i) $(2x + 2) - 2x$
 j) $(2x + 7) + (2x + 8) + (2x + 9)$
 k) x^2

5

- a) Un múltiplo de dos.
 b) Un múltiplo de cuatro.
 c) El triple de un número disminuido en una unidad.
 d) El doble de un número aumentado en trece unidades.
 e) El cuádruplo de la diferencia entre un número y uno.
 f) La suma de dos números impares consecutivos.
 g) La diferencia entre el doble del cuadrado de un número y su cubo.
 h) La diferencia entre el cubo de un número y el cuadrado de otro.

6

- a) a^2
 b) $4a$
 c) a^3
 d) $c^2 = a^2 + b^2$
 e) $\frac{A_b \cdot h}{3}$
 f) $\frac{n(n-3)}{2}$

Página 84

7

- a) El área de un triángulo corresponde la mitad del producto entre la medida de la base y la medida de la altura.
 b) La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180° .
 c) La velocidad corresponde al cociente entre la distancia y el tiempo.
 d) La fuerza gravitacional corresponde al producto entre la constante de gravitación y las masas, dividido por el cuadrado de la distancia entre ellas.
 e) El volumen de una pirámide corresponde a un tercio del producto entre el área basal y la altura.

8

- a) Constantes $\rightarrow$ cantidad de monedas grandes y cantidad de monedas chicas.
 Variables $\rightarrow$ valor de la moneda grande y valor de la moneda chica.
 b) Constantes $\rightarrow$ valor del cargo fijo y valor por cm^3 consumido.
 Variables $\rightarrow$ valor de la cuenta total y la cantidad de litros consumidos.
 c) Constantes $\rightarrow$ El perímetro del rectángulo.
 Variables $\rightarrow$ la medida del ancho, la medida del largo.
 d) Constantes $\rightarrow$ La suma de las edades.
 Variables $\rightarrow$ La edad de Pedro, la edad del padre.
 e) Constantes $\rightarrow$ La suma de los números consecutivos.
 Variables $\rightarrow$ Los tres números consecutivos.
 f) Constantes $\rightarrow$ El número total de patas de animales y el

número de total de animales.

Variables $\rightarrow$ El número de conejos y el número de gallinas.

9

- a) $x + y = 150\,000$
 b) $10x + 50y + 100z = 15\,860$
 c) $\alpha + \beta + \gamma = 267^\circ$

10

- a) $a_n = 2n$
 b) $a_n = 8 - 4n$
 c) $a_n = 4n - 1$
 d) $a_n = n^3$
 e) $a_n = \frac{1}{2^n}$
 f) $a_n = \frac{1}{n}$
 g) $a_n = \frac{n}{n+1}$
 h) $a_n = \frac{1}{10^n}$

11

- a) $-2, -4, -8, -16, \dots$
 b) $\frac{4}{3}, \frac{7}{6}, \frac{10}{9}, \frac{13}{12}, \dots$
 c) $-2, 4, -6, 8, \dots$
 d) $\frac{5}{2}, \frac{28}{5}, \frac{26}{3}, \frac{82}{7}, \dots$

12

- a) ancho $= \frac{l}{2}$, largo $= l$
 b) $P = \frac{l}{2} + l + \frac{l}{2} + l = 3l$
 c) $2a^2$

Página 85

12

- d) $6a^2 - 12a$.
 e) $2(M + 2) = F$, M: autos que cuida Marta y F: autos que están al frente.
 f) $8x$
 • $x + 2x + 4x + 8x = 15x$
 • $2^{(n-1)}x$
 g) $15x$

13

Respuesta abierta.

14

Ella escribió $3x + 5 = 10$ en vez de $3(x + 5) = 10$.

15

Primero se considera que la edad de Diofanto fue x .

Luego, se calculan los años de infancia $\left(\frac{x}{6}\right)$, los años de adolescencia $\left(\frac{x}{12}\right)$, los años de matrimonio $\left(\frac{x}{7}\right)$, el quinquenio

(que corresponde a 5 años), la edad del hijo $\left(\frac{x}{2}\right)$ y los años que sobrevivió después de la muerte de su hijo (4 años).

Finalmente se escribe la expresión algebraica:

$$x = \left(\frac{x}{6}\right) + \left(\frac{x}{12}\right) + \left(\frac{x}{7}\right) + 5 + \left(\frac{x}{2}\right) + 4$$

16

- a) 64 círculos.
 b) n^2 , donde n corresponde al número de la figura.

17

Respuesta abierta.

18

Respuesta abierta.



Página 88

1

- a) $x = \frac{1}{2}$ c) $z = 3$ e) $m = -\frac{1}{9}$
 b) $y = \frac{2}{15}$ d) $u = -\frac{7}{5}$ f) $n = \frac{9}{2}$

2

- a) $2x$ c) $\frac{x}{4}$ e) $\frac{x}{y}$
 b) $x - y$ d) $x \cdot y$ f) $3x + 5$

3

Coefficiente	Factor literal
-0,5	x^6y^2
1,3	m^2n^3
$-\frac{1}{2}$	xyz^2

4

Clasificación
Monomio
Polinomio

5

- a) Factor literal – Factor literal
 b) Coeficiente numérico – Término algebraico
 c) Término algebraico – Coeficiente numérico
 d) Por ejemplo: $2xy - \frac{4}{3}y^2z - \frac{1}{5}xyz + 12x^2$

6

- a) F, x no es semejante con x^2 . c) F, equivale a $2uvw$.
 b) V d) F, es 0.

7

- a) $13xy^2$ f) $1,2y - 0,2xy$
 b) $6a^3$ g) $\frac{7}{20}x$
 c) $2pq$ h) $8ab^3 - ab^2$
 d) $-6x^2 - 2x^3$ i) $-9ab - 13ax$
 e) $5a^2 - 2a + 1$ j) $-0,8 - \frac{4}{10}m + 0,07n$

8

- a) $p - z$ c) $p - 7r$ e) $4b - 2c$
 b) c d) $-a^2 + b^2 - c^2$ f) m

Página 89

9

- a) $8a + 9b + 2$ b) $(12x - 5y) \text{ cm}$

10

- a) $P = 4a$ b) $A = ab \text{ cm}^2$ c) $c = \sqrt{a^2 - p^2}$

11

- a) • $T = A + B + C$
 • 30 L
 b) • 2 alumnos
 • 5 alumnos

12

15,2 km/h

13

Resolvió $180 \cdot 7 - 2$ en vez de $180 \cdot (7 - 2)$.

14 Primero se le asigna una letra a cada ramo. Luego, se escribe una fracción donde el numerador corresponde a la representación de la suma de las 4 letras asignadas y el denominador a 4.

15 $3n - 2$

Página 91

1

- a) $y - 5x$ h) $abc + a^2bc + ab^2c + abc^2 + a^2b^2c$
 b) $8v - 7z$
 c) $5x + 3y - 2xy$ i) $5xy - 2,3x^2y$
 d) $n - m$ j) $7,4ab^2 - 3,7ab^3$
 e) $8a^3$ k) $7xb + 7y$
 f) $27b^2z + 10r$ l) $\frac{2}{3}xy - 2ab + 2xa$
 g) $2x^2y^3 - 4x^2y^2 - 2x^2y^2$

Página 92

2

- a) x^2 e) $12ab^2$ i) $-120x^2y^5$ m) $16x^3y^3$
 b) $3y^2$ f) d^3 j) $36x^4y^7$ n) $-2ab^3$
 c) $6x^2$ g) $8x^5$ k) $3a^{-1}b^4$
 d) $20ab$ h) $10x^6y^2$ l) $-15a^4b^5$

3

- a) $y^2 + y$ i) $15x^2 - 12x^3$
 b) $2x^2 - 3x$ j) $6m^3n^2 - 3mn^5$
 c) $8y + 8xy$ k) $-28x^4 - 32x^2y$
 d) $80z - 10yz$ l) $-9c^6d^6 + yd^7$
 e) $-21c - 14d$ m) $15m^5n^3 - 24m^3n^3$
 f) $8mn + 8m^2$ n) $-30x^2yz^2 - 60x^2yz^3$
 g) $5x^2 + x^2y$ o) $0,06x^2y - 0,9x$
 h) $9x^2z^3 - 9xz^4$ p) $\frac{8}{15}c^4d^2e^6 + \frac{3}{8}c^5d^2$

4

- a) $x^2 + xy + x$ e) $20x^3y^2 + 12x^2y^2 - 4xy^4$
 b) $cd - ce - 2c$ f) $-2x^3 - 6x^3y + 10xz$
 c) $6m^2n - 24mn^2 + 15m^2n^2$ g) $\frac{1}{4}a^5b - \frac{1}{3}ab^6 + \frac{5}{6}a^3b^2$
 d) $-9a^2b^2 + 8ab + 15ab^2$

5

- a) $x^2 + xy + x + y$ f) $16a^2 - 34ab + 15b^2$
 b) $x^2 + xy - x - y$ g) $5xy - 40x - 2y + 16$
 c) $a^2 + 2ab + b^2$ h) $p^4 - 2p^2q^2 + 4p^2q - 8q^3$
 d) $a^2 - 2ab + b^2$ i) $9a^8 - 6a^5 - 15a^3b^3 + 10b^3$
 e) $3a + 12ab + 20b + 5$ j) $-4x^2z^2 + 0,1x^2z - 80xz^2 + 2xz$

6

- a) $x^2 - xz + 4x + 2z - 12$
 b) $-a^2 - ab - 2a + 7b + 63$
 c) $40a^2 + 64ab - 30a + 16b - 10$
 d) $-10m^2 + 17mn + m - 7n^2 - n$
 e) $-12m^2 - 90n^2 - 118mn + 8m + 72n$
 f) $5a^3b + 5a^3 - 5a^2b + 8ab^6 + 8ab^5 - 8b^6$
 g) $-72x^8y + 27x^8 + 45x^7y + 8xy^4 - 3xy^3 - 5y^4$
 h) $-\frac{5}{2}tu^2v^2 - 10tuv + \frac{3}{2}u^3v^2 + \frac{3}{2}u^3v + 6u^2v + 6u^2$

7

- a) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
 b) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$
 c) $3x^2 + 7x - 3y^2 - 5y + 2$
 d) $2x^2y + x^2 - 4xy^5 - 2xy^4 + 2x + xy^{-1} + 3x^{-1}y - 6x^{-2}y^5 + 3x^{-2}$
 e) $0,4x^2 + 1,2xz^2 + 2xz - 0,9y^2 + 1,8yz^2 - 3yz + 6z^3$

Página 93

8

- a) $\bullet 4x^2 + 2x$
 $\bullet 2x^2 + x$
 $\bullet 6x^2 + 3x$
 b) $19,5a^2$
 c) $\bullet 6x^2 + 5x + 1$
 $\bullet 10x + 4$
 d) Marta

9 Pieza 1 $\rightarrow \frac{x^2}{2}$ Pieza 2 $\rightarrow \frac{x^2}{4}$ Pieza 3 $\rightarrow \frac{x^2}{2}$ Pieza 4 $\rightarrow \frac{x^2}{4}$
 Pieza 5 $\rightarrow \frac{x^2}{2}$ Pieza 6 $\rightarrow x^2$ Pieza 7 $\rightarrow x^2$

10 El error fue no multiplicar x por y en el primer paréntesis y no cambiar el signo de y al desarrollar el segundo paréntesis.

11 Se multiplica ax por a , y se suma con el producto de ax por b . luego, se resta el producto de b por a y se resta el producto de b por b .

12 $a^4 + 2a^3b + a^2b^2$

13 Respuesta abierta.

Página 96

1

- a) $-24x^{-2}y^4$
 b) $\frac{1}{2}ab^4$
 c) $5x^2 - 6xy^2$
 d) $-240c^5d^6 - 30c^4d$
 e) $xy - 5x^2$
 f) $-21a^3 + 24a^5b$
 g) $-11a^3b^5 + 143a^4b^2c^5$
 h) $-2a^5b^2c + 3a^3c^3$
 i) $48cd - 30c^2d + 54c$
 j) $-9p^3 - 8p^2q + 12p^5q$
 k) $-xy^4 - 2x^3 + 6xy$
 l) $-4p^{-1}q + 6p^2q^3 - 6p^3q^{-1}$

2

- a) $x^2 + 7x + 10$
 b) $3p^2 - 2pq - 5q^2$
 c) $-32a^2 + 132ab - 108b^2$
 d) $60x^3 - 5x^2y^3 - 12xy + y^4$
 e) $-2m^4 - m^3n + 6m^2n^3 + 3mn^4$
 f) $-0,4x^3y^3 - 2x^2y^2 + 1,6x^2yz + 8xz$

3

- a) $x^2 + xy + 4x - y - 5$
 b) $24p^2 + 11pq - 3p + q^2 - q$
 c) $-48m^3n - 18m^2n + 14m^2 + 3m - mn^{-1}$
 d) $-7a^2b + 2a^2 + 7ab^2 - 3ab + b^2$
 e) $-3x^3 - 3x^2y^3 + 3x^2 - 2x - 2y^3 + 2$
 f) $\frac{-x^7y^4 + x^5y^{-7} - 8x^6y^{-3} + 8x^2 - 8y^3 + 64xy}{4}$
 g) $\frac{1}{6}a^3b^3 + \frac{1}{6}x^3y^3$

4

- a) $x^4 + x^2 + 1$
 b) $10x^2 - 11xy + 20xz^2 + 8xz - 6y^2 + 8yz^2 - 12yz + 16z^3$
 c) $-5x^2y^3 - 3x^3y^2 + 4x^4y - 15xy^5 - 9x^2y^4 + 27x^3y^3 + 9x^4y^2 - 12x^5y$
 d) $9x^4y^3 + 15x^3y^4 + 21x^3y^3 - 12x^3y^2 + 6x^2y^5 - 20x^2y^3 + 10xy^6 - 28x^2y^2 + 14xy^5$
 e) $p^2q - 2p^2q^2 + p^3q - 4pq^2 - 8pq^3 + p^4 + 2p^4q + p^5$

5

- a) $45xy - 4y^2$
 b) $6x^2 + 16xy + 16y^2$

6

- a) $x^2 + 10x + 25$
 b) $x^2 - 14x + 49$
 c) $1 - 2a + a^2$
 d) $a^2 + 4a + 4$
 e) $9a^2 + 24ab + 16b^2$
 f) $x^2 + 6xy^2 + 9y^4$
 g) $81a^2b^6 - 90ab^3c + 25c^2$
 h) $64m^{12} + 176m^8n + 121m^4n^2$
 i) $5,0625x^2 + 22,5x + 25$
 j) $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$

7

- a) $x^2 + 3x + 2$
 b) $a^2 + a - 20$
 c) $x^2 + 2x - 3$
 d) $m^2 - 8m + 12$
 e) $-pq + px - qx + x^2$
 f) $25x^2y^2 - 5xyz - 10xy + 2z$
 g) $-10a^2b^3 - 65a^2k + 26b^3k + 169k^2$
 h) $121u^2 - 33ux^4y + 11uxy^4 - 3x^5y^5$
 i) $a^3b^3 - a^2bx^2 - ab^2x^2 + x^4$
 j) $3t^4v^3 + 0,5t^3u + 1,5tuv^3 + 0,25u^2$

Página 97

8

- a) $x^2 - 4$
 b) $9x^2 - 4$
 c) $a^4 - 9$
 d) $81c^{16}d^2 - 9$
 e) $x^2 - 16y^4$
 f) $k^4 - k^8$
 g) $9u^4 - 4u^2v^2$
 h) $u^2 - v^4$
 i) $0,04x^4 - y^2z^2$
 j) $x^2 - \frac{9}{16}y^2$

9

Arista	Volumen
$(x + y)$	$(x + y)^3$
$(a + b)$	$(a + b)^3$
$(x + 1)$	$(x + 1)^3$
$(a + 2)$	$(a + 2)^3$
$(x + 2y)$	$(x + 2y)^3$

- a) Es la medida de la arista al cubo.
 b) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

10

- a) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
 b) $y^3 - 9y^2 + 27y - 27$
 c) $-a^3 + 12a^2 - 48a + 64$
 d) $-m^3 - 15m^2 - 75m - 125$
 e) $8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$
 f) $x^3 + 9x^2y^2 + 27xy^4 + 27y^6$



- g) $8u^6v^3 + 36u^5v^4 + 54u^4v^5 + 27u^3v^6$
 h) $-x^6z^3 + 9x^5y^2z^2 - 27x^4y^4z + 27x^3y^6$
 i) $19,683y^3 - 109,35y^2 + 202,5y - 125$

11

- a) $\frac{20}{3}x$ c) $\frac{5}{8}a; \frac{3}{8}$
 b) 3 d) 1

12

- a) $4ab$
 b) $x^3 + 3x^2z + 3xz^2 + xz + z^3 - z^2$
 c) $2a^2 - a - 22$
 d) $2x^3 + 3x^2y + 12xy^2 - y^3$

13

- a) Se suman todos los términos al cuadrado con todas las combinaciones de dos términos por 2.
 b) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2ae + 2bc + 2bd + 2be + 2cd + 2ce + 2de$
 e) Todas equivalen a la diferencia de dos términos elevados a la misma potencia.
 f) $a^7 - b^7$
 g) $(a - b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)$

Página 98

14

- a) $\bullet 32^2 = (30 + 2)^2 = 30^2 + 2 \times 30 \times 2 + 2^2$
 $= 900 + 120 + 4 = 1024$
 $104^2 = (100 + 4)^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 4 + 4^2$
 $= 10000 + 800 + 16 = 10816$
 $203^2 = (200 + 3)^2 = 200^2 + 2 \times 200 \times 3 + 3^2$
 $= 40000 + 1200 + 9 = 41209$
 b) $\bullet 59^2 = (60 - 1)^2 = 60^2 - 2 \cdot 60 \cdot 1 + 1^2$
 $= 3600 - 120 + 1 = 3481$
 $98^2 = (100 - 2)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 2 + 2^2$
 $= 10000 - 400 + 4 = 9604$
 $999^2 = (1000 - 1)^2 = 1000^2 - 2 \cdot 1000 \cdot 1 + 1^2$
 $= 1000000 - 2000 + 1 = 998001$
 • Que Nicolás utiliza el cuadrado del binomio descomponiendo en suma y Paulina descomponiendo en resta.
 • Depende de los números.
 c) $\bullet$ Suma por diferencia
 $\bullet 41 \cdot 39 = (40 + 1)(40 - 1) = 40^2 - 1^2 = 1600 - 1 = 1599$
 $48 \cdot 52 = (50 - 2)(50 + 2) = 50^2 - 2^2 = 2500 - 4 = 2496$
 $63 \cdot 57 = (60 + 3)(60 - 3) = 60^2 - 3^2 = 3600 - 9 = 3591$
 • Son obtenidos de la suma y resta de un mismo valor a un número fijo.
 d) $\bullet$ Multiplicación de binomios con un término común.
 $\bullet 18 \cdot 26 = (20 - 2)(20 + 6) = 20^2 + (-2 + 6) \cdot 20$
 $+ (-2 \cdot 6) = 400 + 80 - 12 = 468$
 $45 \cdot 32 = (40 + 5)(40 - 8) = 40^2 + (5 + -8) \cdot 40$
 $+ (5 \cdot -8) = 1600 - 120 - 40 = 1440$
 $85 \cdot 103 = (93 - 8)(93 + 10) = 93^2 + (-8 + 10) \cdot 93 + (-8 \cdot 10) = 8649 + 186 - 80 = 8755$

15

- a) $a^2 - 16b^2$
 b) $4x^2 + 4xy - 20xz + y^2 - 10yz + 25z^2$
 c) $4a^2 - 12ab + 9b^2$
 d) $a^2 + ab + ac + bc$

16

- a) $\bullet (100 - 24x^2) \text{ cm}^2$ $\bullet (10^3 - 8x^3) \text{ cm}^3$
 b) $\frac{9a^2 - 9b^2}{4}$ $\bullet 9b^2$
 c) $\pi(R + r)(R - r)$

Página 99

16

- d) No, el área es $a^2 + 4a + 4$. i) y^2
 e) El perímetro se mantiene. j) 24
 f) $b = \frac{4a-1}{2(a-1)}$ k) 45
 g) $12x + 136$ l) 1
 h) $-2xy$ m) 30

17 Se comienza con un uno y se colocan unos en cada extremo. Los demás valores se obtienen de la suma de los dos valores que los anteceden.
 Los coeficientes numéricos de $(a - b)^8$ son: 1, -8, 28, -56, 70, -56, 28, -8 y 1.

18 No, solo cuando b es cero.

19 El error está al considerar a en vez de a^3 en $-2\frac{1}{3}a$.

20 Se considera $(2x + \sqrt{2})^2$. Se eleva el primer término (2x) al cuadrado, se realiza el producto entre 2, 2x y $\sqrt{2}$ y se eleva el segundo término ($\sqrt{2}$) al cuadrado. Finalmente se suman las expresiones obtenidas anteriormente.

21 Pregunta abierta.

Página 103

1

- a) $x^2 - 4$ c) $m^{10} - 100n^6$ e) $4t^6 - t^8$
 b) $9a^2 - 1$ d) $81a^6 - 49b^4c^2$ f) $p^{2n} - q^{2m}$

2

- a) $x^2 + 10x + 25$ d) $a^2 + 2abc^2 + b^2c^4$
 b) $x^2 - 4x + 4$ e) $25a^4b^2 + 10a^2bc^3 + c^6$
 c) $9x^8 + 30x^4y^2 + 25y^4$ f) $x^2 + x + \frac{1}{4}$

3

- a) $x^2 - 2x - 24$
 b) $4a^2 - 22a + 30$
 c) $m^3n - 15m^2x - 15mnx + 225x^2$
 d) $-42a^4 + a^2b + b^2$
 e) $a^4 - 0,2a^2b^3 + 12a^2b^2c - 2,4b^5c$
 f) $x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}$

4

- a) $x^3 + 15x^2 + 75x + 125$ c) $u^6 + 6u^4v + 12u^2v^2 + 8v^3$
 b) $-64y^3 + 48y^2 - 12y + 1$ d) $p^3q^6 - 3p^2q^4r^3 + 3pq^2r^6 - r^9$

5

- a) $9(a+b) + ab(2+a)$ f) $x(0,5 + 0,25x + x^2)$
 b) $3x(y - 2z + 9)$ g) $ab^2c^2(2a + 4 - 5a^2bc)$
 c) $a^9(a^2 + a + 1)$ h) $3xy(3y + x + 30xy)$
 d) $x(3y + 2x - 7x^2y)$ i) $3a^4(3 - 2a^2b^4 + 4ab^{12} - 5a^4b^9)$
 e) $x^3(4a^2x^4 - 7b^3x - 5a^3x^6 + 1)$

6

- a) $(x - 2)^2$ d) $(z^2 - 5w)^2$ g) $(3 - 2k)^2$
 b) $(p - 4)^2$ e) $(6ab - c)^2$ h) $(4x^2 + 3y)^2$
 c) $(2k + 7)^2$ f) $(m^4 - 8n^2)^2$

Página 104

7

- a) $(a - 10)(a - 2)$ g) $(s - 12)(s + 7)$
 b) $(y - 2)(y + 10)$ h) $(r + 6)(r + 10)$
 c) $(x - 7)(x - 6)$ i) $(z - 7)(z + 9)$
 d) $(m - 3)(m + 4)$ j) $\frac{1}{2}(x + 3)(2x + 1)$
 e) $(x - 3)(x + 2)$ k) $\frac{1}{9}(3b - 1)(3b + 5)$
 f) $(a - 6)(a + 1)$ l) $(x - 0,4)(x - 0,3)$

8

- a) $(2z + 5)(3z - 1)$ d) $(x^2 + 2)(6x^2 - 1)$
 b) $(m + 3)(3m - 1)$ e) $(3a + 8)(8a - 7)$
 c) $(x + 1)(5x - 2)$ f) $(m^2 - 14)(100m^2 + 4)$

9

- a) $(5 - k)(5 + k)$
 b) $(2m - 4n)(2m + 4n)$
 c) $(ab - 9b^2)(ab + 9b^2)$
 d) $(8p^2 - 10q^3)(8p^2 + 10q^3)$
 e) $(7uv^2 - 12t^4)(7uv^2 + 12t^4)$
 f) $(15x^2y - 6z^3)(15x^2y + 6z^3)$
 g) $(13a^3b^2 - 16cd^5)(13a^3b^2 + 16cd^5)$
 h) $(mn - n^4)(mn + n^4)$
 i) $(x^2 - 0,4yz^4)(x^2 + 0,4yz^4)$
 j) $(0,5xy^2 - 0,6z^3)(0,5xy^2 + 0,6z^3)$

10

- a) $(4 - k)(16 + 4k + k^2)$
 b) $(2m - 5n)(4m^2 + 10mn + 25n^2)$
 c) $(ab - 3c^2)(a^2b^2 + 3abc^2 + 9c^4)$
 d) $(p^3 - 7q^2)(p^6 + 7p^3q^2 + 49q^4)$
 e) $(3^6u^2v^3 - 10t^4)(3^{12}u^4v^6 + 10 \cdot 3^6u^2v^3t^4 + 100t^8)$
 f) $(x^2 - 0,5yz^3)(x^4 + 0,5x^2yz^3 + 0,25y^2z^6)$
 g) $(a + 3)(a^2 - 3a + 9)$
 h) $(x + 10)(x^2 - 10x + 100)$
 i) $(3a + 5b)(9a^2 - 15ab + 25b^2)$
 j) $(5x^3y^2 + 8z^3)(25x^6y^4 - 40x^3y^2z^3 + 64z^6)$
 k) $(x + 6)(x^2 + 10x + 28)$
 l) $(5a + 4b)(7a^2 + 10ab + 4b^2)$

11

- a) $(x + 1)^3$ b) $(2 - y)^3$ c) $(2a + 3b)^3$ d) $(m^2 - 5n^2)^3$

12

- a) $(2 - x)(3y - 2x)$ f) $(2mn + 5p)(2x - 3y)$
 b) $(3a - 1)(a^2 + 1)$ g) $(a - 1)(8q - 10)$
 c) $(1 + x)(x - y^2)$ h) $a(3 - 5t)(a^3 - 9)$
 d) $(4a^2 - 3m)(ax - b)$ i) $(z - x)(x^2y^8 - 1,5)$
 e) $-3(ax + y) - 7b(x - y)$

Página 105

13

- a) $\left(x + \frac{1}{5}\right)\left(x + \frac{1}{5}\right)$ h) $(x + 7)(x + 5)$
 b) $(y - 12)(y + 12)$ i) $\left(xz - \frac{1}{25}z\right)\left(xz + \frac{1}{25}z\right)$
 c) $\left(xy - \frac{1}{3}z\right)\left(xy + \frac{1}{3}z\right)$ j) $(7xy - 8x)(7xy + 8x)$
 d) $(x + b)(x + b)^2$ k) $(a + b + c)(a + b + c)$
 e) $\left(\frac{1}{2}a^2b^3 - \frac{3}{4}c\right)\left(\frac{1}{2}a^2b^3 + \frac{3}{4}c\right)$ l) $\left(4xy^2 - \frac{1}{2}z\right)\left(4xy^2 - \frac{1}{2}z\right)$
 f) $(y - 1)(y + 1)$ m) $(2a + 3)(2a + 3)$
 g) $(2x - 3y)(2x + 9y)$ n) $(5z^9 - 13)(5z^9 + 13)$

14

- a) con g) b) con h) c) con f) d) con e)

15

- a) Sí b) No

16

- a) 81 c) 30 000 e) $(y^2 - 5)$
 b) 225 d) 750 f) $x^4 - 5y^3$
 g) Que se trabaja con números más pequeños al no elevar al cuadrado.
 h) $45^2 - 44^2 = (45 - 44)(45 + 44) = 89$
 $51^2 - 45^2 = (51 - 45)(51 + 45) = 6 \cdot 96 = 576$
 $101^2 - 121^2 = (101 - 121)(101 + 121) = -20 \cdot 222 = -4440$
 i) • Sí, es correcta.
 • Sí, ya que $xa - ya = a(x - y)$
 • Sí. Consideremos los múltiplos de a: ax, ay y az entonces $ax + ay + az = a(x + y + z)$ lo que es un múltiplo de a.
 j) Factorizando por -1.
 k) Sea x y x + 1 dos números consecutivos. Entonces: $(x + 1)^2 - x^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1$ que equivale a un número impar. Sean 2x y 2x + 2 dos números pares consecutivos. Entonces: $(2x + 2)^2 - (2x)^2 = 4x^2 + 8x + 4 - 4x^2 = 8x + 4 = 2(4x + 2)$ que equivale a un número par.

Página 106

16

- l) $(a^x + b^x) \cdot (a^x - b^x) \cdot (a^{2x} - a^x b^x + b^{2x}) \cdot (a^{2x} + a^x b^x + b^{2x})$
 m) Factorización doble.
 Primero se factoriza por c y d. Luego, se factoriza por a + b.
 $ac + bc + ad + bd = c(a + b) + d(a + b) = (a + b)(c + d)$
 n) $(a + b)(x - 2y + 3)$



17

- a) $(x - 8)$
- Complete la factorización considerando como uno de los factores $x + 10$.
 - Factorización con un término común.
- b) $(3p + 5p^2)(3x + 5px)$
- Sumé las medidas dadas para el largo y el ancho y luego las multipliqué.
- c) • Para el primero: $(a + d) \cdot (b + c)$. Para el segundo: $(a + 2) \cdot 10b$
 • Para el primero: $A = (a + d)(b + c)$ y $P = 2(a + b + c + d)$
 Para el segundo: $A = 10b(a + 2)$ y $P = 2(a + 10b + 2)$
- d) • $25a^2 + 10ab + b^2$
 • $(5a + b)$
- e) Lados $4x - y$ y $4x + y$
- f) a y b son números pares, entonces $a = 2x$ y $b = 2z$. Luego, $a^2 + b^2 = (2x)^2 + (2z)^2 = 4x^2 + 4z^2 = 2(2x^2 + 2z^2) = c^2$. Por lo tanto, c^2 es un número par.

Página 107

17

- g) $x + 3y + x + 1$
- h) 2500 cm^3
- i) No se forma un cuadrado
- j) $10a^3 - 10b^2 + 50a^6 + 50a^3b^2 + 50b^4$
- k) $3x + 5y$
- l) $3x + 2$
- m) $10a$ y $a^2 + \frac{1}{5}a + \frac{2}{5}$ o a y $10a^2 + 2a + 4$
 • Para $10a$ y $a^2 + \frac{1}{5}a + \frac{2}{5} \rightarrow P = \frac{2024}{5}$ y para a y $10a^2 + 2a + 4 \rightarrow P = 2068$
- n) $2y - 1$
- o) $2a, a + 2$ y $a^2 + a + 1 / a - b, a + b$ y $a^2 + b^2$
- p) $2x^3 + 16x^2 + 34$

18

- a) Se considera un cuadrado de lado n ($n > 2$). Si el cuadrado tendrá en su interior n^2 cuadraditos congruentes en su interior, donde se pintarán de rojo $(n - 2)^2 + 4$ correspondientes a los de la esquinas y el los del centro.

b) $(n - 2)^2 + 4$

c) $4m - 8$

19

- a) Se considera el primer término como $(12a^4b)^2$, el segundo como $2 \times 12a^4b \times 5c^8$ y el tercero como $(5c^8)^2$ concluyendo que es un cuadrado de binomio, $(12a^4b - 5c^8)^2$.
- b) $4(x^2 + 2c)(4x^2 - 5c)$
- c) $(-9m^3 - 5n)(-m^3 + 8n)$

20 Debió considerar $(6x - 15)(6x + 2)$ en vez de $(6x + 15)(6x - 2)$.

21 Sean $2x + 1$ y $2y + 1$ números impares.

Entonces, $2x + 1 + 2y + 1 = 2x + 2y + 2 = 2(x + y + 1)$ que es un número par.

22 Pregunta abierta.

Página 108

1

- a. $9x^2 + 12x + 4$
- b. $4a^2 + 4a + 1$
- c. $m^4 + 2m^2 + 1$
- d. $9x^2 + 12xy + 4y^2$
- e. $4a^6 + 4a^3b + b^2$
- f. $m^2 - 4mn^3 + 4n^6$
- g. $x^2 - x + \frac{1}{4}$
- h. $16r^2 - 4rs + \frac{s^2}{4}$
- i. $\frac{4r^2}{25} - \frac{2rs}{5} + \frac{s^2}{4}$
- j. $m^2 - n^2$
- k. $4v^2 - 4$
- l. $9x^4 - y^2$
- m. $16a^4 - 36$
- n. $a^6 - b^4$
- o. $\frac{r^2}{16} - 25s^2$
- p. $\frac{m^6}{49} - 9$
- q. $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$
- r. $1 - 3a + 3a^2 - a^3$
- s. $8m^3 + 36m^2 + 54m + 27$
- t. $27m^3 - 135m^2 + 225m - 125$
- u. $-r^3s^3 - 6r^2s^2 - 12rs - 8$
- v. $\frac{1}{27}z^3 - \frac{2}{3}z^2 + 4z - 8$
- w. $z^2 + 4z + 3$
- x. $4p^2 - 26p + 40$
- y. $-81u^4 - 81u^2 + 10$
- z. $4a^8 - 4a^4b - 3b^2$

2

- a. $9x^2 + 6x + 9$
- b. $-5a^2 - 12ab + 4a - 4b^2 + 1$
- c. $8p^3 + 1$
- d. $8m^3 - 6m^2n + 12m^2 - 3mn + 6m + 1$
- e. $a^3 - 6a^2b + 6ab^2 - b^3$
- f. $r^3 + 9r^2s - 25r^2 + 27rs^2 - 20rs - 4r + 27s^3 - 4s^2$
- g. $-22t^3 - 60t^2 - 48t - 12$
- h. $-x^4 + 2x^2y^2 + 3x^2 - 5y^3 - y^4$
- i. $\frac{21}{100}a^2 + \frac{3}{4}a + \frac{73}{16}$

3

- $x^2 - y^2 \rightarrow (x + y)(x - y)$
 $(x^3 - y^3)^2 \rightarrow x^6 - 2x^3y^3 + y^6$
 $x^4 - y^4 \rightarrow (x^2 + y^2)(x - y)(x + y)$
 $(x - y)^2 + (x + y)^2 \rightarrow 2(x - y)^2$
 $(y + x)^2(x + y) \rightarrow (x + y)^3$

4

- a. $10a$
- b. $4 / b^4$
- c. $9m^2 / \frac{1}{4}$
- d. n^2
- e. $2r\sqrt{2}$
- f. $\frac{4}{9} / s^2$
- g. 4
- h. v^8
- i. $z / 6z^2 / 8$
- j. $y / 8x^3 / 12x^2y / y^3$

Página 109

5

- a. $l^2 + 2$
- b. $\frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{8}$
- c. 20
- d. -70
- e. 90

6

- $(b - 2d)(b + 2d) + ab + ac + (b + c)^2$
 $= ab + ac + 2b^2 + 2bc + c^2 - 4d^2$

7

a. $14cd(c + 3d^2)$

b. $5p^2(3p - 20)$

c. $\frac{a}{2}\left(a - \frac{5}{3}\right)$

d. $5k(2k^2 - 3k + 4)$

e. $\frac{c}{2}\left(1 + \frac{c}{2} - \frac{c^2}{3}\right)$

f. $(x + 2)(a - b)$

g. $(x - 3)(y + 2)$

h. $(6a - b)(a + c)$

8

a. 3 factores.

b. -1

c. 40

d. 26,5

e. $32a - 4$

f. $18x^2 - 12xy + 6x + 8y^2 + 4y$

g. $\frac{8}{3}a^2b + 16a^2b^2 + 4ab + 6a$

h. Las dimensiones son $11x - \sqrt{17}y$ y $11x + \sqrt{17}y$

i. $(x + 2)(7x + 3)$

Página 112

1

a) $x = 2$ d) $x = \frac{1}{2}$ g) $m = -\frac{3}{7}$ j) $x = -\frac{35}{92}$

b) $a = 1$ e) $x = \frac{5}{13}$ h) $r = -\frac{25}{4}$

c) $z = 14$ f) $d = \frac{47}{8}$ i) $c = \frac{2}{3}$

2

a) $x \cdot 1 - 9 = 4x + 55 \rightarrow x = -\frac{64}{3}$. El doble del número es $-\frac{128}{3}$.

b) $6 \cdot \frac{a \cdot 5}{2} = 87 \rightarrow a = 5,8$. La apotema mide 5,8 cm.

$P = 2G$ y $P + G = 36 \rightarrow 2G + G = 36 \rightarrow$

$3G = 36 \rightarrow G = 12$ y $P = 24$. Las edades de Patricio y Gabriela son 12 y 24 años respectivamente.

3

a) $a = 2$ c) $x = \frac{67}{30}$ e) $x = -28$ g) $y = \frac{105}{19}$

b) $d = \frac{392}{2115}$ d) $z = 0$ f) $x = -\frac{61}{3}$ h) $x = \frac{7}{13}$

4

a) No. b) Sí. c) No. d) No.

5

a) $x + y = 5,5$ y $x = \frac{y}{3} \rightarrow \frac{y}{3} + y = 5,5 \rightarrow x = \frac{11}{8}$ e $y = \frac{33}{8}$.

b) $2x - 5 = \frac{x}{2} \rightarrow x = \frac{10}{3}$

c) $l = a + 3$ y $\frac{a}{2} = \frac{l}{3} \rightarrow l = \frac{2 \cdot l}{3} + 3 \rightarrow a = 6, l = 9$. El área del rectángulo es 54 cm^2 .

d) $E = \frac{P}{4}$ y $E - 10 + P - 10 = 30 \rightarrow \frac{P}{4} - P - 20 = 30 \rightarrow E = 10$ y $P = 40$. Las edades son 10 y 40 años.

6

a) La medida de la mitad de su altura es 5 m.

b) La altura del depósito es 90 m.

7

a) Se pueden apilar 8 cajas. El resultado debe aproximarse al entero menor ya que no se puede apilar media caja.

b) El mayor recibe \$18666, el segundo; \$6222 y el menor; \$3111. El resultado debe truncarse, ya que no se reparte dinero en decimales.

Página 113

8

a) Carmen convirtió 4 goles y Gloria 6.

b) El de chocolate cuesta \$890, el de canela; \$990 y el de manjar; \$1120.

c) El ancho mide 17,5 cm y el largo; 45 cm.

d) El nuevo precio sería \$1150.

e) El pantalón cuesta \$4500; la camisa \$16 500 y los zapatos \$23 000.

f) La superficie del huerto es 480 m^2 .

g) 270 productos.

h) Tenían ahorrado \$20 571 aproximadamente.

i) Debe utilizar 6 kg de arena y 9 kg de ripio.

9

Respuesta abierta.

10

Primero se calcula el m.c.m entre los denominadores. Luego, se multiplica a ambos lados de la ecuación por el m.c.m encontrado, se desarrollan los paréntesis y se dejan las x a un mismo lado del signo igual y los demás números al otro lado del signo igual. Después, se reducen los términos semejantes y se despeja la x dividiendo a ambos lados de la igualdad por el coeficiente que le acompaña.

11 Antes de multiplicar por 3 a ambos lados de la igualdad se debía restar 1 a ambos lados de la igualdad.

12 La ecuación no tiene solución, ya que al dejar las x a un mismo lado de la igualdad, estas se anulan.

13 Respuesta abierta.

Página 115

1

a) $x = \frac{1}{3}$ c) $c = \frac{21}{260}$ e) $y = \frac{4}{15}$

b) $a = \frac{4}{5}$ d) $p = 22$ f) $w = -\frac{101}{5}$



2

a) $\left(3y - \frac{\sqrt{11}}{5}x\right)\left(3y + \frac{\sqrt{11}}{5}x\right)$ e) $(x-7)(x^2+7x+49)$

b) $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2$ f) $\frac{1}{4}(2t-1)(2t+1)\left(t^2 + \frac{1}{4}\right)$

c) $\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2$ g) $(x+7)(x+5)$

d) $3x^2y(2-3x)$ h) $(a+6)^2$

3

a) $y = 2a$ g) $b = a - s - 14x$

b) $x = b + c$ h) $a = \frac{8p}{37} + \frac{4y}{37}$

c) $b = \frac{x}{4}$ i) $y = -\frac{8b}{3} + \frac{5p}{3} + \frac{q}{3}$

d) $x = 3a + 2b$ j) $p = \frac{2ax}{45b} + \frac{y}{45b} + \frac{16}{15b}$

e) $a = -\frac{27x}{b} - 25$ k) $y = a$

f) $x = -\frac{a}{6} - \frac{7b}{2} - \frac{y}{6} + 12$

4

a) $x = \frac{2c}{3a}$ c) $c = \frac{5}{3a}$ e) $r = \frac{9}{2x} - \frac{z}{x}$ g) $x = \frac{2c}{13a}$

b) $x = a$ d) $z = \frac{1}{8x-4}$ f) $z = \frac{2}{y}$ h) $x = -\frac{19a}{2}$

5

a) No coincide, $x = -b - 5$ c) Si coincide.

b) No coincide, $a = \frac{8p-7xp}{6x}$

Página 116

6

a) $d^2 = \frac{k \cdot q_1 \cdot q_2}{F}$ c) $v_0 = \frac{y_t - y_0 + \frac{1}{2}gt^2}{t}$

b) $t = \frac{S-S_0}{v}$ d) $L = \frac{F+KL_0}{K}$

7

a) $v = \frac{25}{t}$ c) $t = \frac{d}{45}$ e) $\Delta t = \frac{4m}{F}$

b) $d = 30v$ d) $F = 72 \frac{\Delta v}{\Delta t}$

8

a) $v = \frac{x-x_0}{t}$, $t = \frac{x-x_0}{v}$, $x_0 = x - vt$

b) 1 m/s

9

a) $x = \frac{100+b+2c}{15a}$

b) $x = \frac{20+a^2+2a}{2(a+2)}$

c) $x = \frac{120-5ab-5b^2}{a^2+ab}$

Página 117

10

a) Su largo mide $x+p$.

b) Sus otros dos lados miden $2x+q$ cada uno.

c) $\frac{1}{42,9} \cdot \frac{1}{10^{-3}}$

d) $l_1 = x+9$

11 Hombres: $P = -0,36383a + 0,49122E + 0,072719MB - 4,8338$
Mujeres: $P = -0,1934a + 0,48891E + 0,10457MB - 68,5$

12 Consideró $3 - 3b$ en vez de $3b - 3$.

13 Se suma 2 a ambos lados de la igualdad.

Se resta bx a ambos lados de la igualdad.

Se factoriza el lado izquierdo de la igualdad por x .

Se divide a ambos lados de la igualdad por el factor que acompaña a la x .

14 Respuesta abierta.

15 Respuesta abierta.

Página 120

1

a) $x = \frac{5}{3}a$ e) $x = \frac{b+7a}{2}$ i) $x = c - 2a - b$

b) $x = -3a$ f) $x = \frac{a-5b}{2}$ j) $x = 1 - b^2$

c) $x = \frac{a-10}{23}$ g) $x = \frac{3}{2}a$ k) $x = 3a$

d) $x = 3a$ h) $x = \frac{a-b}{2}$ l) $x = 2a$

2

a) $C = 6, V = 8$ y $A = 12 \rightarrow C + V = A + 2 \rightarrow 6 + 8 = 12 + 2 \rightarrow 14 = 14$.

b) $A = C + V - 2$

c) $C = 4$

d) $V = 8$

e) $C = 20$

f) Cubo, octaedro.

g) Icosaedro y dodecaedro.

3

a) 15 cm b) 75 cm^2

4

a) $x = \frac{3a-2}{a-1}$, $a \neq 1$ e) $x = \frac{2}{a}$, $a \neq 0$

b) $x = \frac{b(2-a)}{b+2a}$, $b \neq -2a$ f) $x = a + \frac{1}{2}$, $a \neq 0$

c) $x = \frac{bd+ad-b+3d}{3a}$, $a \neq 0$ g) $x = \frac{2b-3}{a+2}$, $a \neq -2$

d) $x = \frac{ab-a^2+a}{2a+1}$, $a \neq -\frac{1}{2}$

5

- a) $\bullet a \in \{2, 3, 4\}$ $\bullet a \in \{4, 5, 6, 7\}$
- b) $\bullet \frac{5}{6} < a < \frac{30}{7}$
 $\bullet a = 4, \frac{18}{4}, 3, 2, 0, -6, 18, 12, 10, 9, \frac{42}{5}, 8, \frac{54}{7}$
 $\bullet a < 0 \text{ o } a > 6$
- c) $\bullet a = 10, \frac{15}{2}, \frac{20}{3}, \frac{25}{4}$
 $\bullet a = \frac{35}{9}, \frac{25}{7}, 3, \frac{5}{3}$
 $\bullet a = 7, \frac{45}{7}, \frac{55}{9}, \frac{65}{11}, \frac{75}{13}$
 $\bullet a < 7$
- d) $\bullet a = -\frac{10}{3}, -\frac{5}{6}, 0, \frac{5}{12}$
 $\bullet a = \frac{25}{9}, \frac{65}{21}, \frac{11}{3}, 5$
 $\bullet a = -\frac{1}{3}, \frac{5}{21}, \frac{5}{9}, \frac{25}{39}, \frac{35}{39}$
 $\bullet a > \frac{2}{3}$

Página 121

6

- a) $\bullet x = \frac{C+100}{b}$
 $\bullet b \neq 0$, ya que si no, la fracción se indefiniría.
- b) $\bullet b, b, \frac{-2b}{2-b}$
 $\bullet A = b - \frac{2b}{2-b}, P = 2b + 2 - \frac{4}{2-b}$
 $\bullet b \neq 2$
- c) $\bullet P = \frac{2a^2 + 20a + 100}{a+5}$
 $\bullet P = \frac{2a^2 + 40a + 100}{a+5}$
 $\bullet x = \frac{5a}{a+5}$
 $\bullet a = \frac{5x}{5-x}$
 $\bullet a \neq -5, x \neq 5$
- d) $\bullet 100 + Px = 54 + Cx$, x cantidad de láminas del paquete.
 $\bullet x = \frac{46}{C-P}$ $\bullet C \neq P$

7

- a) $b = \frac{V_0 - V}{V_0(T_i - T_f)}$
- b) Se indefiniría. Significa que no se puede determinar el coeficiente de dilatación y por lo tanto su valor es fijo para cada cuerpo.

8 Se consideró $3a$ en vez de $-3a$ al factorizar por x .

Página 122

1

- a. $x = 1$ e. $x = 166$ i. $x = \frac{13}{18}$ m. $x = \frac{37}{39}$
- b. $x = 1$ f. $x = \frac{11}{4}$ j. $x = -\frac{7}{8}$ n. $x = \frac{19}{6}$
- c. $x = -1$ g. $x = -\frac{12}{7}$ k. $x = \frac{21}{2}$ o. $x = -6$
- d. $x = \frac{5}{3}$ h. $x = -\frac{14}{3}$ l. $x = \frac{13}{18}$ p. $x = \frac{3}{5}$

2

- a. 15
b. 15 cm
c. 6 cm, 7 cm, 8 cm.
d. 125
e. 2,5 cm.
f. $68^\circ, 88^\circ, 108^\circ, 128^\circ$ y 148° .
g. 17,5 cm, 17,5 cm y 5,5 cm.
h. 98 personas.
i. Mariela tiene 11 años, Camilo tiene 22 años, Eugenio tiene 66 años y Paulina tiene 33 años.
j. Mantequilla \$600, queso \$450, pan \$ 750.
k. 6,48 cm aproximadamente.
l. 1,5 m y 0,5 m.

Página 123

3

- a. $x = \frac{1}{a-b}$ e. $x = \frac{7a+15}{2a}$ i. $x = \frac{4a}{b+25}$
- b. $x = \frac{1}{2b}$ f. $x = \frac{-3a-b}{2a}$ j. $x = \frac{4a}{3a-6}$
- c. $x = a$ g. $x = \frac{8a^2}{a-2}$
- d. $x = \frac{c-10a}{c-15}$ h. $x = \frac{6a-1}{2a}$

4

- a. $x = \frac{6}{b-2c}, b \neq 2c$ e. $x = \frac{4a+3}{a}, a \neq 0$
- b. $x = \frac{2a}{a-1}, a \neq 1$ f. $x = \frac{1-a^2}{3a}, a \neq 0$
- c. $x = \frac{9b-6}{2b}, b \neq 0$ g. $x = \frac{3a^2+6ab}{2a-2b}, a \neq b$
- d. $x = \frac{9a+4b}{3a-2b}, a \neq \frac{2b}{3}$ h. $x = \frac{34a}{12b+9}, b \neq -\frac{9}{12}$

5

$$2x + xa + 2x = 3x + xa - b$$

$$4x + xa = 3x + xa - b$$

$$x = -b$$

Luego, se reemplaza en el cuadrado y se sacan las otras casillas:

-3b	-2b	A
C	-ab	-4b
B	-2b	-b

$$-3b - 2b + A = -2b - ab - 2b$$

$$-5b + A = -4b - ab$$

$$A = -4b + 5b - ab$$

$$A = b - ab$$

De la misma manera se obtiene C y B.

6

- a. $n = \frac{50}{a-1}, a \neq 1$
- b. $n = \frac{11}{4a}, a \neq 0$
- c. $x = \frac{4a+10b}{2a-b}, b \neq 2a$



d. $a = \frac{A}{2b+2c} - \frac{bc}{b+c}, b \neq -c$

e. $v(200 - C) / v = \frac{20\,000}{200 - C}$ / Para determinar v se necesita conocer el valor de C .

f. Si $g = 0$ entonces para cualquier valor de h V^2 es 0.

Página 125

1 El área de un triángulo equilátero se calcula por medio de la siguiente expresión: $A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ donde a es la medida del lado del triángulo equilátero. Luego para los distintos valores de x los posibles valores del área se puede observar en la siguiente tabla:

Valores de "x" (cm)	Área del triángulo equilátero
1	$A = \frac{1^2}{4}\sqrt{3} \rightarrow A \approx 0,4$
2	$A = \frac{2^2}{4}\sqrt{3} \rightarrow A \approx 1,7$
3	$A = \frac{3^2}{4}\sqrt{3} \rightarrow A \approx 3,9$

El área de un triángulo hexágono regular se calcula por medio de la siguiente expresión: $A = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot l^2$ donde l es la medida del lado del hexágono regular. Luego para los distintos valores de x y b los posibles valores del área se puede observar en la siguiente tabla:

Valores de "2x + b" (cm)			Área del triángulo equilátero
x	b	2x + b	
1	4	$2 \cdot 1 + 4 = 5$	$A = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 5^2 \approx 65$
2	5	$2 \cdot 2 + 5 = 9$	$A = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 9^2 \approx 210,4$
3	6	$2 \cdot 3 + 6 = 12$	$A = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 12^2 \approx 374,1$

2

Cantidad de monedas de \$100	Cantidad de monedas de \$500
0	20
5	19
10	18
15	17
20	16
25	15
30	14
35	13
40	12
45	11
50	10

Cantidad de monedas de \$100	Cantidad de monedas de \$500
55	9
60	8
65	7
70	6
75	5
80	4
85	3
90	2
95	1
100	0

3 15 cm

--	--	--

a cm ab cm 2a cm

Como se colocan huinchas de 15 cm • 1 cm, estas se colocaran en la siguiente posición:

Para conocer las posibles dimensiones de cada corte del listón podemos construir una tabla de valores como la que se muestra a continuación:

Posibles valores de a	Posibles valores de b	a • b	2 • a
1	2	2	2
2	5	10	4
3	2	6	6

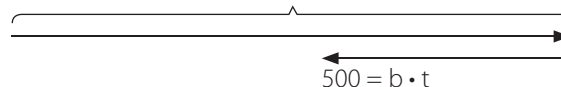
Luego las posibles dimensiones para cada corte son las siguientes:

Corte 1			Corte 2		
Ancho (cm)	Largo (cm)	Posibles Dimensiones	Ancho (cm)	Largo (cm)	Posibles Dimensiones
Si a = 1	15	15 cm • 1 cm	Si ab = 2	15	15 cm • 2 cm
Si a = 2	15	15 cm • 2 cm	Si ab = 10	15	15 cm • 10 cm
Si a = 3	15	15 cm • 3 cm	Si ab = 6	15	15 cm • 6 cm

Corte 3		
Ancho (cm)	Largo (cm)	Posibles Dimensiones
Si 2a = 2	15	15 cm • 2 cm
Si 2a = 4	15	15 cm • 4 cm
Si 2a = 6	15	15 cm • 6 cm

4 Se considera $v = d/t$

Luego: $d = a \cdot t$



Entonces recorre en total:

$d + 500$, es decir

$a \cdot t + b \cdot t = 500$

$t \cdot (a + b) = 500$

Si despejamos t resulta $t = 500/(a + b)$

Para finalizar, se construye una tabla de valores para a y b , igual que en el ejercicio anterior obteniéndose así, los posibles valores de t en minutos.

Página 128

1

a) No funciona correctamente, ya que el volumen de una esfera depende del radio de ésta, el perímetro del cuadrado depende de la longitud de su lado y el número de diagonales de un polígono depende del número de lados que tenga, por lo que en estos casos, los colores asociados a las variables dependientes e independientes están invertidos.

2

a) Relación

b) Función

Página 129

3

- a) Si es función. b) No es función.

4

- a) -12 b) -3,5 c) -3 d) $x = -\frac{19}{2}$

5

a)

x	-2	-1	0	1
f(x)	-6	-3	0	3

b)

i	-2	-1	0	1
h(i)	11	6	1	-4

c)

n	-2	-1	0	1
m(n)	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	2	$\frac{9}{4}$

d)

t	-2	-1	0	1
r(t)	-8	-8,5	-9	-9,5

e)

c	-2	-1	0	1
d(c)	8	2	0	2

f)

x	-2	-1	0	1
g(x)	-9	-2	-1	0

g)

z	-2	-1	0	1
f(z)	$-\frac{1}{2}$	-1	indeterminado	1

h)

p	-2	-1	0	1
o(p)	$\frac{3}{4}$	2	$-\frac{1}{2}$	0

6

- a) $p(x) = 5x$
b) $g(x) = x - 1$
c) $g(x) = x^2$
d) $g(x) = x^3$

7

- a) con el tercer gráfico
b) con el segundo gráfico
c) con el primer gráfico

Página 130

8

- a) $f(x) = x + 2$
b) $f(x) = 1$
c) $f(x) = -x$

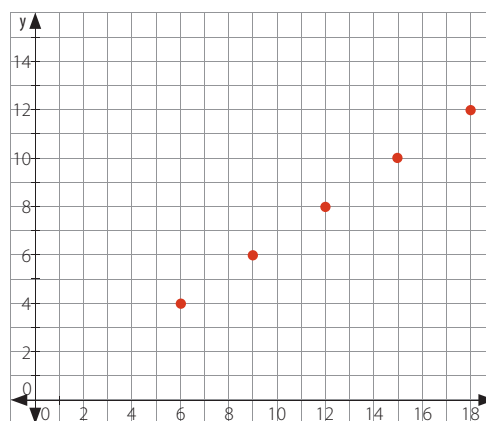
9

- a) • Las variable involucradas son el tiempo y la temperatura
• No corresponde a una función, porque la temperatura puede mantenerse constante por un rato y eso le da una misma imagen a varias pre-imagenes.

b) • $x = \frac{2A}{h}$ / Sí

x	6	9	12	15	18
A	4	6	8	10	12

- (6, 4), (9, 9), (12, 8), (15, 10), (18, 12)



- c) Cuadrado: $A = \frac{x^2}{16}$. Círculo: $A = \frac{(5-x)^2}{4\pi}$ / Ambas son funciones.

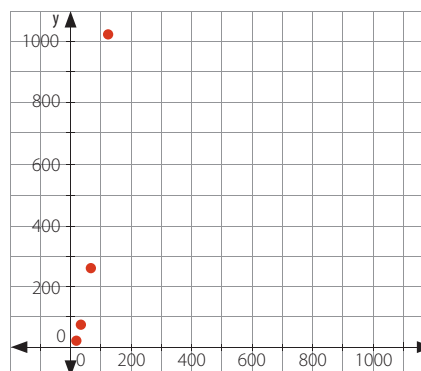
- Área del cuadrado:

x	16	32	64	128
A	16	64	256	1024

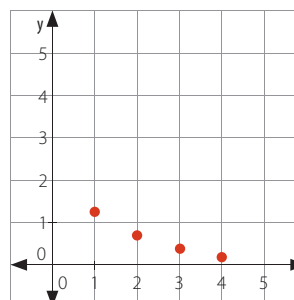
Área del Círculo: (Valores del área aproximados a la décima)

x	1	2	3	4
A	1,3	0,7	0,3	0,1

- Gráfico área del cuadrado



- Gráfico área del círculo

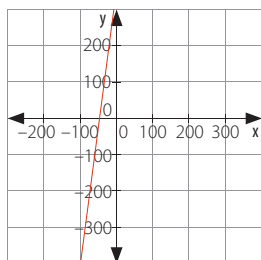




d) $D = 15n + 500$

n	1	2	3	4	5	100
D	515	530	545	560	575	2000

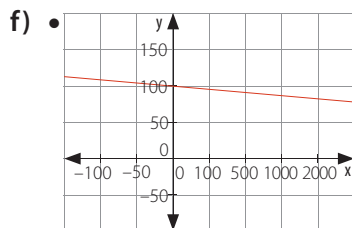
- (1, 1260), (2, 1320), (3, 1380), (4, 1440), (5, 1500)



e) $V = 6h$

h	1	2	3	4	5
V	6	12	18	24	30

- Franco y Catalina deben colocar 90 000 pastillas purificantes en el depósito.



- No
- La temperatura de ebullición disminuye.
- 96° C

Página 131

10 Respuesta abierta.

11 $IMC = \frac{\text{Altura}}{\text{Masa}^2} / E = g \cdot \text{masa} \cdot \text{altura}$

12 No, ya que cada par (A, B) no tiene una única imagen.

13 Las variables involucradas son: Número de personas (variable independiente) y número de mamuts que se pueden atrapar (variable dependiente). La relación existente es la siguiente: Un bisonte se puede atrapar con 5 personas, por lo cual la función que permite determinar cuántos bisontes se podrán atrapar con x personas es $f(x) = \frac{1}{5}x$.

Página 133

1

a) Sí b) Sí

2

a) 9 / 0 / 1 b) 11,5 / 1 / 0 / -1

3

a) $\text{Dom}(f) = \{-1, -2, -3, -4\} / \text{Rec}(f) = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\}$

b) $\text{Dom}(f) = \left\{-1, -\frac{2}{3}, 0, 4\right\} / \text{Rec}(f) = \left\{1, \frac{4}{9}, 0\right\}$

4

a) $3x / \text{Dom}: \mathbb{N} / \text{Rec}: \{3n / n \in \mathbb{N}\}$

b) $x - 1 / \text{Dom}: \mathbb{N} - \{1\} / \text{Rec}: \mathbb{N}$

c) $x - 2 / \text{Dom}: \mathbb{Q} / \text{Rec}: \mathbb{Q}$

d) $2x / \text{Dom}: \mathbb{Z} / \text{Rec}: \{2n / n \in \mathbb{Z}\}$

5

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} / \text{Rec}(f) = \mathbb{R}^+$

b) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} / \text{Rec}(f) = \mathbb{R}$

6

- a) La función venta diaria es $f(x) = 1\,200x$, donde x corresponde el número de completos vendidos diariamente.
 $\text{Dom}(f) = \{30, 25, 35\}$, $\text{Rec}(f) = \{36\,000, 30\,000, 42\,000\}$

Página 135

1

Cantidad	Total
1	650
2	1300
3	1950
4	2600

- Sí, ya que los valores aumentan en la misma proporción.
- $k = 650$

2

a) $k = 4 /$ función lineal

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	-8	-4	0	4	8

b) no es función lineal

x	-2	-1	0	1	2
g(x)	0	0	0	0	0

c) no es función lineal

x	-2	-1	0	1	2
d(x)	13	10	7	4	1

d) $k = \frac{2}{5} /$ función lineal

x	-2	-1	0	1	2
h(x)	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$

e) no es función lineal

z	-2	-1	0	1	2
j(z)	$-\frac{9}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{3}{5}$

f) no es función lineal

p	-2	-1	0	1	2
c(p)	-102	-101	-100	-99	-98

Página 136

3

a) Sí b) No c) No

4	a	1	2	3	4	5	6	7
	P(a)	4	8	12	16	20	24	28
	A(a)	1	4	9	16	25	36	49

- Para $P(a) \rightarrow k = 4$, para $A(a)$ no hay k .
- Solo el perímetro es una función lineal.
- La primera gráfica.
- $\text{Dom}(P(a)) = \mathbb{R}^+$, $\text{Rec}(P(a)) = \mathbb{R}^+$

5

- a)** $m = 1$ **c)** $m = 2$ **e)** $m = -3$
b) $m = -1$ **d)** $m = 4$ **f)** $m = -7$

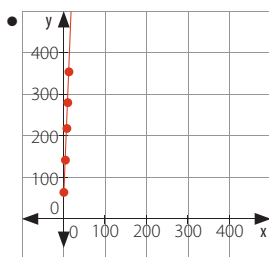
- En las gráficas de a) y b) la pendiente sólo cambia de signo por lo que una se inclinará hacia arriba y la otra hacia abajo.
- En las graficas de c) y d) una pendiente es mayor que la otra lo que implica que una de las gráficas ($g(x) = 2x$) se encontrará más abajo de la otra (de $g(x) = 4x$). Con respecto a e) y f), sucede lo mismo explicado anteriormente, con la diferencia que la función $h(x) = -7x$ se encontrará sobre la función $h(x) = -3x$ ya que al ser pendientes negativas la función que tiene menor pendiente es más inclinada que la otra.

6	Tiempo (horas)	1	2	3	4	5
	Distancia (kilómetros)	70	140	210	280	350

Página 137

6

- a)** • $k = 70$ • $d = 70n$



- b)** • $d = 4a$, donde a es el ancho de la habitación.
 • Sí, es lineal.
 • La distancia que recorre el robot es de 20 m.
- c)** • Recorre una distancia total de 10000 m.
 • Las funciones que representan la situación son $f(t) = 250t$, cuando está subiendo, y $f(t) = 500t$ cuando está bajando.
 • A medida que la rapidez aumenta, la grafica se vuelve más paralela al eje Y
- d)** • $B = \frac{5}{100}G$ donde G , es la ganancia anual.
 • \$600 000
- e)** • El volumen según la altura de llenado.
 • $m = 5,5$
 • 27,5 m³

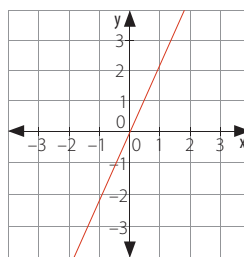
7

- La fuerza es mayor.
- La masa disminuye.

8

- El grafico representa otra función.

- La gráfica representa la función $f(x) = x$, y la que representa la función $f(x) = 2x$ debiera ser la siguiente:



Página 138

1

- a.** Sí es función. Variable dependiente $\rightarrow$ Recaudación. Variable independiente $\rightarrow$ cantidad de entradas vendidas.
- b.** No es función.
- c.** Es función.
- d.** Si es función. Variable dependiente $\rightarrow$ El número de vértices. Variable independiente $\rightarrow$ número de lados de un polígono.
- e.** Si es función. Variable dependiente $\rightarrow$ kilómetros recorridos. Variable independiente $\rightarrow$ Cantidad de combustible que gasta el automóvil.
- f.** No es función.

2

- a.** Si **b.** Si **c.** Si **d.** Si

3

- a.** $\text{Dom}(g(x)) = \{a, b, c, d\} / \text{Rec}(g(x)) = \{1, 2, 3, 4\}$
- b.** $\text{Dom}(f(x)) = \{1, 2, 3, 4\} / \text{Rec}(f(x)) = \{-2, -4, -5, -6\}$
- c.** $\text{Dom}(h(x)) = \{1, -1, 5\} / \text{Rec}(h(x)) = \{2, 3, -2\}$
- d.** $\text{Dom}(i(x)) = \mathbb{R}^+ / \text{Rec}(i(x)) = \{4a, a \in \mathbb{R}^+\}$
- e.** $\text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} / \text{Rec}(f(x)) = \{3\}$
- f.** $\text{Dom}(g(x)) = \{x \in \mathbb{R} / 1 \leq x \leq 4\} / \text{Rec}(g(x)) = \{2\}$

4

- a.** -3 **c.** 3 **e.** $\frac{2}{5}$
b. 72 **d.** 5 **f.** $-\frac{1}{5}$

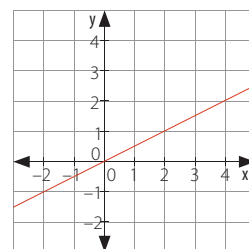
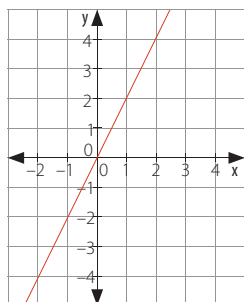
Página 139

5

- a.** $k = \frac{3}{2}$ **b.** $k = -5$

6

- a.** Sí **b.** No
c. Sí

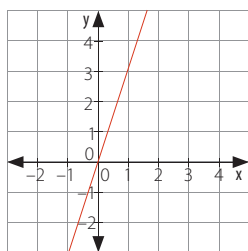




d. No

f. No

e. Sí



7

a. • \$300

• $D = 10L$, D : dinero a pagar, L : cantidad de latas

• Sí

• Dom: $\mathbb{N}$, Rec: $\mathbb{N}$

• 222

b. • La cantidad de personas y la cantidad de ventas.

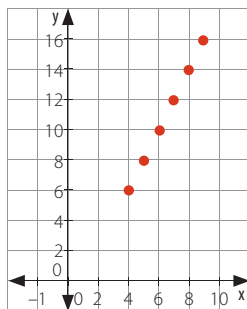
• Dom = $\{10, 11, 12, \dots, 130\}$ Rec = $\{10, 11, 12, \dots, 60\}$

• La función no es lineal, Carmen está en lo correcto.

c. • Sí, es afín. (Definida en el conjunto de los números naturales).

• Dom = $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ Rec = $\{6, 8, 10, 12, 14, 16\}$

• $A = 2(v - 1)$ Dom = $\mathbb{N} - \{1, 2, 3\}$ Rec: $\mathbb{N} = \{2n, n \geq 3, n \in \mathbb{N}\}$



8

a. $f(x) = 3x$, $g(x) = x$, $h(x) = \frac{x}{2}$, $i(x) = \frac{x}{11}$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-9	-6	-3	0	3	6	9
g(x)	-3	-2	-1	0	1	2	3
h(x)	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
i(x)	$-\frac{3}{11}$	$-\frac{2}{11}$	$-\frac{1}{11}$	0	$\frac{1}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$

c. La pendiente.

d. La función crece.

9

a. $f(x) = 2x$ / Dom: $\mathbb{R}$, Rec: $\mathbb{R}$

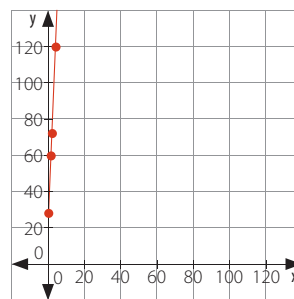
b. $T = Pm$, T : total, P : precio por kilogramo, m : cantidad de kilogramos / Dom: $\mathbb{Q}^+$, Rec: $\mathbb{Q}^+$.

Página 142

1

a)

30
60
72
120

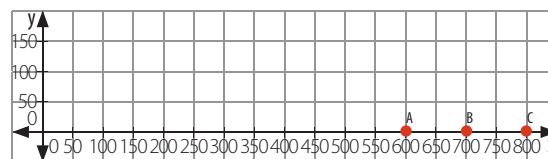


b) $v = \frac{d}{t}$

c) 8 h

2

a)



b) $F = 1000\text{kg} \cdot a$

c) 1900 N

Página 143

3

a) lineal

c) afín

e) afín

b) afín

d) afín

f) lineal

4

a) afín, positiva

b) afín, negativa

c) lineal, positiva

5

a) $h(x) = 2x - 2$

b) $i(x) = 2x - 6$

c) $j(x) = 2x + 10$

6

a) $y = 3x - 1$

b) $y = -6x + 8$

7 Respuesta abierta.

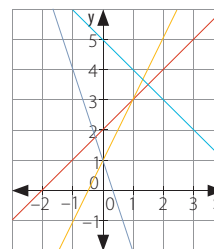
8

a) $y = x + 2$

b) $y = -3x + 1$

c) $y = -x + 5$

d) $y = 2x + 1$



Página 144

9

a) • $A = 80x + 1575$

• Dom A: $\mathbb{R}$, Rec A: $\mathbb{R}$.

• $x = 81,25$ cm

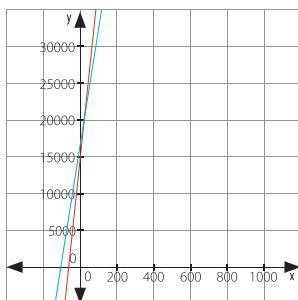
• El área de la superficie sería de 3975 cm².

b) • $S = 150000 + 3000V$, S : sueldo mensual, V : cantidad de ventas

• 50 ventas.

• Si, le conviene.

- c) • $C = 5 \cdot t$, C: cantidad de agua, t: tiempo transcurrido.
• 11:40
- d) • $h = 100 - 0,0002 \cdot t$, h: altura del agua, t: tiempo transcurrido
• 25 000 minutos
• recta. m negativa, afín
- e) • $M_A = 16\,000 + 100 \cdot l$ / $M_B = 18\,000 + 70 \cdot l$, M: monto total, l: cantidad de llamadas
• Para 20 el A, para 80 el B.
• Desde 67 llamadas conviene plan B.



- f) • $V = -10t + 25\,000$, V: valor de la consola, t: meses que han pasado $t > 1$
• 2500 meses.

Página 145

10

- a) La recta se acerca al eje Y.
b) Tiende a ser vertical.
c) La recta cambia de pendiente.
d) Tiende a ser vertical.
e) La recta sube y corta al eje Y en 4.
f) La recta baja y corta al eje Y en -4.
g) El valor donde la recta corta al eje Y. (coeficiente de posición).
h) Al variar **a**, cambia la pendiente y al variar **b**, cambia la intersección de la recta con el eje Y.
i) No.

11

- a) $s = 40 + 90t$ b) 30 min.

12 Se busca dos puntos que pertenezcan a la recta, por ejemplo $(-3, 1)$ y $(0, 2)$. Con los puntos se calcula la pendiente de la recta: $m = \frac{1}{3}$. Luego se determina la intersección con el eje Y, en este caso 2. Por último se escribe la ecuación de la recta: $y = \frac{1}{3}x + 2$.

13

- a) Es correcto, porque mientras el valor de la pendiente sea mayor entonces la inclinación se acerca a ser más vertical.
b) Porque generalmente se dice que la inclinación es mayor cuando la recta se acerca a la horizontal y esto es un error ya que si la pendiente tiende a infinito la recta será vertical.

Página 147

1

- a) 4 c) 2 e) $-\frac{1}{4}$
b) $\frac{63}{64}$ d) $-\frac{63}{64}$ f) $\frac{31}{2}$

2

- a) Dom = $\{-3, -1, 0, 2\}$ / Rec = $\{-11, -1, 4, 14\}$
b) Dom = $\{5, -3, 9, -1\}$ / Rec = $\{8, -10, -7\}$
c) Dom = $\mathbb{R}$ / Rec = $\mathbb{R}$ d) Dom = $\mathbb{R}$ / Rec = $\mathbb{R}$

3

- a) $-10x$ d) $8x - 2$ g) $4x$ j) $-40x + 5$
b) $25x$ e) $4x^2 - 1$ h) $2x^2$ k) $-20x^2 - 1$
c) $-20x + 5$ f) $25x^2$ i) $-40x + 10$ l) $-40x^2 - 2$

4

- a) 14 c) 20 e) 100 g) $-15,32$
b) -95 d) 842 f) $-\frac{34}{3}$ h) 49,65...

Página 148

5

- a) Dom = $\{-5, 8, 10, 25, 0\}$ / Rec = $\{11, 89, 45, 26\}$
b) Dom = $\{32, -5, 7, -3\}$ / Rec = $\{6, 63, -2\}$

6

- a) 9 f) Dom $g = \{-6, -1, -7, 9\}$
b) -6 g) Rec $f = \{-6, -1, -7, 9\}$
c) 0 h) Rec $g = \{0, -6, 5\}$
d) 0 i) Dom $gof = \{-5, -3, 4, 5, 1\}$
e) Dom $f = \{-5, -3, 4, 5, 1\}$

7

- a) Dom $gof = \{5, 8, 9, 12, 15\}$ / Rec $gof = \left\{-\frac{5}{2}, -4, -\frac{9}{2}, -6, -\frac{15}{2}\right\}$
b) Dom $gof = \{-5, -3, 0, 6, 7\}$ / Rec $gof = \{-4, -3, 3, 6, 8\}$

8

- a) Dom = $\mathbb{R}$ / Rec = $\mathbb{R}$ f) Dom = $\mathbb{R}$ / Rec = $\mathbb{R}$
b) Dom = $\mathbb{R}$ / Rec = $\mathbb{R}$ g) Dom = $\mathbb{R}$ / Rec = $\mathbb{R}$
c) Dom = $\mathbb{R}$ / Rec = $\mathbb{R}$ h) Dom = $\mathbb{R}$ / Rec = $\mathbb{R}$
d) Dom = $\mathbb{R}$ / Rec = $\mathbb{R}$ i) Dom = $\mathbb{R}$ / Rec = $\mathbb{R}$
e) Dom = $\mathbb{R}$ / Rec = $\mathbb{R}$ j) Dom = $\mathbb{R}$ / Rec = $\mathbb{R}$

9

- a) $g(x) = 6x$ b) $f(x) = -10x$ c) $g(x) = \frac{2x-1}{2}$

Página 149

10

- a) • $hof(i) = 8i + 4500$
• $foh(i) = 8i + 2000$
• Con la primera.
b) • $2,091x^2$ y $2,154x^2$
• La A, ya que la pureza final es mayor.
c) Entra $\rightarrow$ Makita $\rightarrow$ zuki $\rightarrow$ matzucu $\rightarrow$ sale
d) El de $f(t)$.



11

- a) El A.
b) El medicamento se disuelve más rápido con g o f(c).

12 El cuatro no debía multiplicarse por $(x^2 - 3)$.

Página 152

1

- a) -1 b) 0 c) 0

2

- a) -3 f) $\text{Dom } g = \{-3, -1, 1, 3, 5\}$
b) 11 g) $\text{Rec } f = \{-3, -1, 1, 3, 5\}$
c) 27 h) $\text{Rec } g = \{11, 3, 27\}$
d) 11 i) $\text{Dom } \text{gof} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
e) $\text{Dom } f = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ j) $\text{Rec } \text{gof} = \{11, 3, 27\}$

3

- a) 10 e) 5 i) $\{5, 10, 1\}$
b) 6 f) $2\sqrt{5}$ j) $\{2\sqrt{5}, 5, 4, 6\}$
c) 5 g) $\{-2, 2, -3, 3, 0\}$ k) $\{-2, 2, -3, 3, 0\}$
d) 4 h) $\{5, 10, 1, 21\}$ l) $\{2\sqrt{5}, 5, 4, 6\}$

4

- a) $x - 1$ c) $-x - 6$ e) $-x + 3 + b + c$
b) $-\frac{x}{2} + 1$ d) $ax + b$

5

- a) 12 b) 17 c) $3k - 1, 3k, k^2 + 1$
d) Es lo mismo que evaluar la función en la constante.

6

- a) 0 c) Ambas composiciones da como resultado 0.
b) 0

Página 153

7

- a) Sí.
b) Sí, $\text{fog}(x) = f(bx) = a(bx) = abx$ y $\text{gof}(x) = (ax)b = abx$, por lo tanto $\text{fog}(x) = \text{gof}(x)$.

8

- a) • 400 kg
• 2100
• 3150
• $C(n) = 100n + 100$
• $T(n) = 150n + 150$
• El costo total en función de los trabajadores
b) • 40,4 • $50 - 4,8t$
c) • $A = x^2$
• Costo de la mesa en función de la medida del lado.
• Costo de cada carpintero en función de la medida del lado.
• 400
• 22500

9 Respuesta abierta.

10 Las composiciones fog y gof son iguales cuando las funciones f y g son lineales y distintas cuando f y g son afines.

11 $24x + 4$.

Página 154

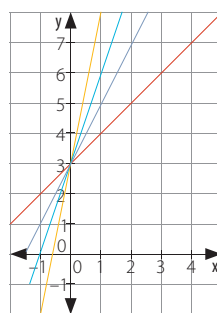
1

- a. No es afín.
b. Afín, representa una recta que corta al eje Y en $n \neq 0$.
c. Afín, representa una recta que corta al eje Y en $n \neq 0$.
d. Afín, representa una recta que corta al eje Y en $n \neq 0$.
e. Afín, representa una recta que corta al eje Y en $n \neq 0$.
f. Afín, representa una recta que corta al eje Y en $n \neq 0$.
g. No es afín.
h. No es afín.

2

- a. $f(x) = x + 3$, $g(x) = x + 2$, $h(x) = x$ y $u(x) = x - 2$.
b. Todas tienen pendiente positiva pero cortan al eje Y en diferentes puntos.
c. La función lineal pasa por el punto $(0, 0)$, la afín por $(0, n)$ $n \neq 0$. El valor que no acompaña a la x es el que indica la coordenada donde se corta al eje Y.

3



- a. Todas son funciones afines que cortan al eje Y en 3, pero a medida que la pendiente aumenta, la grafica se acerca al eje Y.
b. Que manteniendo el coeficiente de posición fijo y aumentando el valor de la pendiente la función tiende a ser vertical.

4

- a. $T = 20 + 3x$, T: temperatura final, x: minutos transcurridos.
b. $P = 950 + 25m$ P: total a pagar, m: minutos hablados.
c. $D = 2300a - 100000$
d. $P = 980 + 13,8x$
e. $G = 100000 + 45x$
f. $D = 12400x$
g. $C = 550x + 566$ y $C = 650x + 566$, esta última modela el costo por sobreconsumo.

Página 155

4

- h. $P = 8000 + 7200t$
i. $S = 250\,000 + 5/100Px$, P: precio auto, x: cantidad vendida
j. $P = \frac{33\,500}{3}$ A A: cantidad de ambulancias.
k. • $C(x) = 10\,000 + 1000x$
• $\text{Dom} = N$, $\text{Rec} = N$
• $C(10) = 20\,000$, $C(15) = 25\,000$, $C(20) = 30\,000$, $C(30) = 40\,000$, $C(50) = 60\,000$
• 25 sillas

5

- a. F b. V c. V d. F

6

- a. 10 c. 2 e. $3x^2 - 2$
b. 1 d. 65 f. $9x^2 - 30x + 26$

7

- a. 66 e. $x^4 + 10x^3 + 30x^2 + 25x$
b. 0 f. $9x^2 + 21x + 6$
c. 31 g. $9x + 4$
d. -14,75 h. $3x^2 + 15x + 1$

8

- a. $\text{Rec } f = \{0, 2, 4, 6, 8\} / \text{Rec } g = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
b. 3 y 5 respectivamente.
c. $2x + 1$
d. $\text{Dom } g \circ f = \{0, 1, 2, 3, 4\} / \text{Rec } g \circ f = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
e. Al componer las funciones $g \circ f$, el dominio de $g \circ f$ sera el mismo de la function f y el recorrido de $g \circ f$ sera el mismo que el recorrido de la function g .

9

- a. V b. F c. F d. F

Página 157

1

- a. 600 kg
b. \$65 000
c. $C(t) = 10\,000t + 5000$

2

- a. \$50010 c. $T(u) = 2001u + 1000u$
b. \$120010

3

- a. $5,5x + 110$
b. $5,5x + 10$
c. $A \rightarrow 1,21x$ y $B \rightarrow 0,25x + 15$

Página 158

1

- a. Caso 1 incorrecto, al multiplicar b por b se consideró como $2b$ en vez de b^2 .
b. Caso 2 incorrecto, se multiplicó por ambos binomios.

2

- a. $-x^2 - 4x + 20$
b. -3
c. $2x^5 - 11x^4 + 16x^3 - x^2 - 6x$

Página 159

1

- a. Caso 2 incorrecto, se multiplicaron las funciones en vez de considerar $g(x)$ como x de $f(x)$.
b. Caso 1 incorrecto, se multiplicaron las funciones en vez de considerar $g(x)$ como x de $f(x)$.

2

- a. $\text{fog}(x) = 96x - 19$ b. $\text{fog}(x) = -0,1x - 5,65$

Página 161

1

- a. $x = \frac{a}{a-1}$ d. $x = \frac{m^2 - n^2}{m^2n - n^2}$
b. $x = ab$ e. $x = \frac{su - s + 3t + ru}{r}$
c. $x = 0$

2

- a. -81 c. 8,1 e. 125 g. -40 i. -132
b. 273 d. -33 f. -267 h. 2133 j. -291

Página 162

1

- a. $3x - 2y$
b. $1000x + 10\,000x + 30\,000x = 41\,000x$. Tienen \$123 000.

2

- a. 6 b. 645

3

- a. $2a^2b + 4a$
b. $-a^3b^2 - a^3b - 2a^2b - 2a^2$
c. $4ab + 4a$
d. $4a^3b^2 + 4a^3b + 8a^2b + 8a^2$
e. $a^4b^2 - a^3b^2 + 3a^3b - 2a^2b + 2a^2$
f. $a^4b^2 + a^3b^2 + 5a^3b + 2a^2b + 6a^2$

4

- a. $x^4 - 4x^2y + 4y^2$
b. $4x^4 + 20x^2 + 25$
c. $0,0576x^2 - 0,144xy + 0,09y^2$
d. $a^2 - 6ay - 4a + 9y^2 + 12y + 4$
e. $0,015625x^3 - 0,5625x^2y + 6,75xy^2 - 27y^3$
f. $n^3y^3 + 9n^2x^3y^2 + 27nx^6y + 27x^9$

5

- a. $2x^2y(11x^2y + 9)$
b. $(4x^2 - 4)(4x^2 + 4)$
c. $(1 - x)(3x - 1)$
d. $(x - 8)(x - 2)$
e. $(x - 1)(y + 1)$
f. $(z - xy)(-x^2y^2 - xyz - z^2)$
g. $(3 - 2n)(m - 7n)$
h. $(x - 2)(2x - 1)(2x + 1)(x^2 + 2x + 4)$
i. $(y + 6)(y^2 - 6y + 36)$

6

- a. $x = 11$ d. No tiene solución.
b. $x = \frac{4}{3}$ e. $x = 25$
c. $x = 15$ f. $x = \frac{2}{5}$

Página 163

7

- a. $x = 25 - 2a$ b. $a = 10(1 - x)$



- 8**
- a. $x = \frac{-b}{a-1} + \frac{4}{a-1}$ $a \neq 1$
- b. $x = \frac{2}{a+1}$ $a \neq -1$
- c. $x = \frac{-ab}{5a^2+ab-1}$ $a \neq \frac{-b \pm \sqrt{b^2+20}}{10}$ $b \in \mathbb{R}$
- d. $x = \frac{-2ab^2-4}{ab^2-5b^2-4b}$ $a \neq 0$ $a \neq 5$
- 9** $x = \frac{a+4}{2}$, $a > -4$ y $a = 4(n-1)$

- 10**
- a. Sí b. Sí c. No

- 11**
- a. Dom: $\mathbb{R}$, Rec: $\mathbb{R}$ b. Dom: $\mathbb{R}$, Rec: $\mathbb{R}$ c. Dom: $\mathbb{R}$, Rec: $\mathbb{R}$

- 12**
- a. Rec = $\{-2, -4, -6, -8, -10, -12\}$ c. Rec = $\{0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3\}$
- b. Dom = $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

- 13**
- a. Cambia la inclinación de la recta.
- b. Se traslada cortando al eje Y en b.

- 14**
- a. $\text{fog}(x) = 2x^2 - 7$ / $\text{gof}(x) = 4x^2 - 12x + 7$
- b. $\text{fog}(x) = -\frac{x}{3}$ / $\text{gof}(x) = -\frac{x}{3}$
- c. No siempre, ya que si las funciones son lineales (o afines), la composición entre ellas es conmutativa, pero en el caso de ser otras funciones la composición no es conmutativa.

Ejercicios parte I

Página 164

1. B 2. C 3. A 4. E 5. D 6. E 7. B 8. C

Página 165

9. D 11. C 13. D 15. A 17. B
10. E 12. E 14. C 16. C

Página 166

18. D 19. C 20. C 21. C

Ejercicios parte II

- 1**
- a. $x^3 - 9x^2 - 9x + 81$ b. $(x^2 - 10404)m^2$

- 2**
- a. $5a^2 - 10a^3b^2$ c. $0,9m^5n^2 - mn^3$
- b. $15y^2 + 92y + 117$ d. $-15x^2 - 11x - 2$

- 3**
- a. $a^2 + 2a - b^2$
- b. $2a^3 + 2a^2b + 2a^2 - 2ab^2 + 4ab - 2b^3 + 2b^2$
- c. $a + 3b$
- d. $a^3 + 3a^2b + a^2 - ab^2 + 4ab - 3b^3 + 3b^2$

- 4**
- a. $(x+z)(x+y)$ b. $(2ab - 3xy^2)(2ab + 3xy^2)$

c. $(x^3 - 8y^6)(x^3 + 8y^6)$

d. $(x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x + 4)$

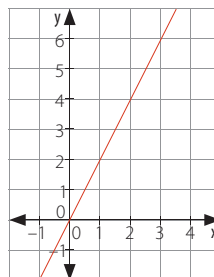
Página 167

5

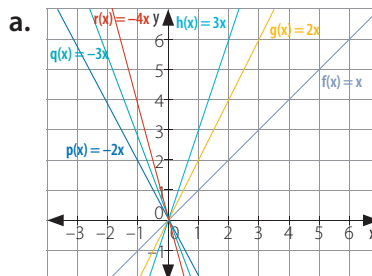
- a. $a + b = 75$, $b = 75 - a$
- b. $m + n = 1000$, $n = 1000 - m$, $m = 1000 - n$

6

- a. Si es lineal. b. No es lineal.

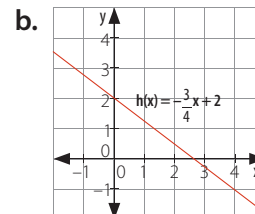
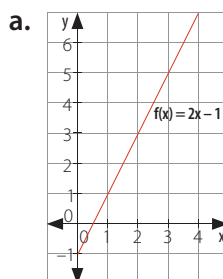


7

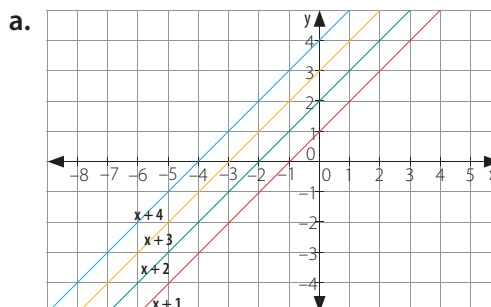


- b. A medida que aumenta a (en valor absoluto) la grafica de la función tiende a ser vertical.
- c. Cuando a es positivo o negativo lo que cambia es la inclinación de la recta. Como representa la pendiente se tiene pendiente positiva y negativa respectivamente.

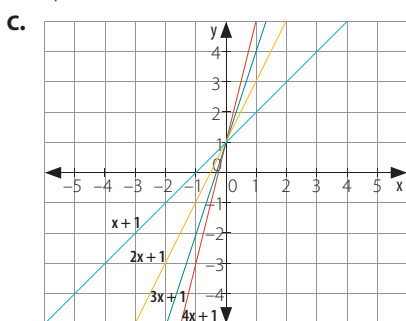
8



9



- b. Las rectas son paralelas con igual pendiente, y a medida que b aumenta, la recta $x + 1$ se traslada.



- d. Las rectas tienden a inclinarse más.
e. Si las rectas tienen misma pendiente pero distinto coeficiente de posición, a medida que este aumenta (o disminuye) se traslada a la izquierda (o derecha) según las unidades que indique este. En cambio si las rectas tienen el mismo coeficiente de posición pero distinta pendiente, a medida que este aumenta (o disminuye) se inclina más (o menos) con respecto al eje x .

10

- | | |
|---|---|
| a. $f \circ g(x) = x + 3$ | i. $\text{Rec } f = \mathbb{R}$ |
| b. $g \circ f(x) = x + 3$ | j. $\text{Dom } g = \mathbb{R}$ |
| c. $f \circ h(x) = x^2 + 2x + 1$ | k. $\text{Rec } g = \mathbb{R}$ |
| d. $g \circ h(x) = x^2 + 2x$ | l. $\text{Dom } h = \mathbb{R}$ |
| e. $h \circ g(x) = x^2 + 4x + 2$ | m. $\text{Rec } h = [-2, \infty[$ |
| f. $h \circ (g \circ f)(x) = x^2 + 8x + 14$ | n. $\text{Dom } f \circ g = \mathbb{R}$ |
| g. $f \circ (g \circ h)(x) = x^2 + 2x + 2$ | o. $\text{Rec } g \circ f = \mathbb{R}$ |
| h. $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ | |

Desafío "Los discípulos de Einstein"

El mayor tiene nueve años y los dos pequeños, dos años cada uno. Efectivamente, con el primer dato que da el padre, solo existen ocho combinaciones de edades que cumplan la condición de que su producto sea 36:

$1 - 1 - 36, 1 - 2 - 18, 1 - 3 - 12, 1 - 4 - 9, 1 - 6 - 6, 2 - 2 - 9, 2 - 3 - 6$ y $3 - 3 - 4$.

Si se suman las tres edades de cada combinación, se obtiene: 38, 21, 16, 14, 13, 11, 13 y 10, respectivamente.

Como al soltero le falta un dato para averiguar las edades, esto quiere decir que solo puede ser una de las dos combinaciones que suman lo mismo ($1 - 6 - 6$ o $2 - 2 - 9$), ya que si el número del portal fuera 38, 21, 16, 14, 11 o 10, el soltero habría adivinado automáticamente, sin necesitar más datos, la edad de los hijos de su amigo. Al decir el casado que el que tiene más años toca el piano, se descarta la combinación $1 - 6 - 6$, porque es ese caso los dos hermanos mayores tendrían la misma edad, quedando en consecuencia la combinación $2 - 2 - 9$ como la única posible.

Integro mis aprendizajes

Página 168

- | | | | |
|------|------|------|------|
| 1. C | 3. D | 5. B | 7. B |
| 2. B | 4. C | 6. B | 8. D |

Página 169

- | | | | |
|-------|-------|-------|-----------|
| 9. E | 11. A | 13. B | 15. B |
| 10. E | 12. C | 14. A | 16. Falta |

Página 170

- | | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| 17. C | 19. B | 21. A | 23. A |
| 18. D | 20. A | 22. B | 24. C |

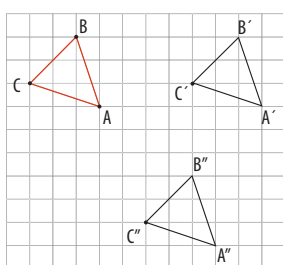
Página 171

- | | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| 25. E | 27. A | 29. C | 31. B |
| 26. B | 28. C | 30. A | |

Unidad 3

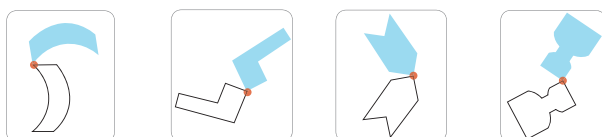
Página 174

1

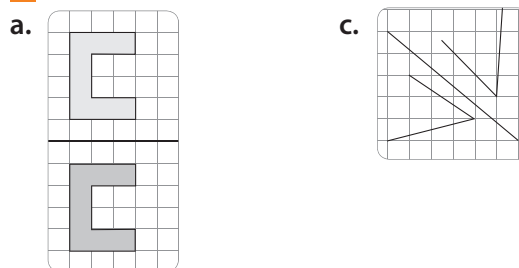


2

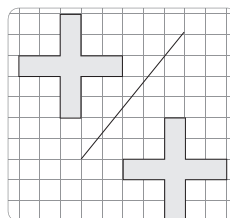
- a. 270° b. 135° c. 90° d. 210°



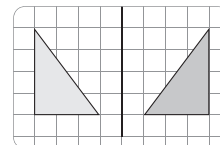
3



b.



d.





4

- a. Rotación c. Reflexión e. Reflexión
b. Rotación d. Traslación

Página 175

5

- a. 12 lados, 12 ángulos, lados y ángulos de igual medida.
b. Cuadrilátero, lados de igual medida, y ángulos opuestos iguales.
c. Paralelogramo, un par de lados paralelos, dos lados de igual medida.
d. 3 lados, 3 ángulos, lados y ángulos de igual medida.
e. 6 lados, 6 ángulos, lados y ángulos de igual medida.
f. 3 lados, un ángulo recto, dos ángulos de igual medida.

6

- a. La respuesta depende de cada estudiante. Un ejemplo es: Triángulo isósceles.
b. La respuesta depende de cada estudiante. Un ejemplo es: Rectángulo.
c. La respuesta depende de cada estudiante. Un ejemplo es: Trapecio rectángulo.
d. La respuesta depende de cada estudiante. Un ejemplo es: Triángulo rectángulo.
e. La respuesta depende de cada estudiante. Un ejemplo es: Pentágono regular.

7

- a. $3x + 3$ c. $-27x$ e. $-9x$ g. $6x - 9$ i. $-6x - 2$
b. $2x - 3$ d. $-6x - 4$ f. $-18x - 9$ h. $-6x - 3$

8

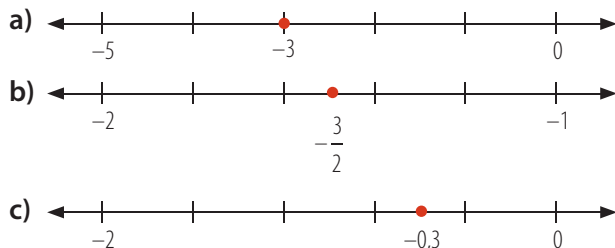
- a. V
b. V
c. $F, go(hof)(x) = 6x - 3$ y $go(foh)(x) = 6x - 11$
d. V
e. $F, hoh(x) = 4x - 12$ y $h(x) = 2x - 4$.
f. $F, (gog)o(hoh)(x) = 4x - 10$ y $(hoh)o(gog)(x) = 4x - 4$

9

- a. El cero c. $108^\circ, 120^\circ$ f. 2,7 m.
b. Rotación, reflexión. d. 3 g. 5
e. 20 h. 72 m.

Página 177

1



2

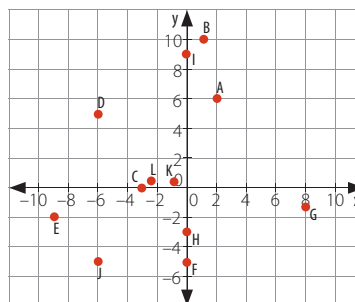
- a) III c) III e) IV g) III i) III
b) IV d) II f) I h) IV j) II

Página 178

3

- a) (0, 1) d) (3, -1) g) (-1, -1) j) K(-3, 2)
b) (-4, 0) e) (1, -2) h) (-5, -3) k) L(-2, -4)
c) (-2, 4) f) (0, -4) i) (1, 0) l) K(4, -3)

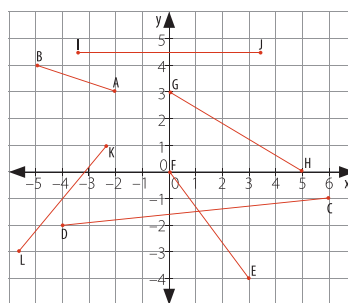
4



5

- a) C(1, 2) y D(1, -2) f) S(2, 1) y T(5, 0)
b) E(-2, 3) y F(2, 3) g) O(-4, 3) y P(-3, 2,5)
c) G(-4, -1) y H(-1, 2) h) Q(-5, -2) y R(-2,5; -1,5)
d) K(-1, -1) y L(-1, -4) i) U(0, 2) y V(3, 3)
e) M(1, -3) y N(2, -2)

6



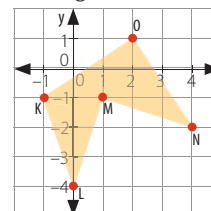
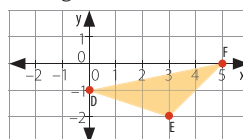
7

- a) A(-2, -1), B(3, -2) y C(2, 1)
b) I(-2, 2), J(0, 2), K(1, 0), L(0, -2), M(-2, -2) y H(-3, 0)

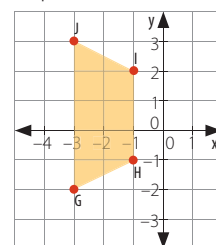
Página 179

8

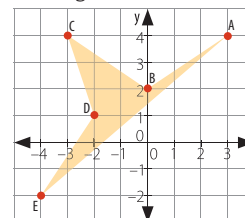
- a) Triángulo c) Pentágono cóncavo



- b) Trapecio



- d) Pentágono cóncavo

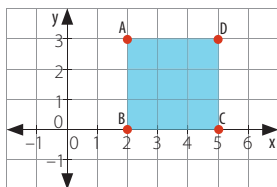


9

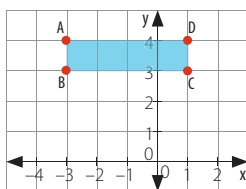
- a) El otro vértice tiene coordenadas $(-3, 0)$.
 b) La respuesta depende de cada estudiante. Un ejemplo es: $(5, -2)$ y $(1, 2)$.
 c) $x = -\frac{1}{3}, y = -5$

10

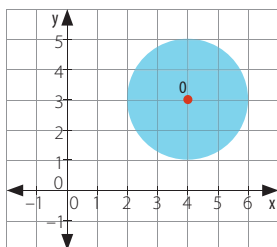
- a) La respuesta depende de cada estudiante. Un ejemplo es:



- b) La respuesta depende de cada estudiante. Un ejemplo



c)



11

- a) • Puede cambiar de posición cualquiera de los vértices, siempre y cuando cambie el valor de la ordenada.
 • Por ejemplo, puede trasladar $(4, 2)$ a $(4, 5)$.
 • No, ya que puede trasladar cualquiera de los vértices a cualquier parte del plano siempre y cuando cambie el valor de la ordenada.
 b) • $D(5, 8)$
 • Sí, ya que hay tres puntos dados, existe solo una opción.

12 No, pues graficó $(-2, 3)$

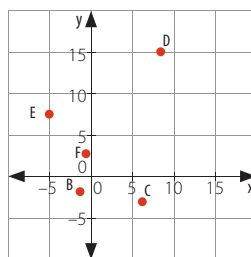
13 Graficar los puntos y luego encontrar un punto del cual los puntos dados equidisten.

Página 181

1

- | | | | |
|---------------|---------------|--------------------|------------------|
| a) $(1, 3)$ | e) $(-4, -1)$ | i) $(4, -1)$ | m) $(2, 2, 5)$ |
| b) $(-3, -3)$ | f) $(-1, -3)$ | j) $(3, 0)$ | n) $(-1, 5; -1)$ |
| c) $(-1, 4)$ | g) $(0, -2)$ | k) $(0, 1)$ | o) $(1, 5; -1)$ |
| d) $(-2, 0)$ | h) $(2, -3)$ | l) $(-2, 5; 2, 5)$ | p) $(-3, 5; 0)$ |

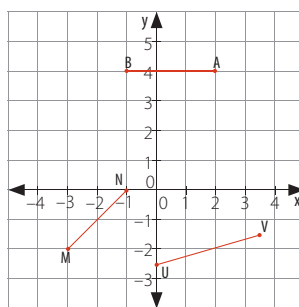
2



3

- | | |
|----------------------------------|---|
| a) $A(1, 0)$ y $B(3, 2)$ | g) $M(-3, 1)$ y $N(-1, -1)$ |
| b) $C(4, 1)$ y $D(4, 4)$ | h) $O(-4, -3)$ y $P(-1, -2)$ |
| c) $E(2, 4)$ y $F(-1, 4)$ | i) $Q(-1, 5; -3, 5)$ y $R(0, 5; -3, 5)$ |
| d) $G(-3, 5)$ y $H(-1, 5; 3, 5)$ | j) $S(1, -4)$ y $T(3, -2)$ |
| e) $I(-3, 4)$ y $J(-4, 3)$ | k) $U(0, -2)$ y $V(3, 0)$ |
| f) $K(-5, 2)$ y $L(-2, 5; 2)$ | l) $W(2, -2)$ y $Z(3, 5; -0, 5)$ |

4



Página 182

5

- a) $A(-3, 0)$, $B(-1, 0)$ y $C(1, 3)$.
 b) $D(-1, -2)$, $E(2; -0, 5)$, $F(2; 2, 5)$ y $G(-2, 3)$.
 c) $H(-2, -2)$, $I(-3, -3)$, $J(0, -3)$, $K(3, -1)$, $L(1, -1)$, $M(1, 2)$, $N(-1, 1)$.

6

- | | | |
|-------------------------|------------------------|------------------------|
| a) $\vec{v} = (-1, 3)$ | c) $\vec{x} = (0, -2)$ | e) $\vec{z} = (-3, 0)$ |
| b) $\vec{w} = (-3, -2)$ | d) $\vec{y} = (2, -2)$ | f) $\vec{t} = (4, 0)$ |

7

- | | | |
|---------------|--------------|--|
| a) $(-5, -5)$ | c) $(-6, 5)$ | e) $\left(\frac{1}{10}, \frac{10}{7}\right)$ |
| b) $(-3, 2)$ | d) $(3, 0)$ | f) $(-0, 75; -1)$ |

8

- | | | | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|------|------------------|
| a) $\sqrt{20}$ | b) $\sqrt{26}$ | c) $\sqrt{10}$ | d) $\sqrt{41}$ | e) 3 | f) $\frac{7}{2}$ |
|----------------|----------------|----------------|----------------|------|------------------|

9

- | | | |
|--|--|--------------------------|
| a) $\vec{b}$ y $\vec{a}$ | d) $\vec{a}$ y $\vec{z}$, $\vec{u}$ y $\vec{w}$ y $\vec{c}$ | g) $\vec{u}$ y $\vec{w}$ |
| b) $\vec{a}$ y $\vec{z}$, $\vec{c}$ y $\vec{w}$ y $\vec{u}$ | e) $\vec{b}$ y $\vec{a}$ | h) $\vec{b}$ y $\vec{z}$ |
| c) $\vec{b}$ y $\vec{a}$ | f) $\vec{c}$ y $\vec{w}$ | |

Página 183

10

- a) La primera afirmación es correcta y la segunda es falsa ya que en esta última, si al vector $\vec{f}$ le sumamos el vector de componentes $(1, 2)$ el nuevo vector suma de componentes $(4, 3)$ no va dirigido hacia el centro del arco, sino que a una de sus esquinas.
 b) El tiro correspondiente al vector $\vec{e}$ detendrá la pelota de voleibol y con el tiro correspondiente al vector $\vec{a}$ ganará.

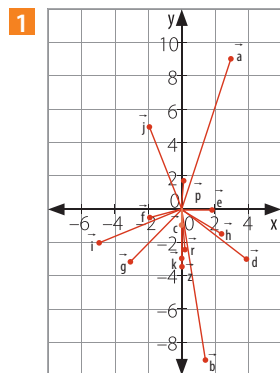


11 Calculó $C - A$ en vez de $A - C$.

12 Se consideran el punto final y el punto inicial y se restan las componentes del punto inicial a las del punto final.

13 La respuesta depende de cada estudiante.

Página 185



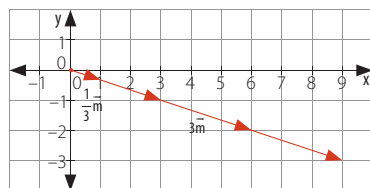
- 2**
- a) (4, 6) e) (10, 15) i) (1, 2; 1, 8)
- b) (0, 0) f) (20, 30) j) (-3, -4, 5)
- c) (-4, -6) g) (-8, -12) k) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$
- d) (2, 3) h) (-24, -36) l) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3, -1 \end{pmatrix}$

Página 186

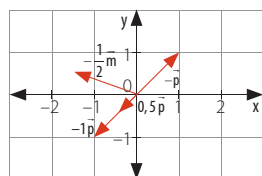
- 3**
- a) $2\vec{f}$ c) $3\vec{u}$ e) $3\vec{k}$ g) $3\vec{w}$
- b) $4\vec{g}$ d) $2\vec{v}$ f) $2\vec{s}$ h) $4\vec{r}$

4

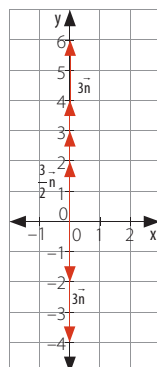
a) b) y c)



g) h) e) i)



d) e) y f)



- 5**
- a) (20, 30) d) (6, -18) g) (-0,6; 0)
- b) (0, 0) e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4, -1 \end{pmatrix}$ h) (-0,09; 0)
- c) (-1, 3) f) (8,4; 12,6) i) (-0,05; 0,2)
- 6**
- a) (2, 3) b) (-3, 6) c) (-3, 0) d) (2,4; -1)

- 7**
- a) $k = \frac{1}{2}$ c) $k = \frac{1}{4}$ e) $k = -2$
- b) $k = \frac{1}{2}$ d) $k = -\frac{1}{10}$ f) $k = -\frac{1}{8}$

Página 187

- 8**
- a) • Con el vector b) • 4 veces mayor. c) • (-9, -3)
- (2, 1). • -5 • 0
- (8, 4)
- d) La respuesta depende de cada estudiante, un ejemplo sería:
- $k = 2$ y (8, 1)
- $k = 0,5$ y (32, 4)
- $k = 4$ y (4, 0,5)

- 9**
- a) Se cumple: $1 \times (-5, -7) = (-5, -7)$
- b) Se cumple: $-1 \times (-3, 1) = (3, -1)$

10 Es falso, ya que los vectores disminuyen su magnitud al ser multiplicados por un escalar mayor que cero y menor que 1.

- 11**
- a) Falso, la magnitud es mayor.
- b) Falso, tiene la misma dirección.
- c) Falso, si se puede ya que $\sqrt{2}$ es un número real.
- d) Verdadero.

12 (10, 2)

13 Si se puede dividir un vector por un escalar ya que es equivalente a multiplicar el vector por el inverso multiplicativo del escalar. Cumple las mismas propiedades.

Página 190

- 1**
- a) (3, -5) c) (1, 8) e) $\left(-3, 3; \frac{50}{3}\right)$
- b) (-7, 13) d) (-6, 6)

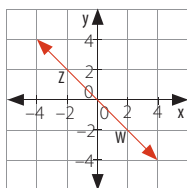
2

$\begin{pmatrix} -5, 7 \\ -2, \frac{161}{8} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5, 7 \\ 6, -\frac{159}{8} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 & 25 \\ -2 & 12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 25 \\ -2 & 12 \end{pmatrix}$

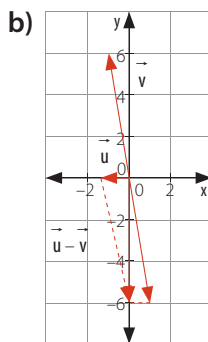
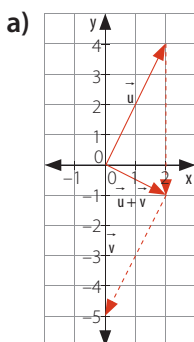
Página 191

- 3**
- a) (-2, 5) c) (6, -5) e) (-4, 7)
- b) (5, -2) d) (-2, 2) f) (4, 0)
- 4**
- a) Verdadero, por ejemplo: $\vec{u} = (2, 3)$ y $\vec{v} = (-2, -1)$
- $\vec{u} + \vec{v} = (2, 3) + (-2, -1) = (0, 2)$
- $\vec{v} + \vec{u} = (-2, -1) + (2, 3) = (0, 2)$
- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- b) Verdadero, $\vec{u} + \vec{v} = (1, -1) + (-1, 1) = (0, 0)$.

c) Falso, tienen distinto sentido.



5



6

a) (5, 3)

b) Corresponde al vector $\vec{v} = (4, -2)$ que es resultado de sumar los vectores de componentes (2,2), (-3,-3) y (-1,-1).

7 La respuesta depende de cada estudiante.

8 Sí, porque:

$$(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{c} = ((3,4) + (2,0)) - (-2,4)$$

$$= (5,4) - (-2,4) = (7,0)$$

$$\vec{a} + (\vec{b} - \vec{c}) = (3,4) + ((2,0) - (-2,4))$$

$$= (3,4) + (4,-4) = (7,0)$$

9 La adición de vectores cumple con la conmutatividad, elemento neutro y opuesto.

La sustracción de vectores cumple con elemento neutro.

Página 192

1

- | | | | |
|------------|-----------|------------|-------------|
| a. (-3, 8) | d. (3, 8) | g. (5, -3) | j. (0, -8) |
| b. (-7, 6) | e. (5, 7) | h. (3, -2) | k. (-3, -5) |
| c. (-4, 4) | f. (6, 2) | i. (6, -7) | l. (-6, -3) |

2

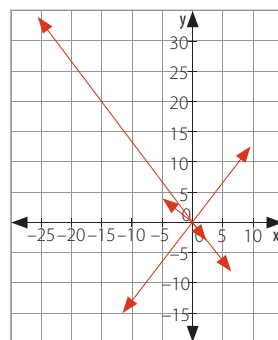
- | | | | |
|-------------|--------------|-------------|-------------|
| a. (2, -1) | c. (-1, 3) | e. (-10, 2) | g. (-2, 11) |
| b. (-10, 2) | d. (-3, -16) | f. (4, 2) | h. (-12, 4) |

3

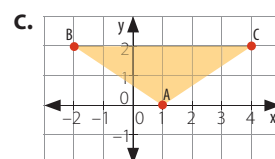
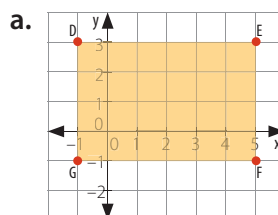
- | | | |
|----------------------------|------------------|----------------------------|
| a. $\vec{LM}$ y $\vec{GD}$ | c. D,E,F,G,H,I. | e. $\vec{FC}$ y $\vec{HM}$ |
| b. D,E y F. | d. A y D, L y G. | |

4

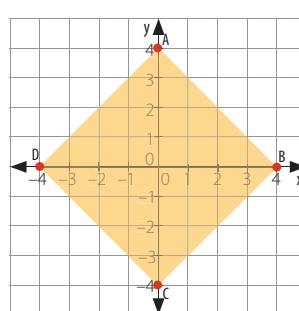
- | | | |
|-------|-------|-------|
| a. NO | c. SO | e. NO |
| b. SE | d. NE | f. SE |



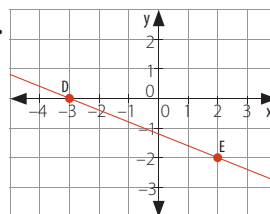
5



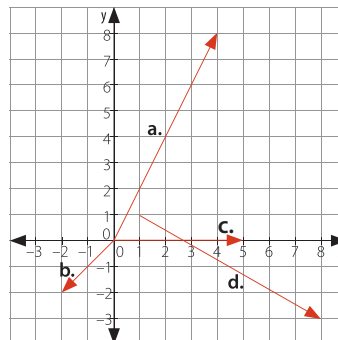
b.



d.



6



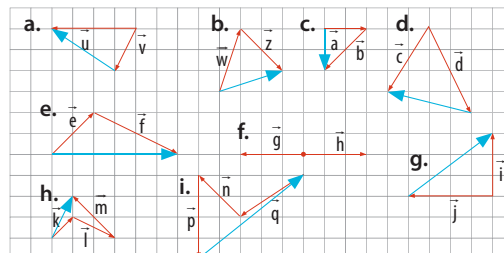
7

- a. (2,5; 3,5), (4, 4) y (5,5; 4,5)
- b. (4, -2)

Página 193

8 (-4, 12), (6, 10), (2, -9), -6

9





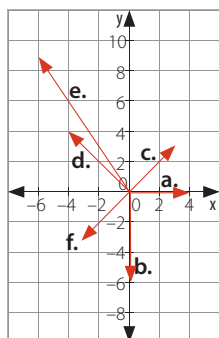
10

- a. $(-3, 2)$ d. $(-4, 1)$ g. $(4, 3)$
b. $(3, 1)$ e. $(6, 0)$ h. $(1, 2)$
c. $(0, -2)$ f. $(0, 0)$ i. $(5, 4)$

11

- a. $(4, 0)$ c. $(3, 3)$ e. $(-6, 9)$
b. $(0, -6)$ d. $(-4, 4)$ f. $(-3, -3)$

12



13

- a. $(3, 2)$ c. $(-12, 4)$
b. $(-7, 5)$ d. • De A a D • $(13, -3)$

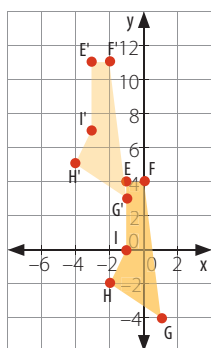
Página 195

1 El vector $(5, 2)$

2

- a) $(4, 5)$ c) $(0, 8)$ e) $\left(-\frac{8}{3}, -\frac{51}{5}\right)$
b) $(-3, 4)$ d) $(-5, 2)$ f) $\left(-\frac{7}{6}, -\frac{3}{5}\right)$

3



Página 196

4

- a) $(10, 8)$ d) $(-18, -10)$ g) $\left(\frac{17}{20}, -\frac{29}{30}\right)$
b) $(-10, 6)$ e) $(-83, 50)$ h) $\left(-\frac{7}{4}, -\frac{3}{5}\right)$
c) $(-2, -7)$ f) $(9, 3; 1, 9)$

5

- a) $(-2, 1)$ c) $(6, 5)$ e) $(22, -24)$
b) $(-1, -9)$ d) $(-4, -4)$ f) $(0, 4; 2)$

6

- a) $(6, 5)$ c) $(-1, -12)$ e) $(14, -1)$
b) $(3, 10)$ d) $(-6, 11)$ f) $(5, 8)$

7

- a) $(-11, 4)$ d) $(-25, 2)$
b) $(-48, -19)$ e) $(-5, -14)$
c) $(-16, 63)$ f) $(-4, -5)$

8

- a) La respuesta depende de cada estudiante. Un ejemplo es: $(-2, 5)$ y $(-2, -5)$.
b) La respuesta depende de cada estudiante. Un ejemplo es: $(1, 2)$ y $(2, -1)$.
c) La respuesta depende de cada estudiante. Un ejemplo es: $(8, 3)$ y $(-8, 4)$.
d) La respuesta depende de cada estudiante. Un ejemplo es: $(-1, 4)$ y $(-9, 6)$.
e) La respuesta depende de cada estudiante. Un ejemplo es: $(5, 2)$ y $(3, 4)$.
f) La respuesta depende de cada estudiante. Un ejemplo es: $(0, 2; -0, 1)$ y $(0, 8; -0, 1)$.
g) La respuesta depende de cada estudiante. Un ejemplo es: $\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, -\frac{4}{5}\right)$.
h) La respuesta depende de cada estudiante. Un ejemplo es: $\left(\frac{5}{9}, -\frac{4}{9}\right)$ y $\left(-\frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right)$.

9

- a) La respuesta depende de cada estudiante. Un ejemplo es: $A'(-3, 6)$, $B'(1, 6)$ y $C'(-1, 4)$.
b) $P'(2, -4)$, $Q'(4, -4)$, $T'(4, 1)$ y $U'(2, 1)$.
c) $F'(1, 4)$, $G'(1, 1)$, $H'(4, 1)$ e $I'(4, 4)$.
d) La respuesta depende de cada estudiante. Un ejemplo es: $A(0, 4)$, $B(1, 1)$ y $C(5, 1) \rightarrow A'(-1, 1)$, $B'(0, -2)$ y $C'(4, -2) \rightarrow A''(1, 6)$, $B''(2, 3)$ y $C''(6, 3)$.
e) $(-8, 2)$

Página 197

- f) • $(7, 7)$ • $(11, 12)$
g) • $(-2, -1)$ • $(-6, -3)$
h) La respuesta depende de cada estudiante. Un ejemplo es: $\vec{u}_1 = (-2, -2)$ y $\vec{u}_2 = (0, -6)$ y $\vec{u}_3 = (-5, 0)$.
i) Hasta B con el vector $(2, 0)$ y hasta D con el vector $(1, -2)$.
• Se puede trasladar A hasta B con el vector $(2, 0)$ y con ese mismo vector ir trasladando cada imagen. Luego, se puede trasladar A hasta D con el vector $(1, -2)$ y cada imagen con el vector $(2, 0)$.
• $(5, -2)$

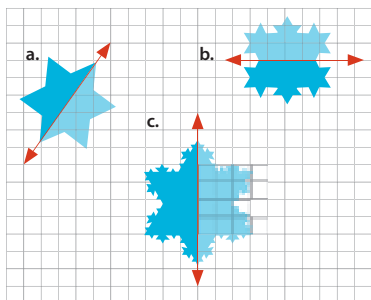
10 $y = 5$

11 La respuesta depende de cada estudiante. Un ejemplo es: que el barco se traslade según el vector $(6, -2)$, luego según el vector $(-7, -2)$ y por último según el vector $(1, 4)$.

12 Si pues la traslación es asociativa.

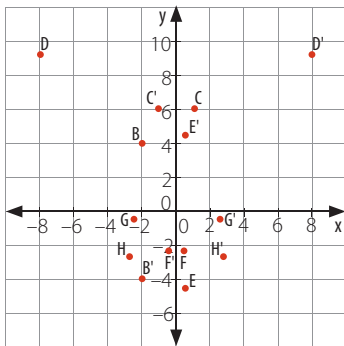
Página 199

1



2

- a) (2, 0) c) (-1, 6) e) $\left(\frac{1}{3}; 4, 5\right)$ g) $\left(1\frac{4}{3}; -0, 5\right)$
b) (-2, -4) d) (8, 9) f) $\left(-\frac{3}{8}; -\frac{9}{4}\right)$ h) $\left(2\frac{2}{3}; -2, 5\right)$



Página 200

3

- a) (-3, -10) c) (0, 4) e) (-21, 0) g) (-3, 6; 9, 2)
b) (-8, 9) d) (-11, 1) f) (-2; -0, 1) h) $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{6}\right)$

4

- a) (-7, -3) c) (3, 0) e) (0, -10) g) (8, 5; 1, 3)
b) (2, -4) d) (9, 4) f) (-6; 1, 1) h) $\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{9}\right)$

5

- a) A'(0, 0), B'(3, -8) y C'(-2, -1)
b) P'(4, -3), Q' $\left(-\frac{1}{8}, -\frac{2}{3}\right)$, R'(-2, -2) y S' $\left(\frac{1}{8}, -7\right)$
c) A'(-4, 3), B'(-3, 5), C'(-1, 5), D'(0, 3) y E'(-2, 2)

6

- a) Al reflejar un punto con respecto al origen cambia el signo de ambas componentes.
b) (-x, -y)
c) (10, 3) (-15; 0, 1) $\left(\frac{7}{8}, \frac{6}{13}\right)$

7

- a) Construcción del alumno. c) Construcción del alumno.
b) Construcción del alumno.

Página 201

- d) Figuras 1, 2 y 4.
e) Al juntarse los polígonos en un vértice, la suma de sus

ángulos interiores en ese vértice debe ser 360°.

8 Construcción del alumno.

9

- a) (-1, 1) y (3, 5)
b) (1, -2), (4, -2), (4, 2) y (1, 2)
c) (1, -1), (-3, -1), (-3, -4) y (1, -4)
d) (8, 9) y (1, 5; 4, 4)
e) (3, 0)

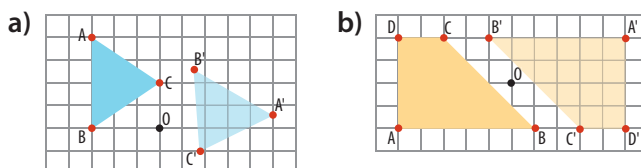
10 Reflejar con respecto al eje X y luego con respecto a la recta $x = -4$.

Con una traslación con respecto al vector (-4, 2).

11 Respuesta abierta.

Página 203

1



2

- a) (2, 5) c) (8, -3) e) (15, 9) g) (2, 7)
b) (-1, -1) d) (-6, -5) f) (-36, 14) h) (-32, 5)

3

- a) 270° c) 180° e) 180° g) 360°
b) 270° d) 90° f) 270° h) 90°

4

- a) (-9, -5) c) (0, -8) e) (-11, -7) g) (-13, 4)
b) (1, -2) d) (-10, -3) f) (-6, 1) h) (-5, 2)

Página 204

5

- a) 300° c) -240° e) 160°
b) -350° d) 350° f) -180°

6

- a) Centro origen, 90° c) Centro origen, 270°
b) Centro origen, 180° d) Centro origen, 180°

7

- a) (5, -3) e) A'(1, -1), B'(1, -3) y C'(4, -1)
b) (-1, -7) f) (-3, -1), (-2, 0), (-3, 1) y (-4, 0)
c) (1, -4) g) (1, -3)
d) (2, -5) h) A'(-2, 0), B' $\left(4, -\frac{3}{4}\right)$ y C(2, 7; 3)
i) A(4, 3), B(7, 4), C(8, 1) y D(7, 1)

Página 205

- j) 180°
k) • En América.
• Océano Antártico, Asia, América del sur.
• Centro origen y 90°.
l) A'(0, 2), B'(-2, 3) y C'(0, 3)
m) (-12, 4) y (-11, 5)



8 Construcción del alumno.

9 180°

10 Reduciendo los ángulos a menores de 360° .

Al rotar en 720° queda igual ya que $2 \times 360^\circ = 720^\circ$

Rotar en 450° es lo mismo que rotar en 90° ya que $450^\circ - 360^\circ = 90^\circ$.

Rotar en 540° es lo mismo que rotar en 180° ya que $540^\circ - 360^\circ = 180^\circ$.

Página 208

1

a) $(1, -3)$ **e)** $(11, -6)$ **i)** $(6, -9)$ **m)** $(-6, 4)$

b) $(3, 6)$ **f)** $(-2, -4)$ **j)** $(-8, -6)$ **n)** $(-2, 3)$

c) $(-9, 2)$ **g)** $(-6, -2)$ **k)** $(-13, -15)$ **o)** $(-5, 19)$

d) $(-9, 8)$ **h)** $(-2, 11)$ **l)** $(8, 0)$ **p)** $\left(-1, 5; \frac{14}{9}\right)$

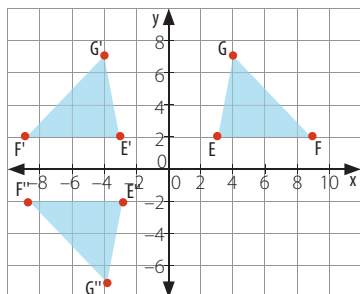
Página 209

2

a) Reflexión con respecto al eje Y y rotación con centro en el origen y 270° .

b) Reflexión con respecto al eje Y y reflexión con respecto a la recta $y = 2$.

3 a) y b)



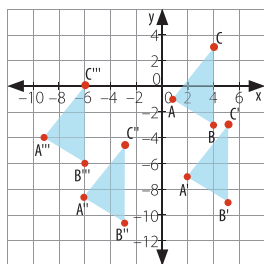
c) Una Rotación con centro en el origen y 180° .

d) Si, se obtiene el mismo polígono.

e) Sí, ya que sería revertir el proceso.

f) Conmutativa, Asociativa.

4 a) b) y c)



d) Una traslación con el vector $(-10, -3)$, ya que al componer traslaciones se obtiene una traslación.

e) Se cumple la conmutatividad:

$$T_{(a,b)} \circ T_{(c,d)}(x,y) = T_{(a,b)}(c+x, d+y) = (a+c+x, b+d+y)$$

$$T_{(c,d)} \circ T_{(a,b)}(x,y) = T_{(c,d)}(a+x, b+y) = (a+c+x, b+d+y)$$

Se cumple la asociatividad:

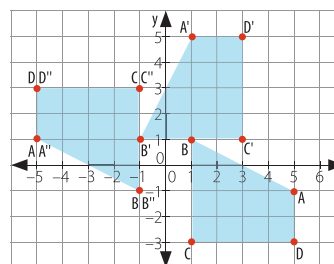
$$(T_{(a,b)} \circ T_{(c,d)}) \circ T_{(e,f)}(x,y) = T_{(a+c,b+d)} \circ T_{(e,f)}(x,y) =$$

$$T_{(a+c+e,b+d+f)}(x,y) = (a+c+e+x, b+d+f+y)$$

$$T_{(a,b)} \circ (T_{(c,d)} \circ T_{(e,f)})(x,y) = T_{(a,b)} \circ T_{(c+e,d+f)}(x,y) =$$

$$T_{(a+c+e,b+d+f)}(x,y) = (a+c+e+x, b+d+f+y)$$

5 a) b) y c)



d) Rotación con centro en el origen y 360° , ya que se llegó al cuadrilátero de partida.

e) Se cumple la conmutatividad:

$$R_{(0,a)} \circ R_{(0,b)} = R_{(0,a+b)} = R_{(0,b+a)} = R_{(0,b)} \circ R_{(0,a)}$$

Se cumple la asociatividad:

$$(R_{(0,a)} \circ R_{(0,b)}) \circ R_{(0,g)} = R_{(0,a+b)} \circ R_{(0,g)} = R_{(0,a+b+g)}$$

$$R_{(0,a)} \circ (R_{(0,b)} \circ R_{(0,g)}) = R_{(0,a)} \circ R_{(0,b+g)} = R_{(0,a+b+g)}$$

6 No es correcto lo que piensa Miguel, pues las coordenadas de los vértices serían distintos. Supongamos que $R = R_{(0,90^\circ)}$ y $T = T_{\vec{a}}$ donde $\vec{a} = (0, 3)$. Entonces:

$$\bullet \text{ RoT}(3, 2) = R(T(3, 2)) = R((3, 2) + (0, 3)) = R(3, 5) = (-5, 3)$$

$$\bullet \text{ RoT}(4, 2) = R(T(4, 2)) = R((4, 2) + (0, 3)) = R(4, 5) = (-5, 4)$$

$$\bullet \text{ RoT}(4, 3) = R(T(4, 3)) = R((4, 3) + (0, 3)) = R(4, 6) = (-6, 4)$$

$$\bullet \text{ RoT}(3, 3) = R(T(3, 3)) = R((3, 3) + (0, 3)) = R(3, 6) = (-6, 3)$$

$$\bullet \text{ ToR}(3, 2) = T(R(3, 2)) = T(-2, 3) = (-2, 3) + (0, 3) = (-2, 6)$$

$$\bullet \text{ ToR}(4, 2) = T(R(4, 2)) = T(-2, 4) = (-2, 4) + (0, 3) = (-2, 7)$$

$$\bullet \text{ ToR}(4, 3) = T(R(4, 3)) = T(-3, 4) = (-3, 4) + (0, 3) = (-3, 7)$$

$$\bullet \text{ ToR}(3, 3) = T(R(3, 3)) = T(-3, 3) = (-3, 3) + (0, 3) = (-3, 6)$$

Por lo tanto, no se obtienen las mismas coordenadas.

7 La afirmación es falsa ya que no todas las transformaciones isométricas se pueden resumir a traslaciones, por ejemplo la rotación.

Página 210

1

a. $(4, -1)$ **c.** $(0, -6)$ **e.** $(6, 0)$ **g.** $(3, 4)$

b. $(-2, 0)$ **d.** $(4, -5)$ **f.** $(-6, 3)$ **h.** $(2, 7)$

2

a. Eje Y **b.** Eje X **c.** Eje X **d.** Recta $x = -0,5$

3

a. Rotación con centro $(6, 0)$ en 180° .

b. Reflexión con respecto al eje X.

c. Traslación con el vector $(6, 6)$.

d. Reflexión con respecto al eje Y.

4

a. $D'(-7, 2)$, $E'(-7, 1)$ y $F'(-8, 1)$.

b. $(4, 4)$

c. $(-2, -4)$

d. Si es posible, el triángulo se puede rotar en 90° con centro en $(6, 0)$.

5

- a. (0, -7) c. (1, 2) e. (2, 0)
b. (2, -3) d. (3, -7) f. (-4, 2)

6

- a. (-2, 2) d. (2, 3) g. (5, -3) j. (-1, 2)
b. (-1, -2) e. (1, 5) h. (4, 5) k. $\left(-6, -\frac{2}{3}\right)$
c. (1, -1) f. (-7, -5) i. (3, -9) l. $\left(\frac{10}{2}, \frac{4}{3}\right)$

7

- a. $y = 3$ b. $y = 3$

Página 211**8**

- a. $M''(-4, -3)$, $N''(-7, -2)$, $O''(-3, -6)$ y $P''(-5, -5)$
b. $W''(3, -1)$, $Z''(0, -1)$ y $C''(-6, -4)$
c. (11, -5) d. (0, 1) y (-1, 2)

9

Reflexión con respecto al eje X.

10

Reflexión con respecto al eje Y.

11

Rotación con centro en el origen y 180° .

12

Reflexión con respecto al eje Y y luego rotación con centro en el origen y en 180° .

13

Rotación con centro en el origen en 90° , reflexión con respecto al eje X y reflexión con respecto al eje Y.

14

Traslación con respecto al vector $(-2, 2)$ y traslación con respecto al vector $(-2, 2)$.

15

- a. Traslación con respecto al vector $(1, -5)$ y rotación con centro en el origen en 270° .
b. Traslación según el vector $(0, -2)$ y reflexión con respecto al eje Y.
c. Traslación según el vector $(0, 2)$ y rotación con centro en el origen en 180° .
d. Reflexión con respecto al eje X y rotación con centro en el origen en 90° .

Página 213**1**

La medida del cuarto vértice (8, 6), el área es 35 u^2 y el perímetro 24 u.

2

El perímetro es 16 u y su área 16 u^2 .

3

El área del triángulo es 8 u^2 .

4

- a. (2, -3)
b. El área es 24 u^2 y el perímetro 24 u.

5

El tercer vértice es (4, 5; 8)

6

El cuarto vértices es (3, -4), el perímetro es 24,16 u y el área 36 u^2 .

7

El perímetro es $8\pi \text{ u}$ y el área $16\pi \text{ u}^2$.

8

La capacidad será de 64 cm^3 y la superficie será de 96 cm^2 . Necesitará 1920 lentejuelas.

9

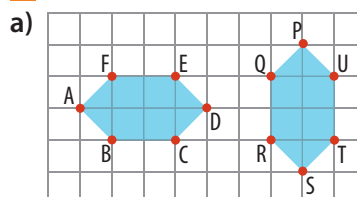
El volumen de la caja es de aproximadamente 12 cm^3 .

Página 216**1**

- a) Traslación con respecto al vector $(3, -1)$.
b) Rotación en 270° con respecto al punto (2, 2).
c) Traslación con respecto al vector $(3; 0,8)$, rotación en 180° con respecto al punto (2,8; 1) y reflexión con respecto al eje X.

2

- a) $\overline{AC} \cong \overline{EC}$ $\angle BAC \cong \angle DEC$ b) $\overline{MO} \cong \overline{PR}$ $\angle NMO \cong \angle QPR$
 $\overline{CB} \cong \overline{CD}$ $\angle ACB \cong \angle ECD$ $\overline{ON} \cong \overline{RQ}$ $\angle MON \cong \angle PRQ$
 $\overline{BA} \cong \overline{DE}$ $\angle CBA \cong \angle CDE$ $\overline{MN} \cong \overline{QP}$ $\angle ONM \cong \angle RQP$

3

- a) $\angle QRS$.
c) Porque se deben buscar los puntos homólogos en las figuras. En este caso corresponde al ángulo del vértice T.
d) $\angle EFA \cong \angle TUP$ $\overline{ED} \cong \overline{TS}$
 $\angle DCB \cong \angle SRQ$ $\overline{BC} \cong \overline{QR}$
 $\angle FAB \cong \angle UPQ$ $\overline{SR} \cong \overline{CD}$

4

- a) • Figura 1: A(1, 2), B(2, 2), C(2, 3) y D(1, 3).
Figura 2: A'(-2, -1), B'(-3, -1), C'(-3, -2) y D'(-2, -2).
• Rotación en 180° con respecto al origen.
• Sí, pues la rotación es una transformación isométrica, es decir, la figura cambia de posición y no de forma ni tamaño.
b) • Reflexión con respecto al eje Y.
• Sí, pues la reflexión es una transformación isométrica, es decir, la figura cambia de posición y no de forma ni tamaño.

5

- a) • Porque las transformaciones isométricas solo cambian la posición de las figuras manteniendo la forma y el tamaño. Entonces, si se le ha aplicado alguna transformación, las figuras serían congruentes.
• Sí existe, es una rotación en 90° con centro en el origen.
• Sí, los cuadrados son congruentes.

Página 217**5**

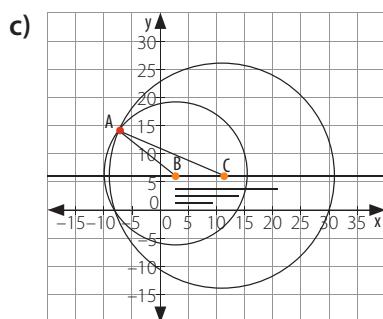
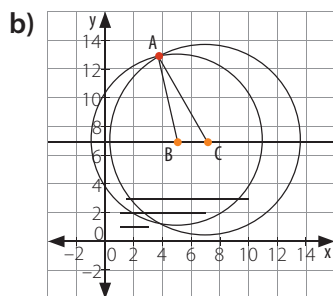
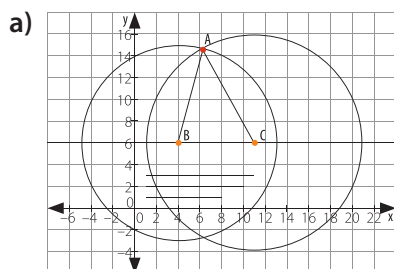
- b) • Porque los triángulos tenían distinta forma.
• A'(4, 1), B'(4, 3) y C'(3, 1)
c) • La B, C, F, H y E.
• Para obtener A, reflexión con respecto al eje Y.
Para obtener D, traslación con respecto al vector $(-2, -3)$.
Para obtener G, rotación con centro en el origen en 90° .



- 6** En la medida del radio. Se puede utilizar la traslación para superponer las figuras y ver si tienen igual tamaño.
- 7** Todos los cuadrados tienen sus cuatro ángulos rectos, pero no todos tienen el mismo tamaño de sus lados, por lo que no todos son congruentes.
- 8** Para establecer los lados y ángulos homólogos de dos cuadriláteros primero hay que identificar los vértices homólogos y luego relacionar los lados y ángulos. Primero se identifican los vértices homólogos de cada par de triángulos y luego los lados y ángulos.
- 9** Los polígonos son congruentes ya que a uno de ellos se le aplicó una reflexión con respecto al eje X.
- 10** Para que la figura cumpla las condiciones, debe estar formada por dos cuadrados. El segundo cuadrado se forma al rotar el primero en 45° con centro en la intersección de sus diagonales.

Página 221

1



Página 222

2

- a) Son congruentes.
- b) No se puede determinar.

3

- a) $\overline{QP} \cong \overline{ON}$, $\angle QPR \cong \angle ONM$, $\overline{PR} \cong \overline{NM}$, entonces, por criterio LAL $\triangle QPR \cong \triangle OMN$.
- b) No se puede determinar.

4

- a) Sí son congruentes. b) No se puede determinar.

5

- a) Criterio ALA
 $\overline{TW} \cong \overline{VU}$ $\angle TWV \cong \angle VUT$
 $\overline{WV} \cong \overline{UT}$ $\angle WVT \cong \angle UTV$
 $\overline{VT} \cong \overline{TV}$ $\angle VTW \cong \angle TVU$
- b) Criterio LAL
 $\overline{PR} \cong \overline{QR}$ $\angle PRS \cong \angle QRS$
 $\overline{RS} \cong \overline{RS}$ $\angle RSP \cong \angle RSQ$
 $\overline{SP} \cong \overline{SQ}$ $\angle SPR \cong \angle SQR$
- c) No se puede determinar congruencia.
- d) Criterio ALA
 $\overline{XZ} \cong \overline{CA}$ $\angle XZY \cong \angle CAB$
 $\overline{ZY} \cong \overline{AB}$ $\angle ZYX \cong \angle ABC$
 $\overline{YX} \cong \overline{BC}$ $\angle YXZ \cong \angle BCA$

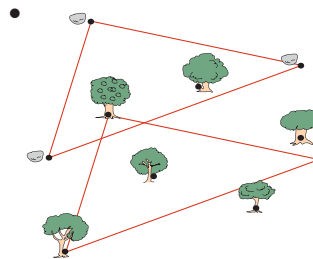
6

- a) $y = 50^\circ$, $x = 22^\circ$ c) $x = 9$, $y = 9$, $z = 9$
- b) $x = 3$, $y = 22^\circ$, $z = 74^\circ$

Página 223

7

- a) • Se necesita saber la medida de uno de los catetos.
 • Teniendo la medida de un cateto y la hipotenusa se puede determinar la medida del otro cateto y aplicar el criterio LLL.
- b) • Se puede aplicar el criterio LLL.



- 8 Los triángulos son congruentes.
- 9 La distancia del punto del cable en el suelo al poste debe ser igual para ambos cables.
- 10 No es correcto, ya que el ángulo señalado no está enfrenteado al lado mayor de los triángulos.

Página 225

1

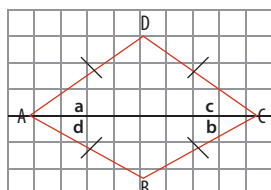
- a) **Hipótesis:** dos ángulos opuestos por el vértice.
Tesis: son congruentes.
- b) **Hipótesis:** la diagonal de un cuadrado.
Tesis: lo divide en dos triángulos isósceles congruentes.
- c) **Hipótesis:** al trazar cualquier altura en un triángulo equilátero.
Tesis: se forman dos triángulos congruentes.
- d) **Hipótesis:** las alturas correspondientes a los lados congruentes de un triángulo isósceles.
Tesis: son congruentes.



Página 229

4

- b) • Como la figura es un rombo, sabemos que sus lados opuestos son paralelos ya que es un paralelogramo.
• Que si los vértices de la figura son A, B, C y D como se muestra en la siguiente figura, entonces los triángulos ABC y ADC son congruentes.



- Son congruentes.
- **Hipótesis:** ABCD rombo, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ diagonales de ABCD. E punto de intersección de AC y BD.
- Tesis:** $AC \cong EC$ y $BE \cong ED$.

Afirmaciones	Justificaciones
1. $\angle BAE \cong \angle DCE$	Por ser ángulos alternos internos entre paralelas. (Por hipótesis).
2. $\angle ABE \cong \angle EDC$	Por ser ángulos alternos internos entre paralelas. (Por hipótesis).
3. $\overline{AB} \cong \overline{DC}$	ABCD rombo. Por hipótesis.
4. $\triangle ABE \cong \triangle CDE$	Por criterio ALA. (1. 2. y 3.)
5. $\overline{AE} \cong \overline{EC}$ y $\overline{BE} \cong \overline{ED}$	Por ser lados homólogos en triángulos congruentes.

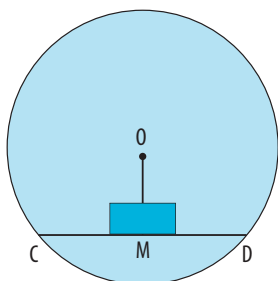
5

- a) Porque las diagonales de un rectángulo son congruentes y se midían.
b) Las diagonales de un rectángulo son congruentes y se midían.
6 El error fue considerar que $\angle MAC \cong \angle NBA$ ya que debe ser $\angle MAB \cong \angle NBA$.

7 Determinar la hipótesis, la tesis y demostrar. Según los datos $DC \cong EC$, como el triángulo es isósceles, $AD \cong BE$. Los ángulos basales son iguales porque el triángulo es isósceles y como $\angle ADG \cong \angle BEF$ se aplica el criterio ALA para demostrar la congruencia de los triángulos.

8 **Hipótesis:** circunferencia de centro O. $\overline{CD}$ cuerda. $\overline{OM} \perp \overline{CD}$.

Tesis: M punto medio de $\overline{CD}$, es decir $\overline{CM} \cong \overline{MD}$.



Afirmaciones	Justificaciones
1. $\overline{OC} \cong \overline{OD}$	Por ser radios de la circunferencia.
2. $\overline{OM} \cong \overline{OM}$	Todo segmento es congruente consigo mismo.
3. $\overline{CM} \cong \overline{MD}$	Por teorema de Pitágoras y 1. y 2.

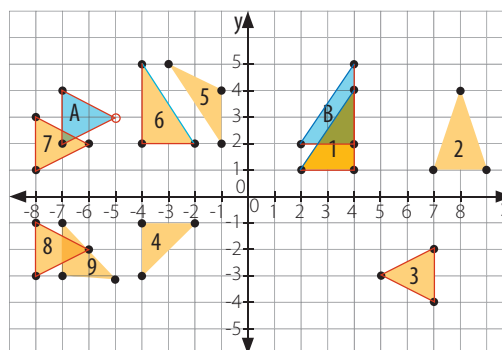
9 La respuesta depende de cada estudiante.

Página 230

1

- a. Congruente con B. Traslación con respecto al vector $(0, -1)$.
b. Congruente con A. Rotación con centro en el origen en 180° .
c. No es congruente con A ni con B.
d. Congruente con A. Traslación con respecto al vector $(-1, -1)$.
e. No es congruente con A ni con B.
f. No es congruente con A ni con B.
g. Congruente con B. Reflexión con respecto al eje Y.
h. Congruente con A. Traslación con respecto al vector $(-1, -5)$.

2



3

- a. No. b. Sí. c. No. d. Sí. e. No.

4 Las figuras grises, las figuras naranjas, las semicircunferencias del centro, las mitades de la cancha.

5

- a. ALA b. ALA c. ALA

6

- a. No son congruentes.

Página 231

6

- b. Son congruentes.
c. No son congruentes.
d. No son congruentes.

7

- a. $m(\angle ADC) = 75^\circ$ b. $x = 90^\circ$ c. 220 cm

8

- a. **Hipótesis:** ABCD cuadrilátero. $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ diagonales. $AC \perp BD$. Diagonales se midían.

Tesis: ABCD puede ser un cuadrado.

Afirmaciones	Justificaciones
$\overline{AP} \equiv \overline{PC}$	Como las diagonales se midían (por hipótesis) sea P, punto medio de las diagonales. Luego se cumple la afirmación.
$\overline{DP} \equiv \overline{PB}$	Como las diagonales se midían (por hipótesis) sea P, punto medio de las diagonales. Luego se cumple la afirmación.
$\angle APD \equiv \angle BPC$	Por hipótesis, al ser $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.
$\angle DPC \equiv \angle APB$	Por hipótesis, al ser $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.
$\triangle APD \equiv \triangle BPC \equiv \triangle CPD \equiv \triangle APB$	Por criterio LAL, los triángulos son congruentes.
ABCD es un cuadrado	Por tener 4 triángulos congruentes.

- b. **Hipótesis:** ABCD rombo. $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ diagonales de ABCD. E punto de intersección de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

Tesis: $\triangle ABE \equiv \triangle CBE \equiv \triangle CDE \equiv \triangle ADE$.

Afirmaciones	Justificaciones
1. $\angle EAD \equiv \angle ECB$	Por ser ángulos alternos internos entre paralelas. (Por hipótesis)
2. $\angle ADE \equiv \angle CBE$	Por ser ángulos alternos internos entre paralelas. (Por hipótesis)
3. $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$	Por hipótesis.
4. $\triangle CBE \equiv \triangle ADE$	Por criterio ALA. (1. 2. y 3.)
5. $\angle BAE \equiv \angle DCE$	Por ser ángulos alternos internos entre paralelas. (Por hipótesis)
6. $\angle EBA \equiv \angle CDE$	Por ser ángulos alternos internos entre paralelas. (Por hipótesis)
7. $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$	Por hipótesis.
8. $\triangle ABE \equiv \triangle CDE$	Por criterio ALA. (5. 6. y 7.)
9. $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$	Por hipótesis.
10. $\overline{EB} \equiv \overline{EB}$	Todo segmento es congruente consigo mismo.
11. $\overline{AE} \equiv \overline{CE}$	Por ser lados homólogos de triángulos congruentes. (8.)
12. $\triangle ABE \equiv \triangle CBE$	Por criterio LLL. (9. 10. 11)
13. $\triangle APD \equiv \triangle BPC \equiv \triangle CPD \equiv \triangle APB$	Por (4. 8. 12.)

- c. **Hipótesis:** ABC triángulo isósceles. $\overline{CM}$ bisectriz del $\angle ACB$. $M \in \overline{AB}$.

Tesis: $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$.

Afirmaciones	Justificaciones
1. $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$	Por hipótesis.
2. $\angle ACM \equiv \angle MCB$	Por hipótesis.
3. $\overline{CM} \equiv \overline{CM}$	Todo segmento es congruente consigo mismo.
4. $\triangle ACM \equiv \triangle BCM$	Por criterio LAL. (1. 2. y 3.)
5. $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$	Por ser lados homólogos de triángulos congruentes (4.)

- d. **Hipótesis:** ABCD deltoide. $\overline{DB}$ y $\overline{AC}$ diagonales de ABCD. E punto de intersección entre $\overline{DB}$ y $\overline{AC}$.

Tesis: $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

Afirmaciones	Justificaciones
1. $\overline{DC} \equiv \overline{DA}$	Por hipótesis.
2. $\angle ADE \equiv \angle EDC$	$\overline{DB}$ bisectriz de $\angle ADC$.
3. $\overline{DE} \equiv \overline{DE}$	Todo segmento es congruente consigo mismo.
4. $\triangle ADE \equiv \triangle CDE$	Por criterio LAL. (1. 2. y 3.)
5. $\angle DEA \equiv \angle CED$	Por ser lados homólogos de triángulos congruentes (4.)
6. $m(\angle DEA) + m(\angle CED) = 180^\circ$	Por ser ángulos adyacentes suplementarios.
7. $m(\angle DEA) = m(\angle CED) = 90^\circ$	Por 5. y 6.
8. $m(\angle AEB) = m(\angle BEC) = 90^\circ$	Por ser opuestos por el vértice con $\angle CED$ y $\angle DEA$ respectivamente.
9. $\overline{AC} \perp \overline{BD}$	Por 7. y 8.

- e. **Hipótesis:** ABCD cuadrado. $\triangle ABP$ equilátero.

Tesis: $\triangle APD \equiv \triangle BPC$.

Afirmaciones	Justificaciones
1. $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$	Por hipótesis. (Lados del cuadrado)
2. $\overline{CP} \equiv \overline{BP}$	Por hipótesis. (Lados del triángulo equilátero)
3. $m(\angle PAD) = 30^\circ$	Complemento $\angle BAP$
3. $m(\angle CBP) = 30^\circ$	Complemento $\angle PBA$
4. $\angle PAD \equiv \angle CBP$	Por 3. y 5.
6. $\triangle APD \equiv \triangle BPC$	Por criterio LAL. (1. 2. y 5.)

- f. **Hipótesis:** $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ secantes. E intersección de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. $\overline{AE} \equiv \overline{ED}$ y $\overline{BE} \equiv \overline{EA}$.

Tesis: $\overline{AD} \parallel \overline{CB}$.

Afirmaciones	Justificaciones
1. $\overline{CE} \equiv \overline{ED}$	Por hipótesis.
2. $\overline{AE} \equiv \overline{EB}$	Por hipótesis.
3. $\angle CEB \equiv \angle DEA$	Por ser ángulos opuestos por el vértice.
4. $\triangle CBE \equiv \triangle DAE$	Por criterio LAL. (1. 2. y 3.)
5. $\angle BCE \equiv \angle ADE$	Por ser lados homólogos de triángulos congruentes (4.)
6. $\angle ECB \equiv \angle EAD$	Por ser lados homólogos de triángulos congruentes (4.)
7. $\overline{AD} \parallel \overline{CB}$	Por 5. y 6.

Página 233

- 2 m
- $x = 65^\circ$
- No necesariamente.
- $x = 120^\circ$
- $\triangle CEA \equiv \triangle DEA$ por criterio ALA. $\triangle CEB \equiv \triangle DEB$ por criterio LAL. $\triangle ABC \equiv \triangle ABD$ por criterio LLL.
- Sí, es un cuadrado.

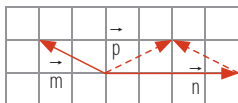


7 Sí, es un rectángulo.

Página 234

1

- a. Es correcta.
b. No se replicaron correctamente los vectores.



2



Página 235

1 Caso 1 incorrecto. La definición de bisectriz en este caso fue utilizada incorrectamente asumiendo que definía segmentos de igual medida.

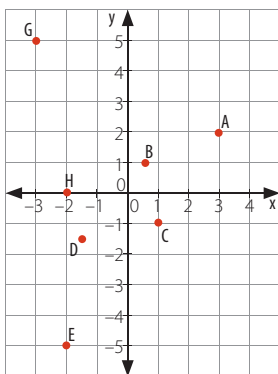
Página 237

- a. (17, 5) e. (7, -1)
b. (-1, -7) f. (10, 6)
c. (6, -8) g. (15, -2)
d. (11, 13) h. (1, 0)
a. Son congruentes, por criterio LLL. (Usando teorema de Pitágoras)
b. No son congruentes.

Página 238

1

- a. Cuadrante I.
b. Cuadrante I.
c. Cuadrante IV.
d. Cuadrante III.
e. Cuadrante III.
f. Eje Y.
g. Cuadrante II.
h. Eje X.
i. Cuadrante IV.

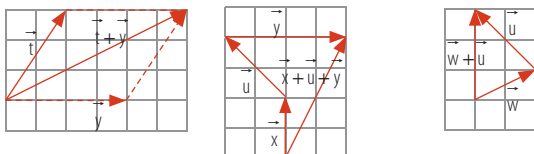


2

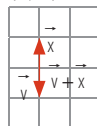
- a. (4, -2) c. (1, -3) e. (2, 2)
b. (2, 6) d. (-2, -6) f. (0, 0)

3

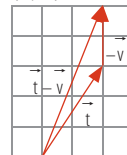
- a. (6, 3) b. (2, 4) c. (0, 3)



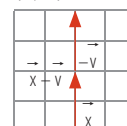
d. (0, 0)



e. (2, 5)

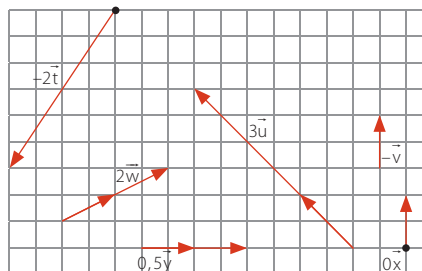


f. (0, 4)



4

- a. (4, 2) c. (-6, 6) e. (0, 2)
b. (0, 2) d. (0, 0) f. (-4, -6)



5

- a. B'(0, 5) c. E'(0, 0), F'(1, 2) y G'(4, 1)
b. C'(0, 8) y D'(2, 6)

Página 239

6

- a. 180° b. 90° c. 90°

7

- a. D''(8, 3)
b. Reflexión con respecto al eje X y rotación con centro en el origen en 270°.

8

- a. Si son congruentes ya que el triángulo BCD es la traslación del triángulo WXY mediante el vector (2, 1).
b. Sí, ya que el segmento DB es congruente consigo mismo, entonces por el criterio LAL son congruentes.

9

- a. No, no se puede aplicar ningún criterio de congruencia para probarlo.
b. No, no se puede aplicar ningún criterio de congruencia para probarlo.
c. Sí, ya que en ese caso se aplica el teorema de Pitágoras y el criterio LAL.

10

- a. • Hipótesis: ADC triángulo. $\overline{AB}$ bisectriz del $\angle CAD$. $\angle 1 \cong \angle 2$
Tesis: $\angle ABD$ recto.

Afirmaciones	Justificaciones
1. $\angle DAB \cong \angle BAC$	Por hipótesis.
2. $\angle 1 \cong \angle 2$	Por hipótesis.
3. $m(\angle ABD) = 180^\circ - m(\angle DAB) - \angle 1$	Propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.
4. $m(\angle ABC) = 180^\circ - m(\angle CAB) - \angle 2$	Propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.
5. $m(\angle ABD) = m(\angle ABC)$	Por 1. y 2.
6. $m(\angle ABD) + m(\angle ABC) = 180^\circ$	Ángulos adyacentes suplementarios.
7. $m(\angle ABD) = 90^\circ$	Por 5. y 6.

b. • **Hipótesis:** ABCD cuadrado, $\overline{AC}$ diagonal de ABCD.

Tesis: $\triangle ABC \cong \triangle CDA$, $\triangle ABC$ y $\triangle CDA$ isósceles.

Afirmaciones	Justificaciones
1. $\overline{AB} \cong \overline{DC}$	Por hipótesis.
2. $\overline{BC} \cong \overline{DA}$	Por hipótesis.
3. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$	Todo segmento es congruente consigo mismo.
4. $\triangle ABC \cong \triangle CDA$	Por criterio LLL. (1. 2. y 3.)
5. $\overline{AB} \cong \overline{BC}$	Por hipótesis.
6. $\triangle ABC$ isósceles	Por 5.
7. $\overline{AD} \cong \overline{DC}$	Por hipótesis.
8. $\triangle CDA$ isósceles	Por 7.

Ejercicios parte I

Página 240

1. E 2. C 3. A 4. B 5. A 6. C 7. C 8. A

Página 241

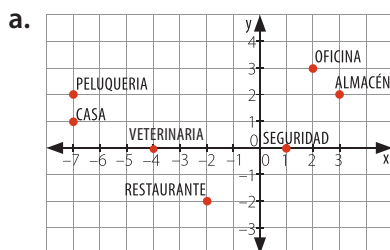
9. E 10. A 11. B 12. D 13. D 14. E 15. E 16. C

Página 242

17. E 18. D 19. C

Ejercicios parte II

1



- b. El restaurante.
 c. (3, -2)
 d. Ida $\rightarrow (7, -1)$, vuelta $\rightarrow (7, 1)$. Estos vectores tienen distinto sentido.

2

a. (2, 4) b. (10, 15) c. Miguel

3

- a. (3, 13) b. (-5, -1)
 c. Reflexión con respecto al eje X.

Página 243

4

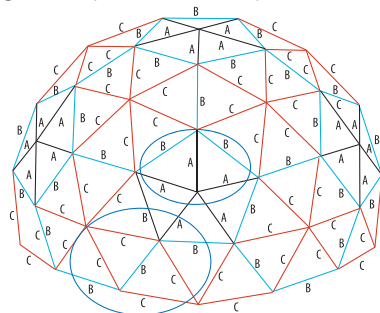
- a. $A'(-11, 1)$, $B'(-11, 0)$, $C'(-13, 0)$, $D'(-13, 2)$ y $E'(-12, 2)$
 b. La respuesta depende de cada estudiante. Un ejemplo es: una reflexión con respecto al eje X, luego una reflexión con respecto al eje Y y finalmente una reflexión con respecto al eje X.

5

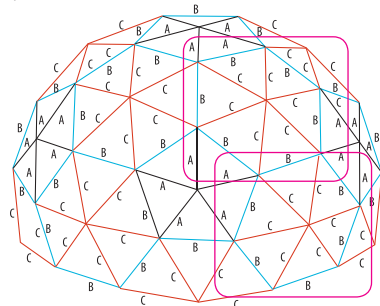
- a. Triángulos rectángulos de medidas 3 cm, 4 cm y 5cm.
 b. Cada cateto, la hipotenusa y los ángulos interiores.
 c. Por el criterio LLL.

6

- a. Los triángulos se pueden formar por reflexión o rotación.



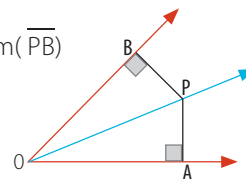
- b. Reflexión.



7

Hipótesis: $\angle AOB$, $\overline{OP}$ bisectriz de $\angle AOB$. Punto $P \in \overline{OP}$. $m(PA)$ y $m(PB)$ distancias de P a $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ respectivamente.

Tesis: $m(PA) = m(PB)$



Afirmaciones	Justificaciones
1. $\overline{PA} \perp \overline{OA}$	Por hipótesis.
2. $\overline{PB} \perp \overline{OB}$	Por hipótesis.
3. $\angle AOP \cong \angle POB$	Por hipótesis.
4. $\angle OPA \cong \angle OPB$	Por propiedad de la suma de los ángulos interiores y por 1. 2. y 3.
5. $\overline{OP} \cong \overline{OP}$	Todo segmento es congruente consigo mismo.
6. $\triangle OPA \cong \triangle OPB$	Criterio ALA. (3. 4. y 5.)
7. $\overline{BP} \cong \overline{PA}$	Por ser lados homólogos de triángulos congruentes. (6.)
8. $m(PA) = m(PB)$	Por 7.

Desafío "La cuadratura del triángulo"

Mateo debe colocar los cinco trozos tal como se indica a continuación:





Unidad 4

Página 246

- La amplitud es 99.
- El rango es 499.
- Las marcas de clase son: 250,5 – 350,5 – 450,5 – 550,5 – 650,5
- 63 alumnos.
- 35 alumnos.
- 25,4% aprox.

2

- Escuela 2
- No, la escuela 5 no tiene moda.
- Las escuelas 2 y 3.
- Aprox. 60,6 kg.

Página 247

3

- Sí
- No
- No

4

- Sí
- Sí
- No
- Sí

5

- $\Omega = \{(c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4), (c, 5), (c, 6), (s, 1), (s, 2), (s, 3), (s, 4), (s, 5), (s, 6)\}$
- $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- $\Omega = \{\text{masculino, femenino}\}$
- $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$
- $\Omega = \{\dots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
- $\Omega = \{A, B, C\}$

6

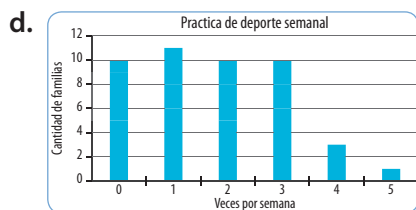
- La probabilidad es 0,125.
- Es más probable que sea 7.
- $\bullet \frac{2}{29}$ $\bullet \frac{12}{29}$ $\bullet \frac{15}{29}$ $\bullet \frac{17}{29}$
- $\bullet a = \frac{1}{18}$ $\bullet \text{La probabilidad es } \frac{1}{3}$

Página 250

1

Veces por semana que practica deporte	Cantidad de alumnos
0	10
1	11
2	10
3	10
4	3
5	1
Total	45

- 10 alumnos.
- 24 alumnos.



- $\frac{11}{45}$

2

- F, para una gran cantidad de datos es útil representarlos en forma agrupada.
- F, todas se pueden representar mediante un gráfico.
- F, solo queda en un intervalo.
- V

Página 251

- La respuesta depende de cada estudiante. Un ejemplo es:

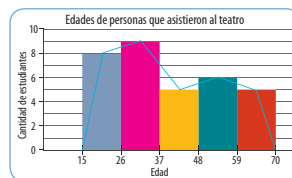
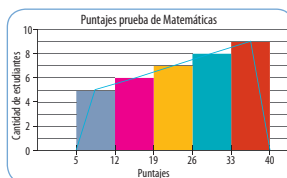
Puntajes obtenidos en una prueba de Matemática

Intervalo	Marca de clase	Frecuencia	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
[5, 12[	8,5	5	5	14%	14%
[12, 19[	15,5	6	11	17%	31%
[19, 26[	22,5	7	18	20%	51%
[26, 33[	29,5	8	26	23%	74%
[33, 40]	36,5	9	35	26%	100%
Total		35		100%	

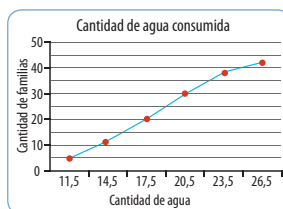
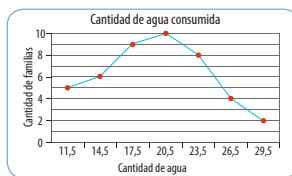
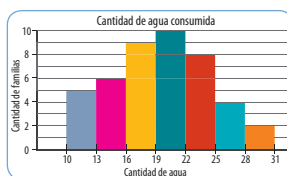
Edades de las personas que asistieron al teatro

Intervalo	Marca de clase	Frecuencia	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
[15, 26[	8,5	8	8	24,2%	24,2%
[26, 37[	15,5	9	17	27,2%	51,4%
[37, 48[	22,5	5	22	15,2%	66,6%
[48, 59[	29,5	6	28	18,2%	84,8%
[59, 70]	36,5	5	33	15,2%	100%
Total		33		100%	

c.



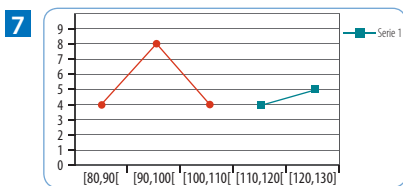
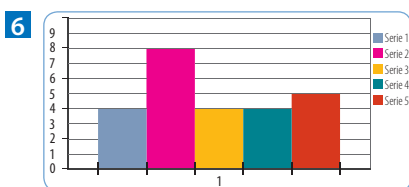
4



5

Calificaciones 1º medio

Calificación	Cantidad de estudiantes
[1,0; 2,0[	18
[2,0; 3,0[	42
[3,0; 4,0[	57
[4,0; 5,0[	36
[5,0; 6,0[	48
[6,0; 7,0[	60



Página 254

1

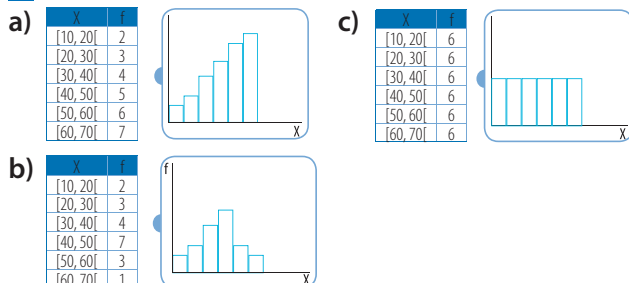
- a) No hay meses con variación positiva.
b) Desde oct 08 hasta oct 09.

2

- a) F, los datos también pueden tener una distribución simétrica.
b) V
c) V

Página 255

3



4

- a) Casi 1 000 000.
b) Es una curva creciente, ya que este tipo de gráfico representa la frecuencia acumulada de datos.

5

- a) •V •F b) •F •V

Página 258

1

- a) V
b) F, puede haber más de una moda.
c) V
d) V
e) F, corresponde al dato que más se repite y puede ser de datos cuantitativos o cualitativos.

Página 259

2

- a) $\bar{x} \approx 1,41$, $Mo \approx 1,5$, $Me \approx 1,5$ b) $\bar{x} \approx 2,92$, $Mo \approx 2$, $Me \approx 3$

3

- a) Las modas son aproximadamente 58 kg y 67 kg ya que hay dos intervalos con 13 estudiantes.
b) La media aritmética es 67 kg aproximadamente.

4

- a) En ninguna, ya que a las ferias asisten mayores de 10 años.
b) En la feria A.
c) La respuesta depende de cada estudiante.

- 5** Manuel se equivocó al afirmar que el 50% de los alumnos tiene una estatura superior a 1,63 cm, ya que el 50% de los alumnos tiene una estatura superior o igual a 1,63 cm.

Página 262

1

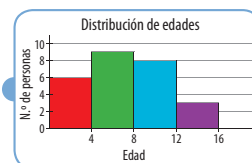
- a) F, si los datos son muchos es mejor organizarlos en una tabla de datos agrupados.
b) F, todas se pueden representar mediante gráficos.
c) F, un dato pertenece solo a un intervalo.
d) V

2

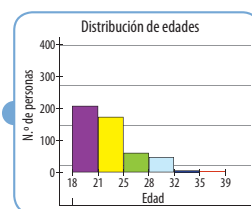
- a) 4,8
b) • Podría ser 3, 4, 5, 6, o 12.
• Podría ser 3, 4, 5, 6, o 12.
• Debería ser 6.

3

- a) $\bar{x} = 7,23$
 $Me = 7,11$
 $Mo = 7$



- b) $\bar{x} = 23,40$
 $Me = 22,65$
 $Mo = 20,63$



Página 263

4

- a) • Escogería "Trayecto seguro" ya que el dato que más se repite es 30 min y es menor que en caso de la otra compañía, además las demoras están más cerca de las 2 horas que 4 horas de la otra compañía.

• La respuesta depende de cada estudiante. Un ejemplo es: sí, ya que dan una idea del comportamiento de las demoras y con esa información uno puede escoger.

b) •

Colegio	Media	Mediana	Moda
Almendros	177 cm	177 cm	177 cm
Nogal	186 cm	187 cm	197 cm
Alerce	162 cm	162 cm	157 cm

• Colegio Nogal

Las estaturas del colegio Almendros están más concentradas alrededor de promedio y son simétricas.

El colegio Nogal tiene a las competidoras de mayor estatura y sus datos son asimétricos.

El colegio Alerce tiene a las competidoras con menor estatura y sus datos también son asimétricos.



Página 265

1

Longitud (cm)	f	F	f _r	F _r	f%	F%
[0, 50[	20	20	$\frac{20}{40}$	0,5	50%	50%
[50, 100[	15	35	$\frac{15}{40}$	0,875	37,5%	87,5%
[100, 150[	3	38	$\frac{3}{40}$	0,95	7,5%	95%
[150, 200[	2	40	$\frac{2}{40}$	1	5%	100%

a) 37,5%

b) 95%

2

a) Primer cuartil: $Q_1 = P_{25}$

b) Segundo cuartil: $Q_2 = P_{50} = M_e$

c) Tercer cuartil: $Q_3 = P_{75}$

3 Cuarto quintil: $q_4 = P_{80}$

Página 266

4

a) • $Q_2 = 210$, $P_{80} = 257$

• $q_4 = 257$

• El máximo de ventas es de 210 prendas.

• El mínimo de ventas es de 61 prendas.

b) • $Q_3 = 2$, $P_{20} = 1$

• En el P_{81}

• $q_3 = 2$

• En el P_{96}

• 2 horas

c) • $q_4 = 300$, $P_{60} = 245$

• $P_{58} = 241$

• Bajo las 245 horas.

• Sobre las 211 horas.

• 192 y 272 horas

• No, ya que la diferencia entre el mínimo y la mediana es 123 horas y la diferencia entre el máximo y la mediana es 127 horas.

5

Ingresos (miles \$)	MC	f	F	f _r	F _r
[190, 230[	210	36	36	$\frac{36}{120}$	$\frac{36}{120}$
[230, 270[	250	25	61	$\frac{25}{120}$	$\frac{61}{120}$
[270, 310[	290	20	81	$\frac{20}{120}$	$\frac{81}{120}$
[310, 350[	330	17	98	$\frac{17}{120}$	$\frac{98}{120}$
[350, 390[	370	12	110	$\frac{12}{120}$	$\frac{110}{120}$
[390, 430]	410	10	120	$\frac{10}{120}$	$\frac{120}{120}$
Total		120		1	

a) $Q_3 = 331$. Se puede decir que el 75% de los datos es menor o igual a 331.

b) 39 personas aproximadamente.

c) $q_2 = 249$, $q_3 = 292$. Luego $q_3 - q_2 = 292 - 249 = 43$ correspondiente a un rango intercuartil (corresponde al 25% de los datos).

d) El 25% de las personas gana menos de 223 mil pesos. El 75% de las personas gana más de 223 mil pesos.

6

a) • $P_{10} = 13$, el 10% de las personas que compran calculadoras tiene 13 años o menos.

• $Q_3 = 17$, el 75% de las personas que compran calculadoras tienen 17 años o menos.

• El 50% de las personas que compran calculadoras tiene 15 años o menos, el 50% de las personas que compran calculadoras tiene 15 años o más, 15 años corresponde a la mediana del conjunto de datos.

Página 267

b) • $P_{19} = 13$, el 19% de las personas espera 13 minutos o menos.

• $Q_2 = 19$, el 50% de las personas espera 19 minutos o menos.

• El 75% de las personas espera 25 minutos o menos, el 25% de las personas espera 25 minutos o más.

c) • 40, 50, 55 (aprox.) y 60 puntos.

• 100 alumnos.

• 125 alumnos.

d) • $P_{35} = 460$

• $Q_3 = 611$

• El 75% de los estudiantes tiene 611 puntos o menos.

7 La respuesta depende de cada estudiante.

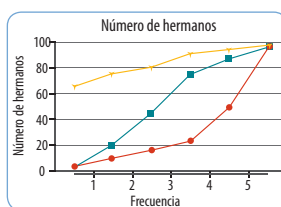
8 Para P_{25} se calcula el valor donde se acumula el 25% de los datos (25) y se considera la cantidad de hijos que representa (1). Para el tercer quintil se calcula el valor donde se acumula el 20% de los datos (20) y se considera la cantidad de hijos que representa (1).

Para Q_2 se calcula el valor donde se acumula el 50% de los datos (50) y se considera la cantidad de hijos que representa (2).

Página 270

1

a)



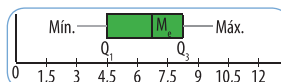
b) $Q_1A = 2$, $Q_1B = 3$, $Q_1C = 0$

c) $Q_2A = 3$, $Q_2B = 4$, $Q_2C = 0$

d) $Q_3A = 4$, $Q_3B = 5$, $Q_3C = 2$

2

a)



Mín: 3

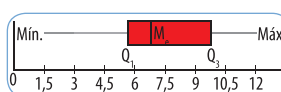
Q_1 : 4,5

M_e : 6,75

Q_3 : 8,25

Máx: 9,75

b)



Mín: 1,5

Q_1 : 6

M_e : 6,75

Q_3 : 9,75

Máx: 12

3

- a) Puede utilizar las medidas de tendencia central ya que le permitirá ver la distribución de los datos.
- b) • El sueldo máximo es \$800 000.
• 100 trabajadores.

Página 271

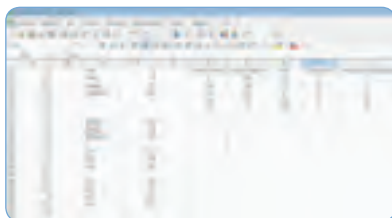
- c) • La capacitación se realizará en los dos departamentos.
• Ambos departamentos tienen la misma cantidad de errores mínimos y máximos. Q_1 , Q_2 y Q_3 son menores en el departamento A. La media aritmética es mayor en el departamento B.
• El departamento A.
- d) • El primer cuartil del turno A es igual al primer cuartil del turno B.
• El segundo cuartil del turno C es menor que la media de los datos de los turnos A y B por separado.
• El segundo cuartil de A es mayor que el segundo cuartil de C.
• La mediana de B es mayor a la mediana de C.
• El intervalo intercuartil del turno A es el mayor.

4 La respuesta depende de cada estudiante.

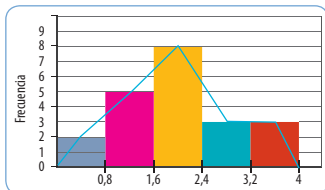
5 La respuesta depende de cada estudiante.

Página 275

1



2



3 La respuesta depende de cada estudiante.

Página 276

1

- a. $\bar{x} \approx 41$, $Mo \approx 35$, $Me \approx 40$
- b. 30% aprox.
- c. 14% aprox.

2

a.

	Frecuencia A	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
[100, 230[	11	11	0,28	0,28
[230, 360[	9	20	0,23	0,50
[360, 490[	4	24	0,10	0,60
[490, 620[	7	31	0,18	0,78
[620, 750[	9	40	0,23	1,00

	Frecuencia B	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
[100, 230[	9	9	0,23	0,23
[230, 360[	7	16	0,18	0,40
[360, 490[	12	28	0,30	0,70
[490, 620[	8	36	0,20	0,90
[620, 750[	4	40	0,10	1,00

- b. La inmobiliaria B. c. Sí, la B.
- d. Sí se puede, comparando la media, la moda y la mediana.

3

- a. $a = 2$, $b = 8$ d. $c = 5$
- b. El rango es 12. e. 120 encuestados.
- c. La amplitud es 2. f. Sí, $Mo \approx 7$
- g. $Me \approx 5$, el 50% de los datos es menor o igual que 5.
- h. El 50% de los encuestados practica 5 horas o menos de deporte a la semana.

4

- a. $\bar{x} \approx 4,7$, $Mo \approx 6,1$, $Me \approx 5,2$ b. $\bar{x} \approx 4,5$, $Mo \approx 4,5$, $Me \approx 4,6$
- c. El promedio de su curso es más alto, el 50% tiene nota igual o superior a 5,2.

Página 277

- d. Las notas de su curso son más homogéneas. El 50% de su curso tiene nota igual o superior a 4,6.
- e. Andrea, ya que la mayor cantidad de notas es alrededor de 6,1 y el 50% del curso tiene nota sobre 5,2.

5

	A	B	C
Q_1	75,7	84,7	80,7
P_{90}	95	103,3	93,9

- b. Línea B, 102,5. El 85% de los valores es menor o igual a 102,5 mg.
- c. Líneas A y C.
- d. No, ya que la línea B tiene una mediana equivalente a 91 mg.
- e. Línea B.
- f. Sí, ya que las mayores frecuencias se dan en los dos últimos intervalos.

6

- a. La B ya que el promedio de horas de duración es mayor, la mayor cantidad de ampolletas dura entre 1000 y 1200 horas y el 50% de los datos dura más de 1000 horas aprox.

	A	B	C
Q_3	625	1108	783
P_{20}	288	660	376

- c. No, el 20% de las ampolletas del tipo C dura menos de 376 horas.

7

- a. Sí, ya que las barras más altas se concentran en los sueldos más altos, mientras que en la sucursal B, los sueldos más altos tienen poca frecuencia.
- b. Más trabajadores de la sucursal B que de la A ganan menos de \$350 000.
- c. A la B, ya que presenta los sueldos más bajos.



Página 279

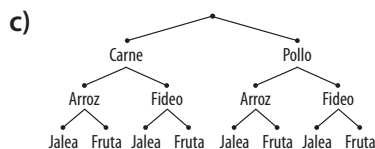
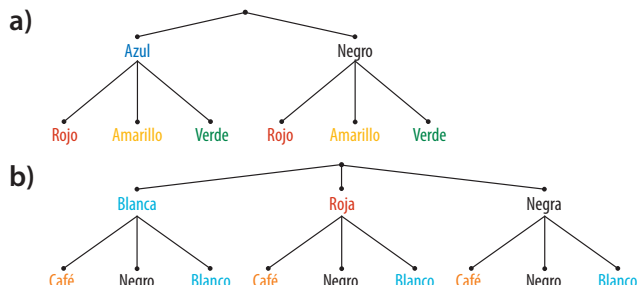
1

- a) Para Resort en el promedio, para Boing en el promedio, para Saltos en la moda mayor. Ya que son las medidas de tendencia central con mayor valor.
- b) Resort tiene asimetría positiva igual que Boing, mientras que Saltos es casi pareja.
- c) La respuesta depende de cada estudiante.

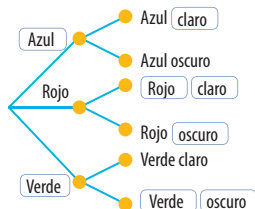
2 La familiar.

Página 281

1



2

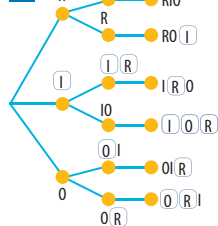


Página 282

3

- a) 6 opciones. b) 9 opciones.

4



5.

- a) De 6 formas.
- b) De 120 formas.
- c) De 120 formas.
- d) 23 425 600 patentes.
- e) En la primera fila estaría el tipo de página (Comerciante, deportista, colegio, instituto y banco), en la segunda fila estarían las opciones de diseño (que son 10) y en la tercera fila estarían los colores (que son 5).
- f) • De 18 formas. • De 15 formas.

Página 283

- g) • 10 caminos • 11 caminos • 16 caminos
- h) • De 24 formas. • De 362 880 formas.
- De 5040 formas. • De 362 880 formas.
- De 3 628 800 formas.

6 Tendrá 2^{100} salidas. 3^{100} combinaciones.

7 Cristina consideró los tres libros de historia como distintos.

8 La probabilidad es de $\frac{5}{144}$.

Página 286

1

- a) De 12 formas. d) De 72 maneras.
- b) De 6 maneras. e) De 24 maneras.
- c) 120 contraseñas. f) De 12 maneras.

Página 287

2

- a) 20 c) 120 e) 720
- b) 210 d) 12 f) 151200

3

- a) Sin que se repita las cifras se pueden formar 120 números, si se repiten en dos ocasiones se pueden formar 180 números y solo uno de esos números terminará en 26.
- b) • 120 extracciones. • 6 extracciones.
- 24 extracciones. • 24 extracciones.
- c) 30 240 arreglos.
- 720 arreglos.
- 1200 arreglos.
- d) • 210 extracciones.
- 343 extracciones.
- 30 y 42 extracciones respectivamente.

4

- a) 24 anagramas. e) 1260 anagramas.
- b) 12 anagramas. f) 60 anagramas.
- c) 60 anagramas. g) 3 anagramas.
- d) 24 anagramas. h) 181 440 anagramas.

5 Considerando que los dígitos se puedan repetir, si se utilizan 2 dígitos se forman 32 números de 6 cifras, si se utilizan 3 dígitos se formarían 482 números (no se considera el 0 en la primera posición).

Página 290

1

- a) 24 palabras. f) • De 90 maneras.
- b) 26 244 números. • 120 extracciones.
- c) 360 360 formas. • 120 extracciones.
- d) La probabilidad es de $\frac{4}{35}$. • 24 extracciones.
- e) 35 ordenaciones. • 7 extracciones

2

- a) 4 b) 6 c) 10 d) 10

3

- a) $(n - k)!$ b) $\frac{1}{(n-k)!}$

4

- a) 16 personas.
b) De 31 465 formas.
• Solo por varones 1365, solo por mujeres 1820.
• 2 629 575 comisiones y en 2 618 135 habrá al menos un varón.
• 44 352 165 comisiones, 4 458 883 tendrán menos de 4 mujeres, 39 893 282 tendrán menos de 7 hombres.
c) 17 310 309 456 440 combinaciones.
• En 1 731 030 945 644 combinaciones estará el color rojo.
• En 157 366 449 604 combinaciones estará el rojo y el azul.
• En 12 846 240 784 combinaciones estará el rojo, el azul y el verde.

Página 291

- d) De 8 formas.
• 64 extracciones • De 1 226 940 formas.
e) De 184 756 formas.
• De 19 448 formas. • De 12 012 formas.
• De 43 758 formas.
f) 9900 muestras.
• 450 muestras. • 5 muestras.
g) De 4060 maneras.
• De 593 775 maneras.

5 161 700 combinaciones.

6

- a) Se calcula C_2^7 obteniendo 21. Luego, se calcula C_8^9 obteniendo 9. Finalmente se suman los valores encontrados 21 y 9 obteniendo 30.
b) Se calcula primero C_3^7 obteniendo 35, se multiplica este valor por 6 y el resultado por 3 obteniendo 630. Luego se calcula C_2^4 obteniendo 6 y se multiplica ese valor por -5 obteniendo -30. Finalmente se dividen ambos valores 630 y -30 obteniéndose -21.

7 Él debe calcular las combinaciones posibles solo entre los discos de artistas brasileños, es decir C_5^8 .

Página 293

1

- a) 120 palabras. b) De 6 maneras.

2

- a) Con reposición: 6561. b) La media es 9.
Sin reposición: 126

3

- a) • 111 930 muestras. • 3 111 696 muestras.
• La respuesta depende de cada estudiante. Un ejemplo es:
 $M_1 = \{5,5; 3,8; 6,7; 6,1\} \rightarrow \bar{x}_1 \approx 5,5$
 $M_2 = \{5,1; 6,0; 7,0; 7,0\} \rightarrow \bar{x}_1 \approx 6,3$
 $M_3 = \{3,3; 5,7; 5,5; 5,4\} \rightarrow \bar{x}_1 \approx 5,0$
– Las medias de las muestras obtenidas son distintas entre sí y distintas de la media poblacional.
– La media de las medias muestrales obtenidas es 5,6 que es cercana a la media poblacional.

b) • 8568 muestras.

- La respuesta depende de cada estudiante. Un ejemplo es:
 $M_1 = \{40 990, 19 990, 28 990, 35 990, 36 890\} \rightarrow \bar{x}_1 = 32 570$
 $M_2 = \{41 990, 29 990, 33 990, 31 990, 45 980\} \rightarrow \bar{x}_2 = 36 788$
 $M_3 = \{39 990, 35 990, 33 990, 40 990, 39 990\} \rightarrow \bar{x}_3 = 38 190$
 $M_4 = \{45 980, 31 990, 45 990, 39 990, 33 990\} \rightarrow \bar{x}_4 = 39 588$
 $\bar{x} \approx 36 484$

– Las medias de las muestras obtenidas son distintas entre sí y distintas de la media poblacional.

– La media de las medias muestrales obtenidas es 36 784 que es cercana a la media poblacional.

- c) • No, ya que la media obtenida de ellas es \$446 250 que no es cercano a la media de la empresa.
• Las medias entre ellas podrían ser diferentes entre sí y puede haber algunas más cercanas que otras a la media de la empresa.
• Si se consideran todas las muestras posibles, la media entre ellas sería igual a la media de la empresa.

Página 296

1

- a) • La probabilidad es 0,25. b) • La probabilidad es $\frac{1}{7}$.
• La probabilidad es 0,25. • La probabilidad es $\frac{4}{7}$.
• La probabilidad es 0,5. • La probabilidad es $\frac{6}{41}$.
• La probabilidad es 0,75. • La probabilidad es $\frac{6}{41}$.

2

- a) Sí b) No c) Sí d) No

3

- a) Sí b) Sí c) No

Página 297

4

- a) La probabilidad es 0,5. c) La probabilidad es 0.
b) La probabilidad es 0.
d) Como hay un número de cada uno, todos tienen la misma probabilidad de ser extraídos.

5

- a) • La probabilidad de extraer una bolita numerada cualquiera es $\frac{1}{15}$. Al repetir el experimento con reposición la probabilidad de extracción en la segunda ocasión es igual que en la primera, así la probabilidad es $\left(\frac{1}{15}\right)$.
• La probabilidad de que la primera bolita extraída esté numerada con un número impar es $\frac{8}{15}$, como la segunda es distinta a la primera pero el experimento es con reposición, la probabilidad es $\frac{7}{15}$ y para la tercera, la probabilidad es $\frac{6}{15}$. Luego la probabilidad de obtener las tres bolitas numeradas con números impares diferentes es $\frac{8}{15} \cdot \frac{7}{15} \cdot \frac{6}{15}$.



- b) • La probabilidad es $\frac{6}{13}$. • La probabilidad es $\frac{1}{13}$.
- c) • La probabilidad es 1.
• La probabilidad es 0.
• La probabilidad es $\frac{1}{9}$.
• La probabilidad es $\frac{1}{6}$.
- d) 180 alumnas y 144 alumnos.
- e) • La probabilidad es 0,5. • Sí.
• La probabilidad es $\frac{1}{3}$.
• Que la bolita esté numerada con un número par o impar, ya que 0,5 es mayor que $\frac{1}{3}$.

6

- a) En ambos casos la probabilidad es 0,5.
- b) Probabilidad de número primo = 0,4. Probabilidad de número compuesto = 0,55. Probabilidad de primo o compuesto 0,95.
- c) La probabilidad es 0,3.

7 No se puede afirmar porque los eventos no son equiprobables.

Página 300

1

- a) Frecuencia relativa 0,19 0,37 0,23 0,21
- b) Frecuencia relativa 0,06 0,09 0,16 0,36 0,33

2

- a) V b) F c) V d) F

3 La respuesta depende de cada estudiante.

4 Respuesta abierta.

Página 301

5

- a) • A Infantil. 0,54.
• Juvenil: \$50 000, Infantil: \$270 000, Coqueta y regalona: \$63 000 y Tigresa del oriente: \$117 000.
- b) • La probabilidad es $\frac{35}{128}$.
• La probabilidad es $\frac{1}{32}$.
• 2° medio, ya que hay más estudiantes interesados en esa área.
- c) • aprox. a debe valer 5.
• b = 50 y c = 100 son los valores que pueden tomar.

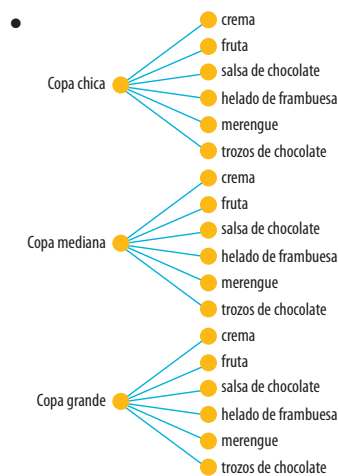
6 La respuesta depende de cada estudiante.

7 Se puede repetir el experimento de lanzar el dado o la moneda varias veces y calcular las probabilidades experimentales de cada valor. Si hay un valor notoriamente con una probabilidad mayor, entonces podríamos decir que el dado o la moneda están cargados a ese valor.

Página 302

1

- a. • De 18 formas. • De 12 formas.



- b. 110 parejas.
- c. De 720 formas.
- d. Patricia tiene razón. Ya que si hay elementos repetidos, las combinaciones diferentes son menos.
- e. De 4845 formas.
- f. De 15 504 formas. Serían de 1287 formas.
- g. 2^{100} resultados.
- h. De 360 formas.
- i. • 420 extracciones.
• 120 extracciones.
• 60 extracciones.
• 12 extracciones.
- j. • De 720 maneras.
• De 840 maneras.
• De 1680 maneras.

Página 303

2

- a. Sin reposición: 10, Con reposición: 25
- b. En el segundo caso, ya que la selección es al azar y el grupo es más representativo.

3

- a. V
- b. F, el tamaño de la muestra depende del tamaño de la población.
- c. V
- d. F, depende de los datos escogidos.

4

- a. F, ya que se aproxima a la media poblacional.
- b. F, ya que sería así siempre y cuando las 5 muestras fueran todas las muestras posibles que se pueden extraer de la población.
- c. F, ya que también se podría obtener un valor menor.
- d. V.

5

- a. • La probabilidad es 0,1.
• La probabilidad es $\frac{1}{90}$.
• La probabilidad es $\frac{7}{15}$.
- b. • La probabilidad es $\frac{4}{455}$.
• La probabilidad es $\frac{601}{1365}$.
• Aprox. 44 alumnos.

6

- a. F b. F

Página 305

1

a) Del jardín 720, del grupo scout 32 760.

2

$$C_5^{20} \cdot C_7^{30} = 31563043200$$

3

De 3003 formas.

4

a) La cardinalidad es 15.

b) Se cuenta el total de bolitas con un número impar (8) entonces para la primera extracción hay 8 posibilidades. Luego, para la segunda extracción solo se pueden considerar 7 bolitas y para la tercera 6 ya que son diferentes. Finalmente, el producto de los tres valores indica la cantidad de casos posibles con tres bolitas numeradas con un número impar.

Página 306

1

Juan hizo el análisis correcto. Paulina debería haber dicho que el 25% de los datos esperó más de 10,4 segundos.

Página 307

2

a) Caso 1 es correcto. En el segundo caso no se considera el orden.

b) Caso 1 es correcto. En el segundo solo se consideran 3 bolitas y 4 extracciones.

3

a) $\frac{34!}{10! \cdot 20! \cdot 4!} = 1393367615640$

b) Sin reposición: 278 256. Con reposición: 45 435 424.

Página 310

1

a. Aprox. 71,4% b. 15 personas. c. Aprox. 21,4%

2

a. El primer grupo consume más fruta. Las tres medidas de tendencia central son mayores para el primer grupo, por lo tanto en este grupo se consume más fruta.

3

a.

Compañía	Q_1	Q_2	Q_3	Rango intercuartílico
A	2	4	9	7
B	11	12	14	3
C	3	9	17	14

b. La compañía C. Es la que tiene un mayor tiempo de espera.

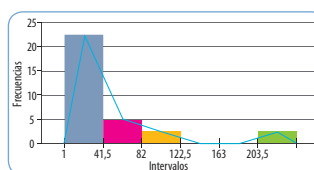
Página 311

4

a.

Intervalo	Marca de clase	Frecuencia	Frecuencia acumulada
[1; 41,5[	21,25	22	22
[41,5; 82[	61,75	5	27
[82; 122,5[	102,25	4	31
[122,5; 163[	142,75	0	31
[163; 203,5[	183,25	0	31
[203,5; 244[	223,75	2	33

b.



c.

	Datos	Tabla
Media	46,2	49,9
Moda	3	23,8
Mediana	30	31,4

Se observa que los valores de las medidas de tendencia central son diferentes y que la moda tiene la mayor variación. En este caso es mejor trabajar con el conjunto de datos y no con una tabla de frecuencias.

5

a) 3024 números.

b) De 38 955 840 formas. De 666 172 912 204 800 formas.

c) De 300 formas. d) De 720 formas. e) 15 504 grupos.

6

a) $a = 4,5$

b) Sin reposición: 10, con reposición: 25.

c) Media sin reposición: menor valor = 3,5 / mayor valor = 5, 5
Media con reposición: menor valor = 3 / mayor valor = 6

7

a) El número 6 salió aproximadamente 692 veces. Sí, el dado está cargado ya que las probabilidades para cada valor son distintas.

b) $\frac{1}{6}; 0,25; \frac{1}{6}$

c) $\frac{10}{720}$

Página 312

1. D 2. C 3. C 4. E 5. C 6. D

Página 313

7. E 9. D 11. B 13. C
8. D 10. A 12. E 14. A

Página 314

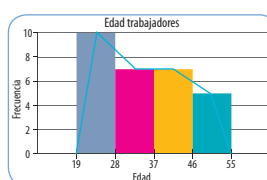
15. A 16. C 17. E 18. A

1

a.

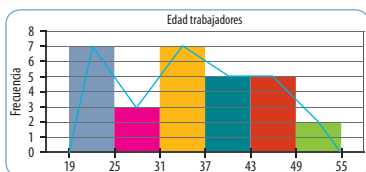
Intervalo	Marca de clase	Frecuencia	Frecuencia acumulada
[19, 28[	23,5	10	10
[28, 37[	32,5	7	17
[37, 46[	41,5	7	24
[46, 55]	50,5	5	29

b.



c.

Intervalo	Marca de clase	Frecuencia	Frecuencia acumulada
[19, 25[	22	7	7
[25, 31[	28	3	10
[31, 37[	34	7	17
[37, 43[	40	5	22
[43, 49[	46	5	27
[49, 55[	52	2	29



La segunda tabla refleja mejor la información, ya que tiene más intervalos y cada intervalo tiene menor amplitud.

2

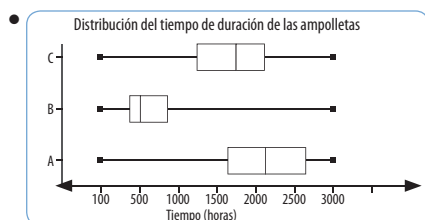
- Aproximadamente el 92%.
- 49 niños.
- No, ya que en el último intervalo con aumenta.

3

- El primero medio B ya que el 50% tiene más de 4 hermanos.
- El promedio de la tienda B es mayor.
 - La tienda B ya que en promedio y en total tiene más ventas.

Página 315

- La ampollita A.



- La ampollita A.

4

- Las probabilidades son: $\frac{1}{7}, \frac{1}{7}$.
- La probabilidad es $\frac{35}{36}$.
- La probabilidad es $\frac{33}{66640}$.

5

- En el grupo A.
- La probabilidad es $\frac{138}{169}$.

Desafío "La leyenda de la princesa enamorada"

El vasallo cogió uno de los dos papeles, lo miró y, gritando de alegría lo rompió en mil pedazos sin dejar que nadie lo leyera. Abrazó a la princesa al tiempo que le decía que podían casarse. El rey sabía que en el papel elegido, al igual que en el otro, estaba escrita la palabra destierro, pero no pudo demostrarlo, ya que se hubiera descubierto su trampa. Ante la inteligencia del vasallo, el rey no tuvo más remedio que enseñar el papel que permanecía en la urna y permitir el matrimonio de los amados.

Integro mis aprendizajes

Página 316

- D
- B
- A
- C
- E
- D

Página 317

- C
- C
- B
- B
- A
- A
- A
- D

Página 318

- C
- C
- B
- D

Página 319

- B
- A
- C
- A
- C
- B
- E
- C